



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим решения, где хотя бы одно число из $x, y, z = 0$
(пусть $x=0$) Тогда $xy=0 \Rightarrow z(z-2)=0 \Rightarrow z=0$ или $z=2$.

$$yz = -2x + x^2 = 0 \Rightarrow y \text{ или } z \text{ тоже будет равным } 0$$

$$-2y + y^2 = 0 \Rightarrow y=0 \text{ или } y=2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ получаем две тройки $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 2)$

$$1) \text{ Тогда } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 12.$$

$$2) (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 = 8.$$

Рассмотрим случай где $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$:

$$1) \text{ Все числа равны } x=y=z \Rightarrow x^2 = -2x + x^2 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{противоречие.}$$

$$2) \text{ Какие-то два числа равны (пусть } x=z). \quad xy = -2x + x^2 \Rightarrow y = -2 + x$$

$$x^2 = -2y + y^2 \quad \text{или} \quad x = y+2$$

$$(y+2)^2 = -2y + y^2 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = -2y + y^2 \Rightarrow 6y = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

Получаем $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3}-2)^2 + (-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + (-\frac{8}{3})^2 = \frac{8}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8.$$

$$3) \text{ При } (x \neq y, y \neq z, z \neq x) \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 = -4x + 4 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4x^2}}{2}$$

$$xz = -4y + 4 \Rightarrow \frac{x^2(z-2)}{y} = y(y-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(z-2) = y^2(y-2). \text{ Аналогично } x^2(x-2) = y^2(y-2) = z^2(z-2).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\text{Пусть } n = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} = 10^{30002} - 1 \quad n^3 = (10^{30002} - 1)^3 = 10^{90006} - 3 \cdot 10^{60004} + 3 \cdot 10^{30002} - 1$$

$$10^{90006} - 3 \cdot 10^{60004} = \underbrace{10 \dots 0}_{90006} - 3 \underbrace{0 \dots 0}_{60004} = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \underbrace{70 \dots 0}_{60004} = (\text{всего } 90006 \text{ цифр})$$

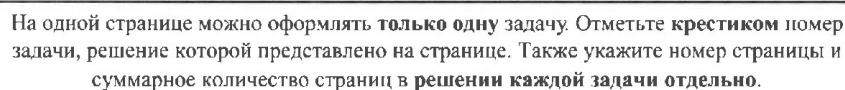
$= k_1$

$$k_1 + 3 \cdot 10^{30002} = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \underbrace{70 \dots 0}_{60004} + 3 \underbrace{0 \dots 0}_{30002} = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \underbrace{70 \dots 0}_{30001} \underbrace{30 \dots 0}_{30002} = k_2$$

$k_2 + 1 =$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \underbrace{70 \dots 0}_{30001} \underbrace{3}_{30002} = n^3 \Rightarrow \text{в числе } n^3 \quad 30001 + 30002 = 60003 \text{ девяток}$$

Ответ: 60003.



СТРАНИЦА

↑ ИЗ ↑

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Dано: AB -гравитационна
 $AB = 8$
 $DF \perp AC$
 $AC = 10$
 $BE = 6$

Haime: AF.

Температура:

AB -quer $\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$

$$ADEB - \text{bmc} \Rightarrow \angle DAE = \angle EBA = \angle FDA = \alpha, \angle EAB = \angle BDE = \angle FDC = \beta$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \alpha, \angle CAD = \beta \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEB \quad k = \frac{16}{8} = \frac{r}{r} = 1,25$$

в $\triangle AEB$ по теор. Птол:

$$AE = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \Rightarrow \frac{AD}{2\sqrt{7}} = \frac{10}{8} \Rightarrow 20\sqrt{7} = 8AD \Rightarrow AD = \frac{20\sqrt{7}}{8} = 2.5\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle FAD = \angle EAB = 30^\circ \\ \angle FDA = \angle EBA = 45^\circ \end{array} \right\} \Delta AFD \sim \Delta AEB \Rightarrow \frac{AF}{2\sqrt{2}} = \frac{3.5\sqrt{2}}{8} \Rightarrow 8AF = 3.5 \Rightarrow AF = 3.5 \Rightarrow 8AF = 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{35}{8} = 4,375$$

Ans: $AF = 4375$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

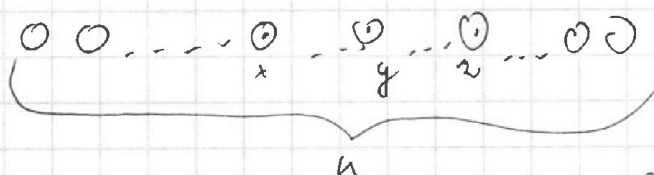
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим общее количество случаев, в которых в I ситуации (при выборе 5 коробок) игрок выигрывает. Пусть y ведущего n коробок и он поместит шарик в коробки x, y, z .



После любой выигрышной пятерки выигрывает так x, y, z, a, b , где a, b 2 коробки, которыми и отличаются каждая

пятерка $\Rightarrow$ всего таких пятерок $C_{n-3}^2 = \frac{(n-4)(n-3)}{2}$ (выбор a, b из $n-3$ коробок).

общая вероятность победы $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-4)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(n-2)(n-1)n} = \frac{60}{(n-2)(n-1)n}$

Во втором случае (при выборе 4 коробок) выигрышная семерка выигрывает так: $x, y, z, a, b, c, d \Rightarrow$ общ. кол-во выигр. семерок равно

$C_{n-3}^4 = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ (выбор a, b, c, d из $n-3$ коробок), всего (всего семерок

$C_n^7 \Rightarrow P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{(n-2)(n-1)n} = \frac{210}{(n-2)(n-1)n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{210}{(n-2)(n-1)n}}{\frac{60}{(n-2)(n-1)n}} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$

Ответ: 3,5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7$$

$$D_1 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 = a^4 - 4a^3 + 4a + 28$$

$$3x^2 - (a^2 - 2a^2)x + 6 - a^2 = 0$$

$$D_2 = a^6 - 4a^5 + 4a^4 - 42 + 12a^2 = a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 42$$

14

$$\text{при } a=2 \quad D_1 = 36 \Rightarrow \sqrt{D_1} = 6$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

$$D_2 = 64 + 256 + 64 - 42 = 384 - 42 = 342$$

Пусть у нас элементы арифм. прогр. $k_0, k_4, k_5, k_9 \Rightarrow$

это корни и $k_9 - k_4 = 2b$ $k_9 - k_5 = 3b \dots k_4 - k_0 = b$. Тогда $x_2 - x_1 = b$

$$a \quad x_4 - x_3 = 5b$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{D_1}$$

$$x_4 - x_3 = \sqrt{D_2}$$

$$\angle IAQ = \angle IBQ = 20^\circ \Rightarrow AIQB \text{ cyclic.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle CPI - \text{внш} \Rightarrow \angle CIP = \angle CAP = 20^\circ \quad \angle API = \angle ACI = 25^\circ$$

$$\angle AIQ - \text{внш} \Rightarrow \angle QIB = \angle QAB = 25^\circ, \quad \angle IBA = \angle IQA.$$

$$\angle PIQ = 180^\circ - 25^\circ - 20^\circ - 25^\circ - 20^\circ = 90^\circ$$

$$\angle APB = \angle PAB = 70^\circ \Rightarrow \angle IPQ = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ, \quad \angle CAQ = \angle CQA = 65^\circ \Rightarrow \angle IQR =$$

$$= 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle IPQ - \text{прямоугольный, равнобедренный, ко } \triangle PQR \text{ тоже прямоугольный, равнобедренный}$$

когда равен по стороне и построены на гипотенузу PQ $\Rightarrow$

$$I = D \Rightarrow \angle DBC = \angle IBC = 20^\circ.$$

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

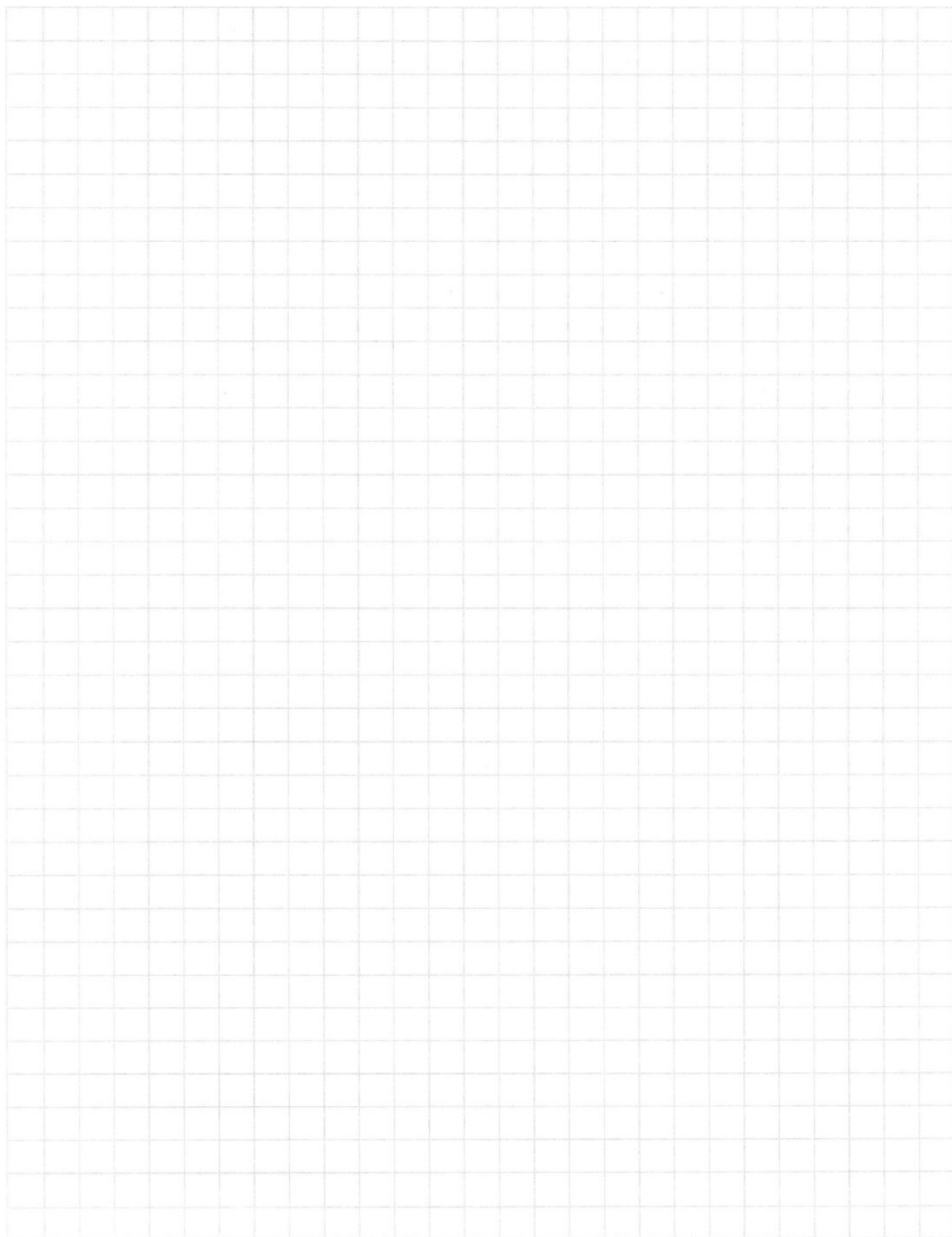
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} xy = x(x-2) \\ yx = x(x-2) \\ 2x = y(y-2) \end{cases}$$

$$y = \frac{x(x-2)}{x}$$

$$x = \frac{2(x-2)}{y}$$

$$x^2(x-2) = y^2(y-2)$$

$$x\left(\frac{x(x-2)}{x}\right) = x(x-2)$$

$$x^2(x-2) = x^2(x-2) = y^2(y-2)$$

~~хххххх~~

$$x^3 - 2x^2 = x^3 - 2x^2$$

$$000 \rightarrow 12$$

$$0 \ 0 \ 2 \rightarrow 8$$

$$x \geq y \geq 2$$

$$k_1 \geq k_2$$

$$k_1^2 \leq k_2^2$$



$$y = x-2$$

$$x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$-1,5 \cdot 0,5 =$$

$$x^2 = -2(x-2) + (x-2)^2 =$$

$$y = \frac{4}{3} - 2^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{8}{9} = -\frac{8^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{16}{9} =$$

$$1$$

$$-1 \cdot 1$$

$$-1 + 0,25 = -0,75$$

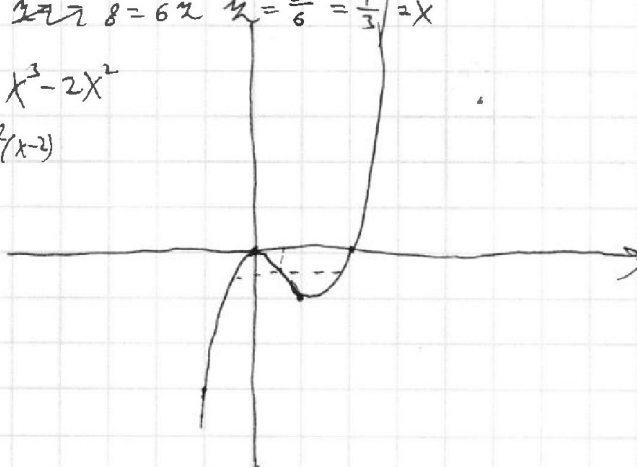
$$= -2x + 4 + x^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 8$$

$$-6x + 8 = 0$$

$$2x \geq 8 = 6x \quad x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = x$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$x^2(x-2)$$





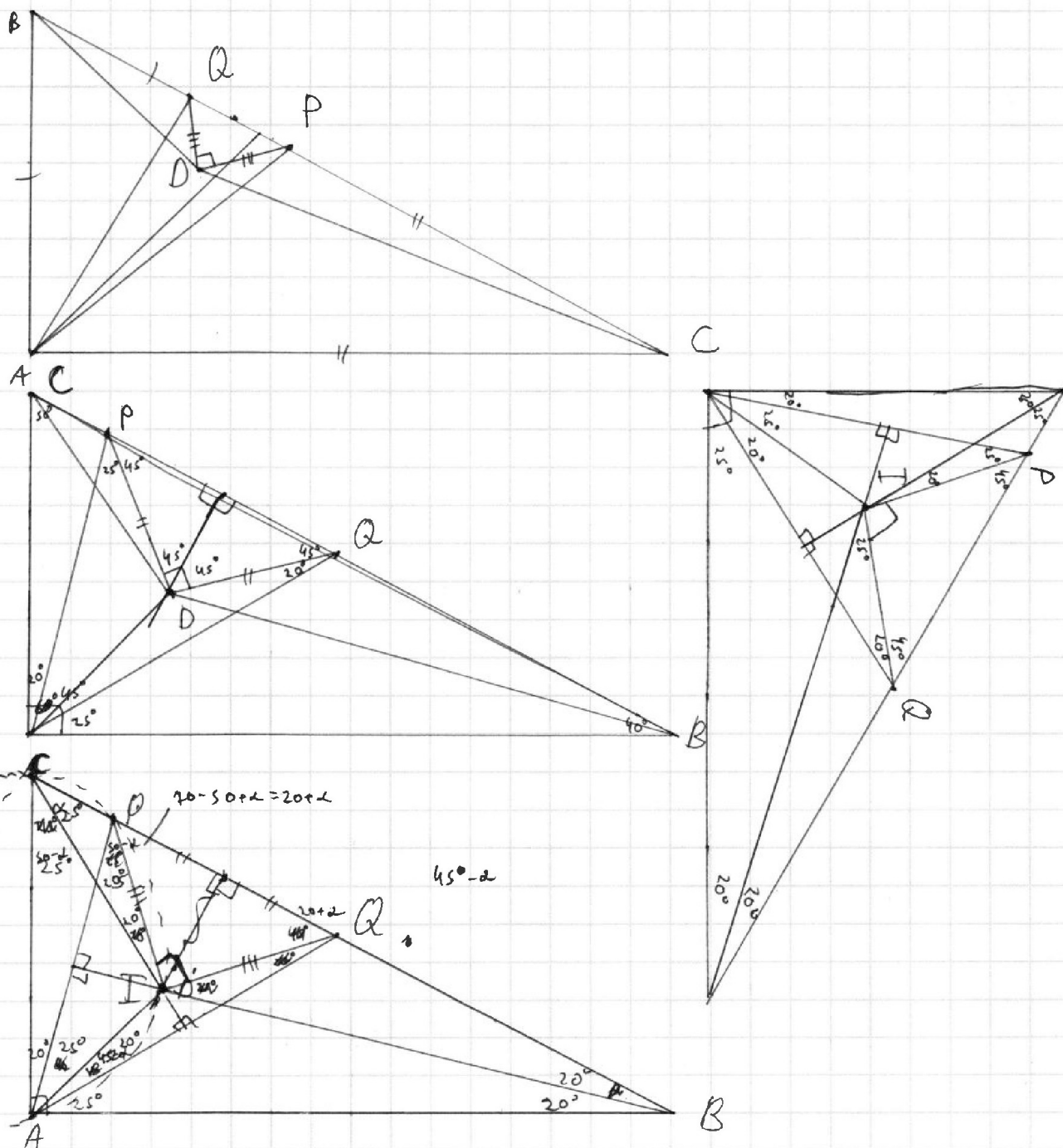
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1/3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{cases} xy = -2x + x^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ xz = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - xy &= 0 \\ x^2 - 2x - yz &= 0 \\ y^2 - 2y - xz &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 = xy + yz + zx - 2x - 2y - 2z + 12 = \\ &= 4(x+y+z) = 8 + xy + yz + zx - 2x - 2y - 2z + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$xy = z(z-2) \Rightarrow (z-2) = \frac{xy}{z}$$

$$\begin{aligned} -2x &= xy - x^2 \\ -4x &= 2xy - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} =$$

$$= \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + x^4 z^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 12 + 2xy - 2x^2 + 2yz - 2x^2 + 2xz - 2y^2 = 12 + 2xy + 2yz + 2xz -$$

$$-x^2 - y^2 - z^2 = (x^2 - 2xy - 4) + (y^2 - 2yz - 4) + (z^2 - 2zx - 4) + 12 - 24 = (x-y)^2 + (x-z)^2 +$$

$$+ (y-z)^2 \geq 24$$

$$729 \cdot 10^{3000} + 729 \cdot 10^{2000} + \dots + 729 \cdot 10 + 729$$

$$\begin{array}{r} 10000 + 100 = 10100 \\ N^2 = 10100 \\ \begin{array}{r} 10000 \\ + 100 \\ \hline 10100 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 7 \quad 2 \quad 9 \\ 7 \quad 2 \quad 9 \\ 8 \quad 0 \quad 9 \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \quad 9 \\ + 9 \quad 9 \\ \hline 8 \quad 9 \quad 1 \\ + 8 \quad 9 \quad 1 \\ \hline 9 \quad 8 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$(10 \cdot 9 + 9)^2 =$$

$$(10^{3000} - 1)^3 =$$

$$= 10^{9000} - 3 \cdot 10^{6000} + 3 \cdot 10^{3000} - 1$$

$$(9 \cdot 10 + 9)^3 = 729 \cdot 10^3 + 729$$

$$\begin{array}{r} 9 \quad 9 \quad 9 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad 0 \end{array}$$

$$90007 \quad 90006$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \quad - \quad - \quad - \quad 9 \quad 7 \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad 0 \\ 30001 \quad 60004 \end{array}$$

