



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Заменим, что $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27 = \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3}$$

Перенесем 1, 2 и 3 упр-я, получим:

$$x^2y^2z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3), \text{ т.к. } x \neq y \neq z \neq 0, \text{ то } \cancel{xyz}$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3), \text{ след-но } \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

Т.о есть $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Возьмем некоторое число 10^{k-1} , состоящее из k девяток, возведем его в куб и посчитаем сколько девяток:

$$(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 = 10^{3k} - 1 - 3 \cdot 10^k (10^k - 1)$$

~~10~~ $10^{3k} - 1$ — число, состоящее из $3k$ единиц
 $10^k - 1$ — число, состоящее из k единиц

$$3 \cdot 10^k (10^k - 1) = 2\underbrace{99\dots 9}_{k-1 \text{ цифры}} \underbrace{700\dots 00}_k \text{ цифры}$$

мене $10^{3k} - 1 = 3 \cdot 10^k (10^k - 1)$ ■ Будем искать ближайшую к 10^k степень 3^m .

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{999\dots}^k \overbrace{999\dots}^k \overbrace{99999\dots}^k \\
 - \quad \overbrace{299\dots}^k \overbrace{99700\dots}^k 0 \\
 \hline
 \overbrace{999\dots}^{k-1} \overbrace{99700\dots}^k 002 \overbrace{99\dots}^k 9
 \end{array}$$

у $(10^{k-1})^3$ 2k-1 гектаров, след-ко у $n = \overline{999\dots 9}$

40000 гектаров, а $y = h^3 - \frac{79999}{80000}$ гектаров

Amben: ~~80000~~ 79999



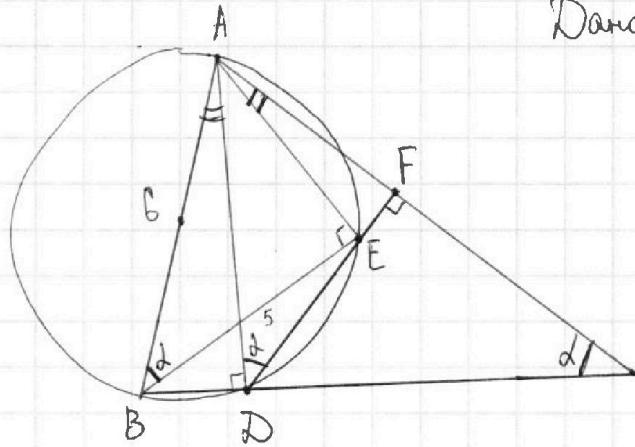
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3



Дано: $\triangle ABC$, окр. с диаметром AB ,

$BC \wedge w = (\square) D$, $DF \perp AC$,

$DF \wedge w = (\square) E$, $AC = 10$,

$AB = 6$, $BE = 5$

Найти: AF

Решение:

1) Проведем AD , BE , AE , м.к. AB -диаметр и $\angle ADB$ и $\angle AEB$ -внешние, то $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

Обозначим $\angle ABE$ за α , тогда $\angle ADE = \alpha$, м.к.

$\angle ABE$ и $\angle ADE$ опир. на $\angle A$, тогда б $\triangle ADF$:

$\angle DAF = 90^\circ - \alpha$, след-но из $\triangle ADC$: $\angle ACD = \alpha$.

$$2) \begin{cases} \angle CAD = \angle FAE + \angle EAD = 90^\circ - \alpha \\ \angle BAE = \angle BAD + \angle EAD = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \angle FAE = \angle BAD$$

Потом $\triangle AFE \sim \triangle ABD$ по 2м умн: $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$

Из $\triangle BAE$: по м. Тиранора $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

$$\text{след-но } \frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Из $\triangle CAD$: $\frac{AD}{AC} = \sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, тогда $AD = \frac{10\sqrt{11}}{6}$

$$AF = \frac{10\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть всего коробок n штук, тогда вероятность, что шток вскрыем: $P_1 = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4} = \frac{3^5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$ (открытие 5 коробок)

А вероятность, что шток вскрыем, открывая 6 коробок $P_2 = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4} \cdot \frac{3}{n-5} = \frac{3^6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$

$$\text{тогда } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{3^6 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}}{\frac{3^5 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}} = \frac{3}{n-5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{n-5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Пусть есть арифметическое прогрессия b_n такая, что корни ур-я $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ - b_5 и b_6 , а корни ур-я $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ - b_3 и b_8

Поэтому, что $b_5 + b_6 = 2b_5 + d = b_3 + b_8$

По т. Виетта: $\begin{cases} b_5 + b_6 = a^2 - a \\ b_3 + b_8 = \frac{a^3 - a^2}{4} \end{cases}$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

Ответ: 0; 1; 4



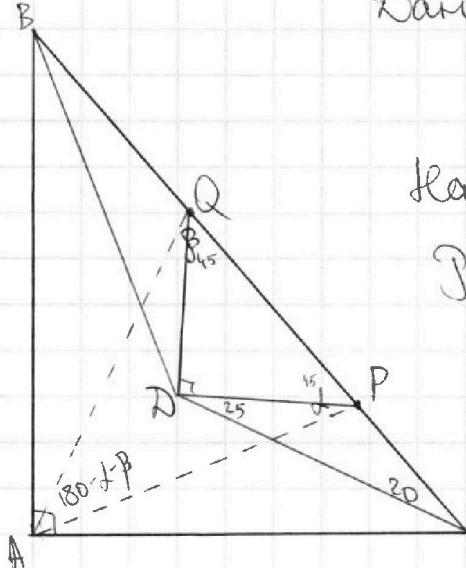
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BP$, $AC = CQ$, $DP = DQ$,
 $\angle PDQ = 90^\circ$, $\angle DCB = 20^\circ$

Найти: $\angle DBC$

Решение:

1) Построим AQ и AP ,
образовавшись при этом $\triangle ABP$ и $\triangle ACQ$,
с обозначениями $\angle BAP = \angle APB = \alpha$ и
 $\angle CAQ = \angle CQA = \beta$, тогда

б) $\triangle QAP$: $\angle QAP = 180 - \alpha - \beta$, б) $\triangle AQD$: $\angle ACD = 180 - 2\beta$,
б) $\triangle ABP$: $\angle ABP = 180 - 2\alpha$, но т.к. $\triangle ABC$ -прямой,
то $\angle ABP + \angle ACB = 90^\circ = 360 - 2\alpha - 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 135$,

а) значит $\angle QAP = 45^\circ$

2) $\angle DQP = \cancel{\angle DPD} \angle DPQ = 45^\circ \Rightarrow \angle DPC = 135$, а значит

б) $\triangle DPC$: $\angle PDC = 25^\circ$

3) $\angle BDC = 135^\circ \Rightarrow \angle DBC = 25^\circ$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a$$

$$x_1 \cdot x_2 = a - 5$$

$$x_{12} = b_5 = b_1 + 4d \quad | \quad x_2 - x_1 = d$$

$$x_{21} = b_6 = b_1 + 5d$$

$$x_1 + x_2 = 2b_1 + 3d = 2b_5 + d = a^2 - a$$

$$9x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x + 2\alpha^4 + 2\alpha^2 - \alpha^6 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{4} = 2b_1 + 9d$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2\alpha^4 + 2\alpha^2 - \alpha^6 - 4}{9}$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= b_3 = b_1 + 2d \\ x_{21} &= b_8 = b_1 + 7d \\ \hline x_1 - x_2 &= 5d \end{aligned}$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a$$

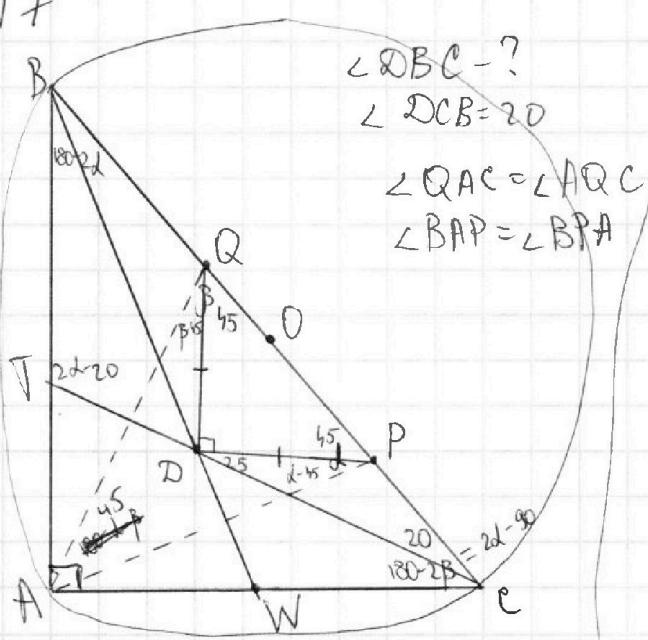
$$a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \alpha=0 & \text{mm} \\ \Delta = -5\alpha + 4 = 0 \\ \Delta = -25 - 16 = 9 \\ \alpha_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \\ \alpha_2 = \frac{5+3}{2} = 4 \end{array}$$

N7



$$1) \text{ wpmu } a < 0: x^2 = 5 \\ x = \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 = 4$$

$$x = \pm 1$$

$$b_5 = -\sqrt{5}$$

$$b_6 = \sqrt{5}$$

$$b_5 = -\sqrt{5}$$

b_g = 15

$$b_3 = -1$$

$$b_{\infty} = 1$$

in коробок

$$\frac{1}{n} = \frac{3}{n} \cdot \frac{3^5}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = P_1$$

$$\text{P}_2 = \frac{3}{h(n) \dots (n-u)(n-5)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{3}{n-5}$$

$$180 - 2\beta = 2d - 90$$

$$2d + 2\beta = 270$$

$$\alpha + \beta = 135$$

$$\angle QAP = 45^\circ$$

$$\angle PDC = 1$$

$$\angle TCA = 2k - 90 - 20 = 2k - 110$$

$$\angle ATC = 90 - 2\alpha + 110 = 200 - 2\alpha$$

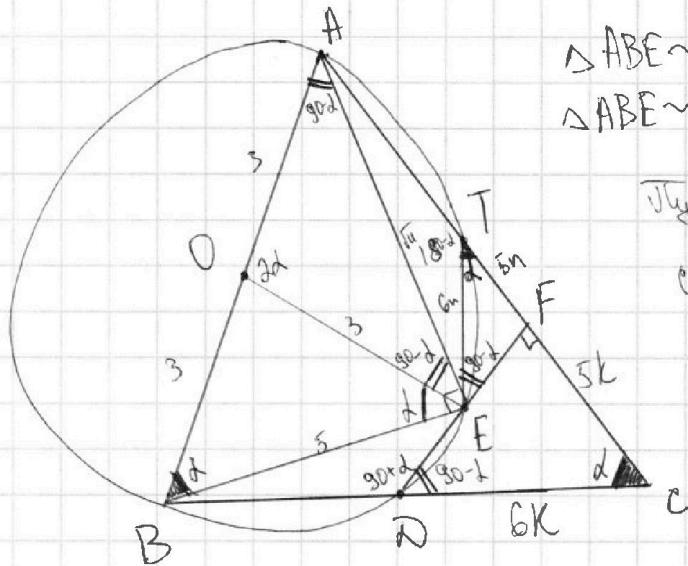
$$\angle BTC = 180 - 200 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \triangle ABE &\sim \triangle TEF : \frac{FE}{AE} = \frac{TE}{AB} \\ \triangle ABE &\sim \triangle DFC : \frac{FC}{BE} = \frac{DF}{AE} \end{aligned}$$

AC = 10
 AB = 6
 BE = 5
 AF = ?

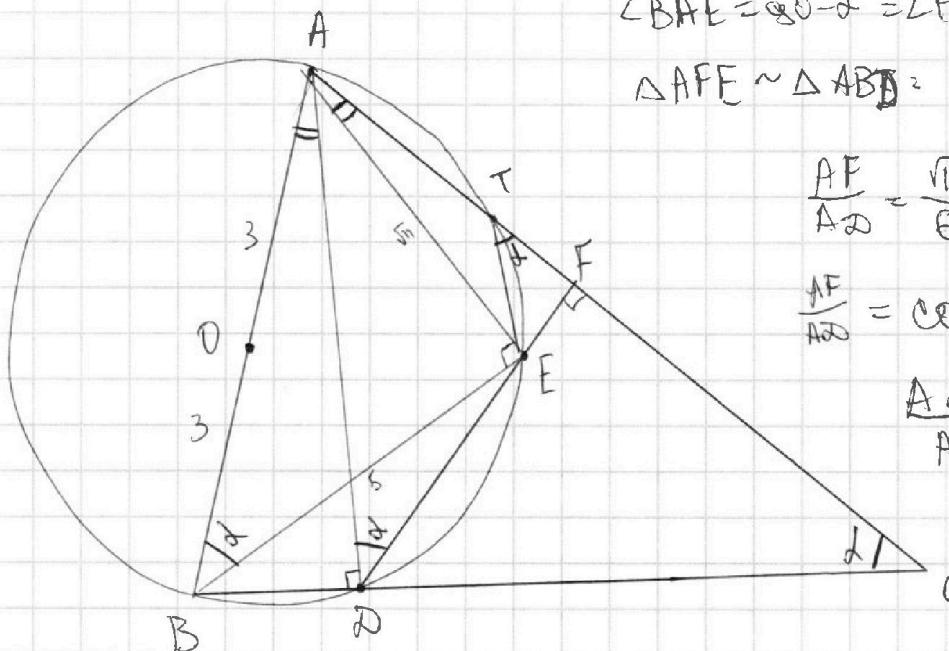
Jtems AF=x, mrga FC=10-x

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\angle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2} = \angle CAF + \varphi$$

$$\angle BAE = 90 - \delta = \angle BAD + \varphi$$

$$\triangle AFE \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$



$$\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{AF}{AD} = \cos(90^\circ - \angle)$$

$$\frac{AD}{AC} = \sin D = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$AD = \frac{10\sqrt{11}}{6} = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

$$\text{magenta } AE = AD \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5 \cdot 11}{18} \frac{\sqrt{11}}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3}$$

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ yz = x(x+3) \\ zx = y(y+3) \end{cases}$$

перемножив, получим

$$x^2y^2z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$\text{тогда } A = \frac{54}{3} = 18$$

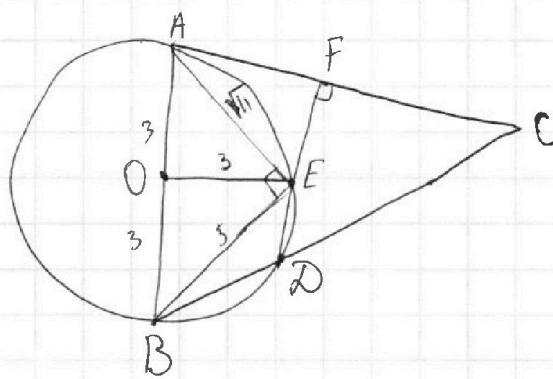
Ответ: 18

№4

Лежат 6 яиц в коробке

вероятно, что выбрали верно $\underline{\text{I}} = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4}$
 $\underline{\text{II}} =$

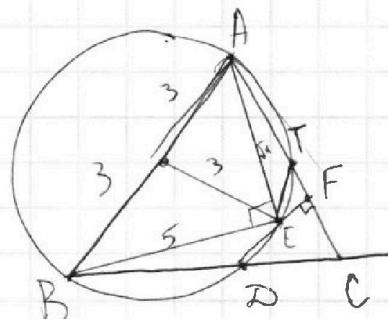
№3



$$\begin{aligned} AC &= 10 \\ AB &= 6 \\ BE &= 5 \end{aligned}$$

$$AF = ?$$

$$AE = \sqrt{36-25} = 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = \underbrace{9999\dots9}_{10000}$$

$$n^3 = ?$$

299 . . . 994 000 . . . 0

$$\begin{array}{r}
 & n-1 & 3n & n \\
 \overbrace{} & & & \overbrace{} \\
 999\ldots999 & \cdots & 999\ldots99999 & \cdots 9 \\
 - & & 299\ldots99700.000 \\
 \hline
 & 9999700 & \cdots & 00299999
 \end{array}$$

zebra beng
3000...
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_{10}$

2^{n-1} gebraucht

Sumo 40000 → cm

w1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$\begin{array}{r} \overset{81}{-} \\ \frac{29}{54} \end{array}$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + \\ + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

11

$$(x+\frac{3}{9})(y+3)(z+3) = xy^2 + 3xy + 3xz + 9x +$$

$$(x+3)(y+3)(z+3) = xyz + 3(x+y+z) - 54$$

$$+3yz + 9y + 9z + 27$$

$$f = \sqrt{x+3}(\sqrt{y+3}\sqrt{z+3}) - x, y, z$$

$$x_1^2 + 3(x_1 + x_2 + x_3) + g(x_1 + x_2)$$

27