



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ xz = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$xy - yz = 4z + z^2 - 4x + x^2 \Leftrightarrow y(x - z) = 4(z - x) + (z - x) \cdot (z + x) \Rightarrow (z - x)(x + y + z + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

~~Рассуждения аналогичны~~
Если $x + y + z + 4 = 0$, то

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \cancel{xy + yz + xz} + x^2 + 4x + y^2 + 4y + z^2 + 4z + 4(x+y+z) + 48 = xy + yz + xz + (-16) + 48 = xy + yz + xz + 32 = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) + 32 = x^2 + y^2 + z^2 - 16 + 32 = x^2 + y^2 + z^2 + 16 = A$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 16 - 2(xy + yz + xz + 4) \cdot (x+y+z) = 16 - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 32 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow A = 16 + 16 = 32$$

Если же $x = z \Rightarrow$ ~~$xz = 4x + x^2$~~ $\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2$$

$$\begin{aligned} x(y-x) &= 4(x-y) + (x-y)(x+y) \\ (x-y)(4+x+y+x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 2x + y = -4 \end{cases} \text{ — не подходит}$$

Если $x = y = z \Rightarrow x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 = y = z \Rightarrow$ все нули не могут быть ~~суммой~~ $\Rightarrow 2x + y = -4$

$2(x+4)^2 + (y+4)^2 = 32$, аналогично м.к. мы знаем z заменим на x и получим 1 сумму

Ответ: 32.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{25000} = 10^{25000} - 1; \quad n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 1 - 3 \cdot 10^{50000} +$$

$$+ 3 \cdot 10^{25000}$$

$$10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{50000}$$

$$\begin{array}{r} 10 \dots 0 \dots 0 \\ - 30 \dots 0 \\ \hline 70 \dots 0 \end{array}$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{25000} + 3 \cdot 10^{25000} = \underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{24999} \underbrace{030 \dots 0}_{25000}$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{24999} \underbrace{030 \dots 0}_{25000} - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{24999} \underbrace{29 \dots 9}_{25000}$$

Итого получится 99999

Ответ: 99999.

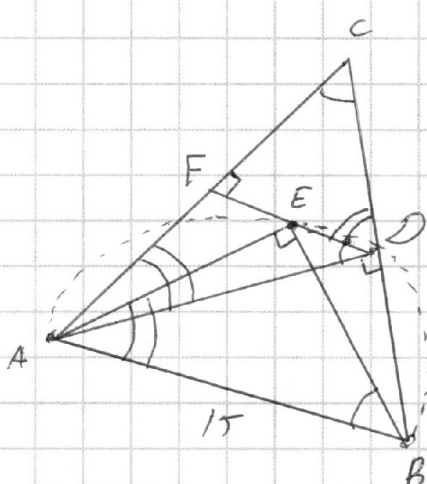


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. П.к. ~~в~~ W. AB - диаметр, то
 $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ (впис. угол, опирающийся на диаметр) $\Rightarrow$ по т. Пифагора:
 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{225 - 100} = 5\sqrt{5}$

2. $\angle ABE = \angle$ $\Rightarrow$ по т. Дельта
 $\triangle$ - кр: $\angle EAB = 90^\circ - \angle$
 $\cos \angle = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow \sin \angle = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin \angle = \frac{AE}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AD = 15$
 $AEDB$ - впис. четырех-к. м.к. все вершины в W
 $\angle EBA = \angle EDA$ по кр-ву впис. четырех-к. $AEDB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle EDA = \angle FDA = \angle$: по кр-ву впис. четырех-к. $AEDB \Rightarrow$
 $\angle EAB = 180^\circ - \angle EDB = \angle FDC \Rightarrow \angle FDC = 90^\circ - \angle$
 $\Rightarrow$ по т. Дельта $\triangle$ - кр: $\angle FCD = 90^\circ - \angle FDC = 90^\circ - 90^\circ - \angle = -\angle$
 $\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - \angle \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ACD$ по двум углам ($\angle EAB = \angle CAD$, $\angle EBA = \angle ACD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \frac{10}{CD} \Rightarrow CD = \frac{40}{3}$, $AD = \frac{4}{3} \cdot AE =$
 $= \frac{4}{3} \cdot 5\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$. $\sin \angle FDA = \sin \angle = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{20\sqrt{5}}{3} = \frac{100}{9}$

Ответ: $\frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте считать вероятность через отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов.

1) Когда мы выбираем 5 коробок, ~~тогда~~ будет всего коробок n . Тогда способов выбрать 5 коробок из n : C_n^5 . Тогда число благоприятных исходов, т.е. когда среди этих 5 коробок: 3 с шариками. Тогда может получиться, что у нас 3 коробки с шариками, а остальные 2 коробки пустые. Давайте когда зафиксируем эти 3 коробки с шариками и выберем какие-то 2 из оставшихся, ~~тогда~~ $(n-3)$ коробок, способов может получиться: $C_{n-3}^2 \Rightarrow P(в 5 коробках, есть 3 с шариками) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

2) Когда мы выбираем 3 коробки, то способов выбрать их: C_n^3 . Тогда благоприятных исходов будет считать то количество коробок и в первом случае: $C_{n-3}^5 \Rightarrow$ когда зафиксируем 3 коробки, и тогда нам надо выбрать 5 коробок из $(n-3)$ оставшихся. Способов может получиться: $C_{n-3}^5 \Rightarrow$ искомая вер-т = $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^3}$

Ответ в задаче некое отношение: $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^3} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3) \dots (n-7) 8!}{5! \cdot n \dots (n-7)}$
 $\frac{n \dots (n-4) \cdot 2!}{5! \cdot (n-3)(n-4)} = \frac{(n-5) \dots (n-7) 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5! (n-5) \dots (n-7)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{28}{5} = 5,6$
 Ответ: 5,6 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член арифметической прогрессии: b_1 и шаг: $d \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по условию для первого уравнения: $\begin{cases} 2b_1 + 3d + 4d = a^2 - a \\ (b_1 + 3d)(b_1 + 4d) = \frac{a^3 - a^2}{3} \end{cases}$

Для 2 уравнения: $\begin{cases} 2b_1 + d + 6d = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ (b_1 + d)(b_1 + 6d) = \frac{a^6 - 4a - 2}{2} \end{cases}$

$$2b_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 - a \Rightarrow a^3 - a^2 = 2a^2 - 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a-2)(a-1) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$a=0 \Rightarrow \begin{cases} b_1^2 + 7b_1d + 12d^2 = \frac{2}{3} \\ 2b_1 + 7d = 0 \end{cases}$$

$$b_1 = -\frac{7d}{2}$$

$$\frac{49d^2}{4} - \frac{49d^2}{2} + 12d^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 12d^2 - \frac{49d^2}{4} = \frac{2}{3} = -\frac{1}{4}d^2 =$$

$$= \frac{2}{3} \Rightarrow d^2 = -\frac{8}{3} \text{ Д.м.к. } d^2 > 0$$

$$a=1 \Rightarrow \begin{cases} b_1^2 + 7b_1d + 12d^2 = \frac{1}{3} \\ 2b_1 + 7d = 0 \end{cases}$$

можно не искать реш., м.к.
аналогично $-\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{3}$

$$a=2 \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 + 7d = 2 \\ b_1^2 + 7b_1d + 12d^2 = -2 \end{cases}$$

$$b_1 = 1 - \frac{7}{2}d$$

$$(1 - \frac{7}{2}d)^2 + 7(1 - \frac{7}{2}d)d +$$

$$+ 12d^2 = -2 = 1 + \frac{49d^2}{4} - 7d + 7d - \frac{49d^2}{2} + 12d^2 =$$

$$= -\frac{d^2}{4} + 1 = -2 \Rightarrow -\frac{d^2}{4} = -3 \Rightarrow d^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{12} \\ d = -\sqrt{12} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow b_1 = 1 - \frac{7}{2}d = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$d = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \Rightarrow b_1 = 1 - \frac{7}{2}d = 1 + 7\sqrt{3}$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6. (1)$$

I. $x \geq 0 \Rightarrow -\frac{x}{6\sqrt{3}} < \frac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow (1) = \begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & y - 15 \geq \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & -\frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$

всего

$$\begin{cases} -30 \leq 6, & y \geq \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ \frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y < \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ 30 \leq 6, & y < -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ x \leq 18\sqrt{3}; & -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases}$$

II. $x < 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{3}} < -\frac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow (1) = \begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & y \geq -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ 15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ 15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & y < \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases}$

всего

$$\begin{cases} -30 \leq 6, & y \geq -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ -\frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6, & \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ 30 \leq 6, & y < \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ x \geq -18\sqrt{3}; & \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15, & x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 18\sqrt{3}; & -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \\ y \geq -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15, & x < 0 \\ 0 > x \geq -18\sqrt{3}; & \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \leq y < -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{(1-2)(1-5)(1-6)(1-7)8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5! (1-5)(1-6)(1-7)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

$$= 5 \frac{3}{5} = 5,6 \text{ раз}$$

$$5. x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad D = a^4 + a^2 - 2a^3 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}a^3 = a^4 + a^2 - \frac{2}{3}a^3 - \frac{8}{3}$$

$$2x^2 - (a^2 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2b_1 + 3d + 4d = a^2 - a \\ (b_1 + 3d)(b_1 + 4d) = \frac{2-a^3}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2b_1 + 5d = a^2 - a \\ b_1^2 + 12d^2 + 7db_1 = \frac{2-a^3}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{a^2 - a - 5d}{2} \\ 3b_1^2 + 36d^2 + 21db_1 &= \end{aligned}$$

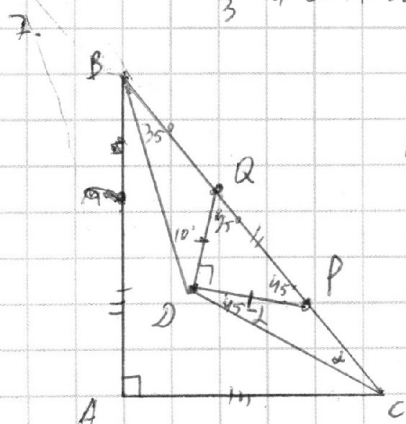
$$= 2 - a^3 \quad 3 \cdot \frac{(a^2 - a - 5d)^2}{4} + 36d^2 + \frac{21d(a^2 - a - 5d)}{2} = 2 - a^3$$

$$3(a^2 - a - 5d)^2 + 144d^2 + 42d(a^2 - a - 5d) = 8 - 2a^3$$

$$3a^4 + 3a^2 + 25d^2 - 6a^3 + 30a^2d + 30ad + 144d^2 + 42da^2 - 42da + 210d^2 = 8 - 2a^3$$

$$\begin{aligned} 2b_1 + d + 6d &= \frac{a^3 - a^2}{2} & a^2 - a &= \frac{a^3 - a^2}{2} & 2a^2 - a &= a^3 - a^2 \\ (b_1 + d)(b_1 + 6d) &= -a^6 - 4a - 2 & 2a^2 - 2a &= a^3 - a^2 & a^3 - 3a^2 + a &= 0 \\ b_1^2 + 7db_1 + 6d^2 &= -a^6 - 4a - 2 & a^3 - 3a^2 + 2a &= 0 & a(a^2 - 3a + 1) &= 0 \\ b_1^2 + 7db_1 + 12d^2 &= \frac{2-a^3}{3} & a^3 - 3a^2 + 2a &= 0 & D = 9 - 4 = 5 & a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ & & a(a-2)(a-1) &= 0 & a(a - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$6d^2 = \frac{2-a^3}{3} + a^6 + 4a + 2 = \frac{2-a^3 + 3a^6 + 12a + 6}{3} = \frac{8-a^3 + 3a^6 + 12a}{3}$$



$$BP - QC = BQ + PC - PC = AB - AC$$

$$BQ + AC = PC + AB$$

$$y - 15 = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

$$(6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 = 108$$

$$\begin{array}{r} 1324 \\ 3 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1972 \\ 9 \\ \hline 981 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 981 \\ +981 \\ \hline 1062 \\ 36 \\ \hline 926 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 450+13=463 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{x^4 y^4 + x^4 z^4 + y^4 z^4}{x^2 y^2 z^2} = \frac{z^4 (x+y+z)^2 + y^4 (x+y+z)^2 + x^4 (x+y+z)^2}{(z+y)^2 (x+y)^2 (y+z)^2} =$$

$$= \frac{z^4}{(x+y)^2 (y+z)^2} + \dots$$

$$xyz = (z+y)(y+x)(x+y)$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{y+z}{y+x} \quad y^2 = (y+z)(y+x) \quad \frac{x^2 y^2}{z^2} = (y+z)^2$$

$$\frac{y^2}{z^2} = \frac{z+y}{y+x}$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = xy + yz + xz + y(x+y+z) + 16 \quad 48 (=)$$

$$xyz = yz^2 + yz^3$$

$$xyz = yx^2 + x^3$$

$$xyz = yy^2 + y^3$$

$$yz^2 + z^3 = yx^2 + x^3 = yy^2 + y^3$$

$$(\Rightarrow) xy + yz + xz - 16 + 48 = xy + yz + xz + 32 = x^2 y^2 + z^2 + 16$$

$$y^2 yz + z^2 + 4y + 4z \geq 3yz + 4y + 4z$$

$$= 2xy + 2xz + 2yz - (x^2 + y^2 + z^2) + 48$$

$$x=y: \begin{cases} x^2 = 4z + z^2 \\ xz = 4x + x^2 \\ xz + 4x + x^2 \end{cases}$$

$$z^2 + 4z - x^2 = 0$$

$$D = 16 + 4x^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4x^2}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + x^2}$$

$$z(x-z) = y(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$-y = y + z + x \quad -y = x + y + z \quad x = -y - y - z$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{y+z}{y+x}$$

$$(x+y)(y+x)(z+y) = xyz$$

$$x^2 y^2 z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 16 - 2(x^2 y^2 + z^2 - 16) =$$

$$= 48 - 2(x^2 y^2 + z^2)$$

$$x^2 y^2 z^2 = 16 \Rightarrow 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $n = 9 \dots 9 = 10^{25000} - 1$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 1 - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} = -1$$

$$10^9 \dots 0 - 3 \cdot 10^{50000} = 100 \dots 7000 \dots 0$$

$$100 \dots 70 \dots 0 + 3 \cdot 10^{25000} = 10 \dots 70 \dots 030 \dots 0$$

25000

$$10^6 - 3 \cdot 10^4 = 1000000 - 30000 =$$

$$= 970000$$

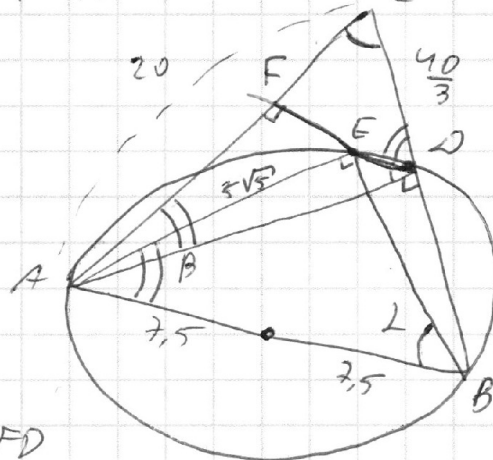
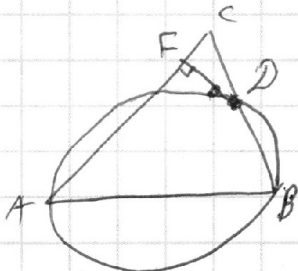
$$10^9 - 3 \cdot 10^6 = 997000 \dots$$

$$10^{12} - 3 \cdot 10^9 = 99970 \dots 0$$

$$AC = 20$$

3.

$$4 + 2 + 5 + 4 + 5 + 5 + 6 = 31$$



$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{225 - 100} = 5\sqrt{5}$$

$$\cos \angle L = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle L = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \angle L = \frac{FD}{AD}; \cos \beta = \frac{FD}{CD}$$

$$\sin \angle L = \frac{AF}{AD}; \sin \beta = \frac{CF}{CD}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{EB}{CD} \Rightarrow CD = \frac{4}{3} EB = \frac{4}{3} \cdot 10 = \frac{40}{3}$$

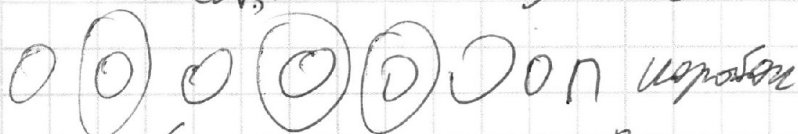
$\triangle AEB \sim \triangle ACD$ по двум углам

$$\frac{AB}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD = \frac{4}{3} \cdot AE = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{AF}{AD} = \frac{AF \cdot 3}{20\sqrt{5}} \Rightarrow AF = \frac{20 \cdot 5}{9} = \frac{100}{9}$$

$$\begin{array}{r} 1000000000000 \\ - 3000000000 \\ \hline 999700000000 \end{array}$$

4.



5 коробок можно выбрать:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

Всего коробок: C_n^5

бл. коробок:

C_{n-3}^2 (то есть 3 коробки и выбираем не-то две оставшиеся)

8 коробок:

Всего: C_n^8

бл. коробок: C_{n-3}^5

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$$

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} \cdot \frac{C_n^5}{C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot 8! \cdot n(n-1) \dots (n-4) \cdot 2}{5! n(n-1) \dots (n-7) 5! (n-3)(n-4)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = yz + z^2 & x \neq 0 \\ yz = yx + x^2 & y \neq 0 \\ zx = zy + y^2 & z \neq 0 \end{cases} \quad x = \frac{yz + z^2}{y}; \quad x = \frac{yz + y^2}{z} \quad yz^2 + z^3 = yz^2 + y^3 \quad y^3 - z^3 + yz^2 - yz^2 = 0$$

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) + y(y - z)(y + z) = 0$$

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2 + y^2 + yz) = 0 \quad y = z$$

$$yz = x(y + x) = \frac{yz + z^2}{y} \cdot \frac{yz + y^2}{z}$$

$$y = \frac{(y + z)(yz + yz + z^2)}{yz}$$

$$y^3 = 16y + 16z + 4z^2 + yz + yz^2 + z^3$$

$$y^3 - z^3 = 4z^2 - 4y^2 = 16y + 16z + 8z^2 + 4yz$$

$$4z^2 + 16y + 16z + 4yz + 4y^2 = 0$$

$$z^2 + 4y + 4z + y^2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4z - 4}}{2}$$

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$$

$$x^2 + 16 + 8x + y^2 + 16 + 8y + z^2 + 8z + 16 = x(x + 8) + y(y + 8) + z(z + 8) + 48$$

$$\begin{cases} \frac{xy}{z} = y + z \\ \frac{yz}{x} = y + x \\ \frac{zx}{y} = z + y \end{cases} \quad \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{x^4 y^2 + y^4 z^2 + z^4 x^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{z^2 (y + z)^2 + x^2 (y + z)^2}{x^2 y^2 z^2}$$

$$x^2 y^2 z^2 = (x + y)(y + z)(z + x)xyz$$

$$+ y^2 (y + z)^2 + x^2 (y + z)^2$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z + z^2}{x + x^2} = \frac{z}{x} \frac{y + z}{y + x} \quad \frac{x^2}{z^2} = \frac{y + z}{y + x}$$

$$z = \frac{x(x + y)}{y} = \frac{y(y + z)}{x}$$

$$\frac{(x + y)^2 (y + z)^2}{(x + y)^2 (z + y)^2} + \frac{y^2}{(x + y)^2 (z + y)^2} + \frac{z^2}{(y + z)^2 (x + y)^2} =$$

$$= \frac{x(x + y)(y + z)}{y^2 x (x + y)^2 (y + z)^2} + \frac{z(z + y)x(x + y)}{z^2 x (z + y)^2 (x + y)^2} + \frac{y(y + z)z(z + y)}{y^2 z (y + z)^2 (z + y)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x + y)(y + z)} + \frac{1}{(y + z)(z + y)} + \frac{1}{(x + y)(z + y)} = \frac{x + y + z + 12}{(x + y)(y + z)(z + y)} =$$

$$= \frac{x + y + z + 12}{xyz}$$

$$2(x + y + z + 12)z(x^2 y^2 + z^2 + yz + yx + yz) = (x + y + z)^2 - x^2 y^2 - z^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 8z + 8y + 8z = x^2 y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8z + 8y + 8z = 2xy + 2yz + 2xz$$