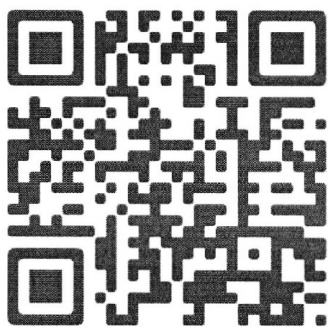




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + 2^2 & (1) \\ yz = 3x + 1^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(3): x(y-z) = 3(z-y) + (2-y)(2+y) \\ (y-z)(x+y+z-3) = 0$$

1) $y = z$. Тогда аналогично $x = y = z$.
подставим в (1): $x^2 = 3x + 4$, но $x \neq 0$.
решений нет.
пробуем другие.

$$2) x + y + z = -3$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 \quad (4)$$

$$6x + 6y + 6z = 2xy + 2xz + 2yz - 2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 27 = 27$$

$$(x+y+z)^2 = (-3)^2 = 9 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 18$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 18 = 27 \quad | :3 = 9 \quad (5)$$

подставим (4) в (5):

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 27 =$$

$$= (x+y+z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 27 = 9 - 18 + 27 =$$

$$= 18$$

$$\text{Ответ: } 18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значение суммы арифметической прогрессии в n :

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Примеры:

$$S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$
$$S_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$
$$S_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$
$$S_4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$
$$S_5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$
$$S_6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21$$
$$S_7 = \frac{7(7+1)}{2} = 28$$
$$S_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 36$$
$$S_9 = \frac{9(9+1)}{2} = 45$$
$$S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$$

Найдем $n^3 = n^2 \cdot n = (n^2 - 2) \cdot n + n = \left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 + n$

$$\left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 + n = (n-1) \cdot n = n^2 - n$$
$$\left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 + n = n^2 - n$$
$$\left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 = n^2 - 2n$$
$$\left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 = n^2 - 2n$$
$$\left(\frac{n^2 - 1}{1000} \right) \cdot 4 \cdot 13 = n^2 - 2n$$

Вывод: $n^2 = 1000$

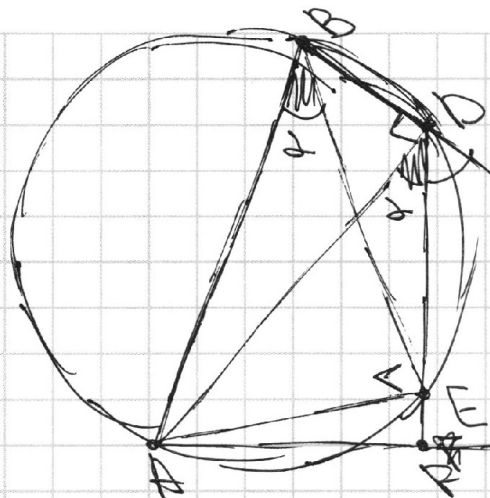


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BDA = 90^\circ$, как опир.
на диаметр. $\angle BEA = 90^\circ$,
аналогично

Пусть $\angle DCE = d$,
 $\angle CDF = 90 - d$.

$\angle ADE = d$.

$\angle ABE = \angle ADE = d$,
т.к.

опир. на $\angle AFE$. В $\triangle ABE$ по т. Пифагора

$$AE = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}, \quad \sin d = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad \sin d = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{10}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{AB}{10}$$

$$AB = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

$$\text{В } \triangle ADF \quad \sin d = \frac{AF}{6} = \frac{AF}{AB}$$

$$AF = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot AB = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{5 \cdot 11}{18} = \frac{55}{18}.$$

$$\text{Итого: } AF = \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего было n шариков. Найдем.
вероятность выпадения k -го шарика. Найдем
каждое выпад. вариантов выпадения:

$$P_5 = (n-3)/(n-4) \cdot 1/2$$

выпад 3 шарика n шаров с тремя
и 2 из шаров, не выпавших. $n-3$ шаров.

$$P_5 = \frac{(n-3)(n-4)}{2n} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

Найдем каждое выпад. вариантов выпадения k -го:

$$P_{66} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}$$

выпад 3 с шаром
и 3 шаров, не выпавших

$$P_6 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$$

Найдем P_6/P_5

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{(n-3)(n-4)}{2n} \cdot \frac{5!}{(n-3)(n-4)(n-5)} = \frac{5!}{2(n-5)}$$

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{120}{2(n-5)}$$

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{60}{n-5}$$

$$P_5 = \frac{60}{n-5} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{5!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P_6 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$

Тогда, найдем P_6/P_5 :



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_6/P_5 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6}{2} = 2.$$

Решет. элементать в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

наиб. вар.
варианта 5 $\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)}{2} = \text{вариант 5.}$

$$P_5 = \frac{(n-3)(n-4)}{2n}$$

вариант 4. $\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4! \cdot n}$

$$P_6 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4! \cdot n}$$

✓✓

$$P_5 = \frac{5! \cdot 4! \cdot n}{2n(n-1)(n-2)}$$

$$P_4 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} \cdot \frac{4!}{2n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{4!}{2n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_4}{P_5} = \frac{4!}{4! \cdot n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{2n(n-1)(n-2)}{5!} =$$

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14}{4} = 3,5$$

$$|x+iy+z|^2 = 2(x^2+y^2+z^2) + 2x$$

$$9 = 18 + 2x \Rightarrow x = -4,5$$

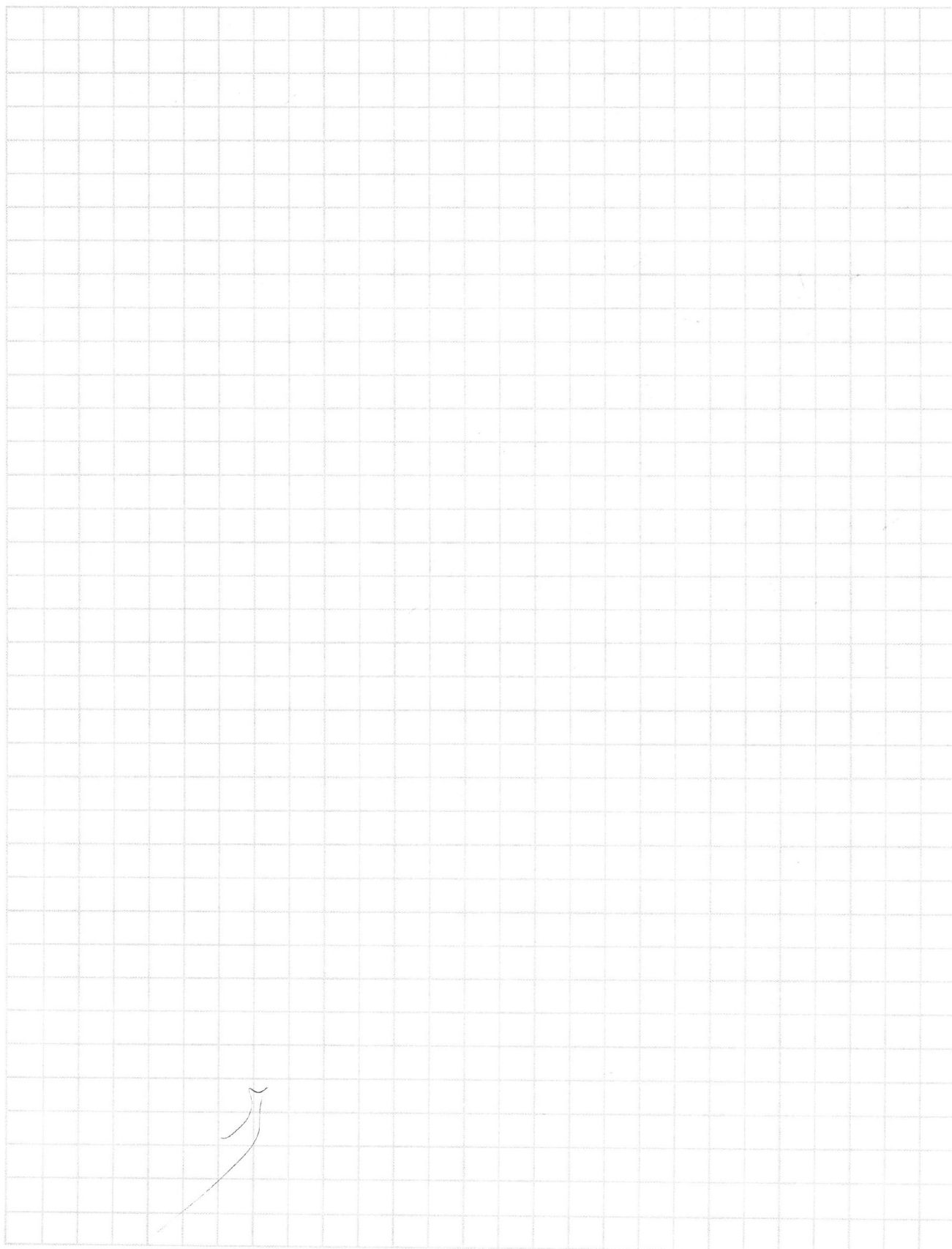


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

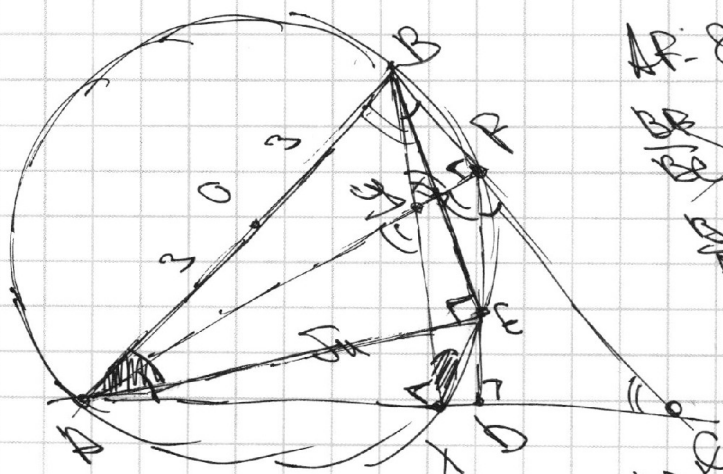
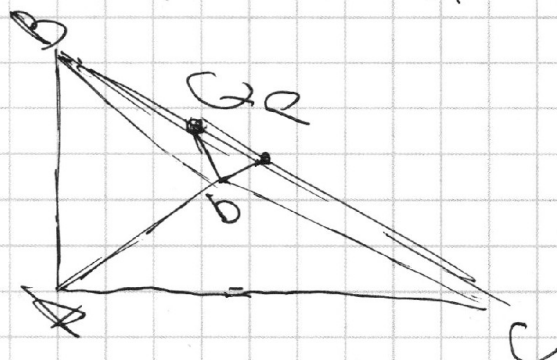
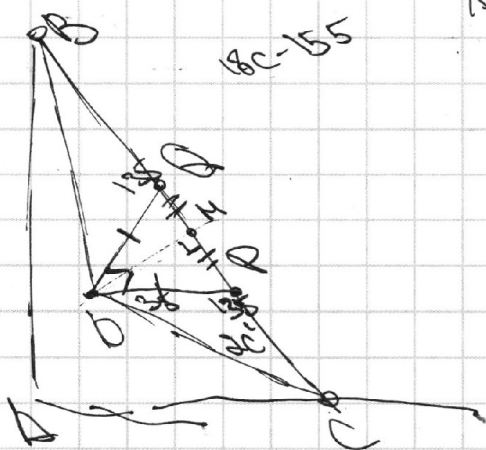
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &xy + yz + zx = 2(9 + 2) = 4(9 + 4) = 7(9 + 4) \\ &\text{Умножим: } x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 = x(16 + 6) + 4(6 + 4) + 2(6 + 2) + 27 \\ &2(x + y + z) = xy + yz + zx = 12 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &2(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 + 27 = 31 \\ &(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &2xy + 2yz + 2zx = 6(x + y + z) \\ &2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2xy + 2yz + 2zx + 27 = \\ &2(x + y + z)^2 = \end{aligned}$$

$$\frac{XC}{PC} = \frac{BX}{AP} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{4 \cdot 82(9 + 2)}{x^2} = \frac{4}{y}$$



$$\begin{aligned} &AP = 9 \quad BX \parallel PD \\ &\frac{BP}{PC} = \frac{XB}{XC} = \frac{BC}{PC} = \frac{XC}{BC} = \frac{AX}{PD} = \frac{BX}{PD \cdot AD} \\ &PD = BC(AC - BC) \end{aligned}$$

$$\triangle ADP \sim \triangle PBC \quad \frac{PD}{BC} = \frac{AP}{PC} = \frac{AD}{PD}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{PD}{DC} = \frac{AP}{PC} = \frac{AD}{PD} \Rightarrow PD^2 = AD \cdot DC$$

$$\frac{AD}{AP} = \frac{AX}{AB} = \frac{AX}{PD}$$

$$\frac{AD}{AP} = \frac{AX}{AB} = \frac{AX}{PD} = \frac{AX}{AB}$$

$$\frac{AD}{AX} = \frac{AP}{PD}$$

$$\frac{AD}{AX} = \frac{AB}{AP}$$

$$\frac{AD}{AX} = \frac{AP}{PD} = \frac{AB}{AP}$$

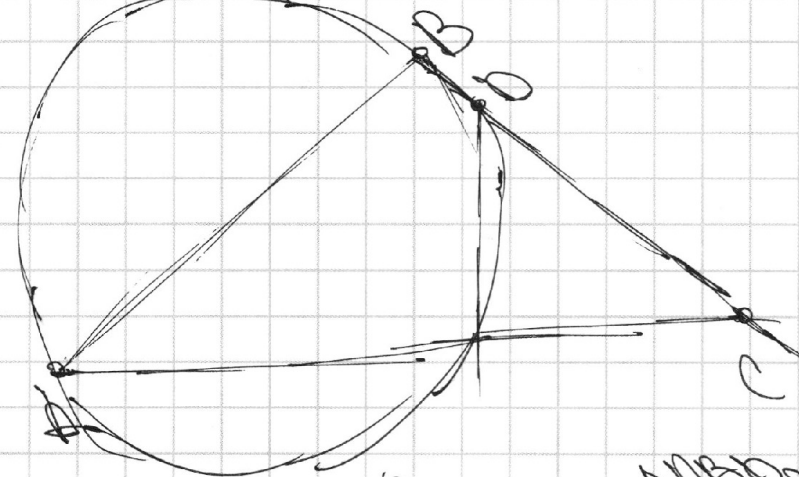
$$\frac{AX}{AD} = \frac{PD}{AB} = \frac{AP}{AB} = BC$$

$$PC = CB = CA = AP$$

$$\angle R = \frac{\pi}{\sin \alpha}$$

$$\sin \angle ABE = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{1}{6}$$

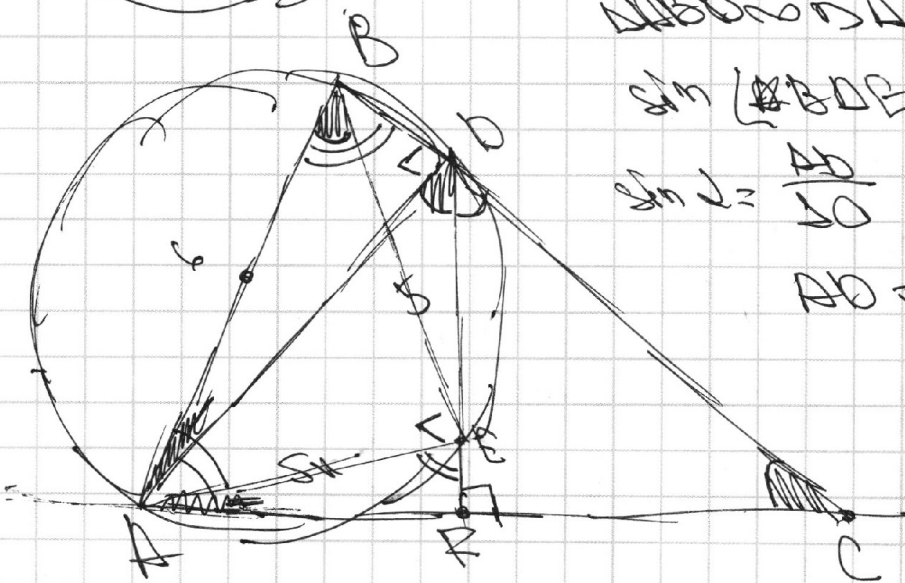


$$\triangle ABD \sim \triangle ACF$$

$$\sin \angle BDE = \frac{1}{6} = \sin \angle BDE$$

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AO} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AD = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4-3) : xy - 2x = 3z + 2^2 - 2y + y^2$$

$$x(y-2) = 3(2-4) + (2-4)(2+4)$$

$$x(4-2)$$

кон-бо $3! \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)}{2}$ gg .

тоже $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)}{2}$

$$P_5 = \frac{(n-3)(n-4)}{2n} \quad 3!$$

$$5 \cdot 3(x^2 + 4^2 + 2^2) = 27$$

$$P_6 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2n}$$

$$x(4-2) = \frac{3! \cdot n}{(4-2)(3+2+4)}$$

$$(4-2)/(n-4+2+3) = 0.$$

х
0

$$xz = 3z + 2^2$$

$$x = 3 + 2$$

$$x + y + z = -3$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$64 + 62 + 6x = 2xy + 2yz + 2xz - 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(x + y + z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 27$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2xz - 6(x + y + z)$$

$$2xy + 2yz + 2xz < 2(3z + 2^2 + 3y + 4^2 + 3x + 2^2)$$