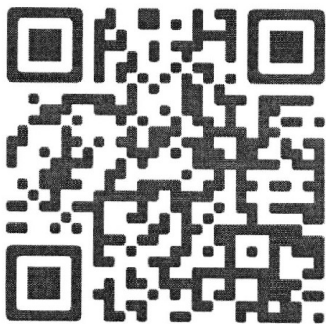




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{30001 \text{ шт.}} = 10^{30001} - 1, \text{ при упрощении обозначим } k=30001$$

$$n^3 = (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} \text{ вычитаем так: } \begin{array}{r} 10^{3k} \\ - 3 \cdot 10^{2k} \\ \hline 9 \dots 97 \dots 0 \dots 0 \end{array}$$

$$3 \cdot 10^k - 1 = 2 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ шт.}}$$

$$\text{Т.е. } n^3 = \underbrace{9 \dots 97}_{k-1 \text{ шт.}} \times 10^{2k} + \underbrace{2 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ шт.}}}_{3k \text{ цифр.}} = \begin{array}{c} \boxed{9 \dots 97 \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ цифр.}} \underbrace{02 \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ цифр.}}} \underbrace{9}_{k \text{ цифр.}}} \end{array}$$

Среднеарифметическое в n^3 $(k-1) + k = 2k-1$ девяток
 $2k-1 = 30001 \cdot 2 - 1 = 60001$

Ответ: 60001

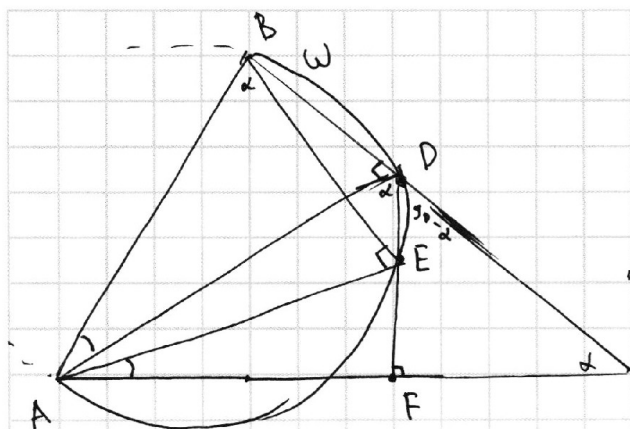


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle DCF = \alpha \Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha$
 $\angle BDA = 90^\circ$ (т.к. $D \in \omega$, AB-диаметр)
 $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$
 Тогда $\angle ADF = \alpha$
 $\alpha = \angle ADF = \angle ABE$ (т.к. ABDE-
 впис. четырехуг.) $\Rightarrow \angle BAE = 90 - \alpha$
 (т.к. $BEA = 90^\circ$ (т.к. $E \in \omega$,
 AB-диаметр))

Также $\angle DAF = 90 - \alpha$ (т.к. $ADF = \alpha$)

Тогда $90 - \alpha = \angle DAF = \angle BAE \Rightarrow \angle BAD = \angle EAF = \alpha - \angle DAE$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEF$ (по двум углам) $\Rightarrow AB : AD = AE : AF$
 $AB = 8, BE = 6 \Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Обозначим $AF = x$

$$AD = AB \cdot AF : AE = 8x / 2\sqrt{7} = 4x / \sqrt{7}$$

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = DC^2 - FC^2, \quad AD^2 + DC^2 = AC^2 \Leftrightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2$$

$$AD^2 - AF^2 = AC^2 - AD^2 - FC^2, \quad \text{запишем все:}$$

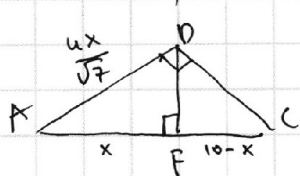
$$FC = AC - AF, \quad AC = 10$$

$$\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}\right)^2 - x^2 = 10^2 - \left(\frac{4x}{\sqrt{7}}\right)^2 - (10 - x)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{16x}{7} - x^2 - 10^2 +$$

$$10^2 + x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow 32x / 7 = 20x \Leftrightarrow 32x = 140x$$

$$\Leftrightarrow 108x =$$

$$AF = x, \quad AD = AB \cdot AF : AE = 8x / 2\sqrt{7} = 4x / \sqrt{7}$$



$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - \frac{16x^2}{7}}$$

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = DC^2 - FC^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16x^2}{7} - x^2 = \left(10^2 - \frac{16x^2}{7}\right) - (10^2 + x^2 - 20x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 16x^2}{7} = 20x \Leftrightarrow 32x^2 = 140x \Leftrightarrow x(32x - 140) = 0$$

$$x \neq 0 \text{ (т.к. } AF \neq 0) \Rightarrow x = \frac{140}{32} = \frac{35}{8} = 4,375$$

Ответ: 4,375



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего было n коробок

Рассчитаем вероятн. выпадать в первом случае:

Всего вариантов C_n^5 выбрать 5 коробок из n
блочнопр. вар. когда мы выбираем 3 коробки
с мячами и еще какие-то 2 др. т.е. их C_{n-3}^2

Тогда вероятн. в первом случае: $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Во втором случае всего вар. выбора C_n^7

а блочнопр. вар. когда выбираем 3 коробки
с мячами и еще какие-то 4 другие, т.е. их C_{n-3}^4

Тогда вероятн. во втором случае: $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$

Рассчитаем во сколько раз вероятн. во втором случае

больше: $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-3-4)!} \times \frac{7! \cdot (n-7)!}{n!} \times$

$$\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} \times \frac{2! \cdot (n-5)!}{(n-3)!} = \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: 3,5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0, \text{ по теор. Виета}$$

$$a^2 - 2a = x_1 + x_2 \text{ (где } x_1, x_2 - \text{ корни ур.) } x_1 + x_2 = y_6 + y_7$$

($y_1, y_2, \dots$ - арифм. прогрессия y уст.)

$$y_6 = y_1 + 5d \text{ (1 - разность прогр.)}, y_7 = y_1 + 6d$$

$$x_1 + x_2 = y_6 + y_7 = 2y_1 + 11d$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0, \text{ по теор. Виета}$$

$$(a^3 - 2a^2)/3 = x_1 + x_2 \text{ (где } x_1, x_2 - \text{ корни этого ур.) } x_1 + x_2 = y_4 + y_9 = 2y_1 + 11d$$

$$\text{Т.е. } a^2 - 2a = (a^3 - 2a^2)/3 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a-3) = 0. \text{ Т.е.}$$

возможны a и.б. 0, 2, 3. но a не может быть 0

Проверим эти 3 вар:

$$a=0 \mid \text{1 ур: } x^2 - 7 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{7}, -\sqrt{7}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Расставим их в прогр. порядке: $-\sqrt{7}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{7}$

Тогда 4 и 9 члном арифм. прогр. разность $\sqrt{7}$

$$a=2 \mid \text{1 ур: } x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow \text{корни } \sqrt{\frac{26}{3}}, -\sqrt{\frac{26}{3}}$$

Расставим их в прогр. порядке: $-\sqrt{\frac{26}{3}}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{26}{3}}$

между 6 и 7 чл. разность 1, между 4 и 6 чл. разность 2d

$$\Rightarrow (\sqrt{5} - (-\sqrt{5})) \cdot 2 = (-\sqrt{5} - (-\sqrt{\frac{26}{3}})) \Leftrightarrow 4\sqrt{5} = -\sqrt{5} + \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}} \Leftrightarrow 25 \cdot 5 = 26/3 = 25 \cdot 5 \cdot 3 = 26 \quad \text{неверно}$$

$$a=3 \mid \text{1 ур: } x^2 - 3x - 1 \Rightarrow \text{корни } \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$2 \text{ ур: } 3x^2 - 9x + 7 \Rightarrow \text{корни } \frac{3+5\sqrt{13}}{2}, \frac{3-5\sqrt{13}}{2}$$

Расставим в прогр. порядке: $\frac{3-5\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3+5\sqrt{13}}{2}$

Разность между 1 и 2 чл: $2\sqrt{13}$, между 2 и 3 чл: $\sqrt{13}$, между 3 и 4 чл: $2\sqrt{13}$
следовательно они могут быть чл. арифм. прогр. с разностью $\sqrt{13} \Rightarrow a=3$ подходит

Ответ: $a=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z = \frac{-2y + y^2}{x} = \frac{-2x + x^2}{y}$$

$$z - z = \frac{xy}{z}$$

$$z(z - z) = xy$$

$$xy = -2z + z^2$$

$$z^2 = xy + 2z$$

$$\frac{-2y + y^2}{z} = \frac{-2z + z^2}{y}$$

$$x^2 = 2x + yz$$

$$x = \frac{-2y + y^2}{z}$$

$$y^2 = 2y + xz$$

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 + (z - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4 \cdot 3 - 4x - 4y - 4z$$

$$\frac{9 \dots 9}{30001} = 10^{30001} - 1$$

$$(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1$$

$$\frac{1000}{899} = 1$$

$$30001 \text{ циф}$$

$$1000 \dots 000 + 300 \dots 000 + 30 \dots 000 + 1$$

$$99^3 = \frac{891}{9801}$$

$$(z + x)(z + y) =$$

$$z^2 + xz + yz + xy$$

$$(z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1$$

$$\frac{1}{88209} = \frac{9}{882099}$$

$$-2z = xy - z^2$$

$$-2x = yz - x^2$$

$$xy = -2z + z^2$$

$$yz = -2x + x^2$$

$$xz = -2y + y^2$$

$$(x + y + z)(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$-2y^2 + y^3 = -2x^2 + x^3 = -2z^2 + z^3$$

$$(a - 1)(a^2 - 2a + 1) = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$= a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$12 + 2x + 2y + 2z - 3x - 3y - 3z$$

$$(2)$$

$$xy + 1 = (z - 1)^2$$

$$yz + 1 = (x - 1)^2$$

$$\frac{5 \dots 970 \dots 029 \dots 9}{9801}$$

$$\frac{y^4 x^4 + x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 y^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12 + 2(-2x - 2y - 2z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12 + 2(xy - z^2 + yz - x^2 + zx - y^2)$$

$$12 - x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz + yz$$

$$12 - 2z - 2x - 2y$$

$$2(6 - x - y - z)$$

[illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - (a^3 - 10a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_9 = a_8 + 8d$$

$$a^2(a-2) =$$

$$(a_1 + 5d)(a_1 + 6d) =$$

$$a_1^2 + 11a_1d + 30d^2$$

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} = 2a_1 + 11d$$

$$9 - 6 = 3$$

$$9 - 3 - 7 = -1$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$a^2 - 2a = 2a_1 + 11d$$

$$a^2 - a - 7 = a_1^2 + 11a_1d + 30d^2$$

Используя

$$a = 0$$

$$1) \text{yp: } x^2 - 7 = 0$$

$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$$

$$2) \text{yp: } 3x^2 + 6 = 0$$

$$3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$-\sqrt{7} \quad \sqrt{7} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$

$$6x$$

$$u_9$$

$$d > 0$$

$$-\sqrt{7} - \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{7}$$

$$u$$

$$6$$

$$7$$

$$9$$

$$9$$

$$7$$

$$6$$

$$9$$

$$a = 3$$

$$1) \text{yp: } x^2 - 3x + 4$$

$$\frac{3 + \sqrt{15}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}$$

$$3(2 - 3^4)$$

$$2 - 81 = -79$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}} - \sqrt{5}$$

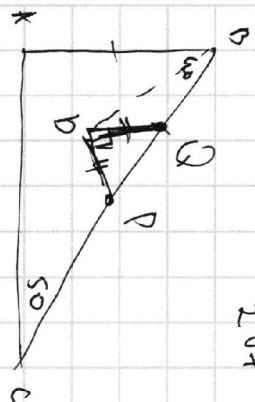
$$2) \text{yp: } 3x^2 - 9x + 6 - 3$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (6 - 3)$$

$$= 9(9 - 4 \cdot (2 - 3^4)) = 9(9 + 4 \cdot 81) =$$

$$5\sqrt{5} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$25 \cdot 5 = 26/3$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

