



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



- ✓ 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ✓ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- ✓ 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

- 2 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Запомним, что $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27 = \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3}$$

Перемножим 1, 2 и 3 ур-я, получим:

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3), \text{ т.к. } x \neq y \neq z \neq 0, \text{ то}$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3), \text{ следовательно } \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

$$\text{То есть } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Возьмем некоторое число $10^k - 1$, состоящее из k девяток, возведем его в куб и посчитаем кол-во девяток:

$$(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 = 10^{3k} - 1 - 3 \cdot 10^k (10^k - 1)$$

~~3k~~ $10^{3k} - 1$ — число, состоящее из $3k$ девяток
 $10^k - 1$ — число, состоящее из k девяток

$$3 \cdot 10^k (10^k - 1) = \underbrace{299 \dots 9}_{k-1 \text{ шестырок}} \underbrace{700 \dots 00}_{k \text{ шестырок}}$$

тогда $10^{3k} - 1 - 3 \cdot 10^k (10^k - 1)$ будет иметь вид

$$\begin{array}{r} \underbrace{999 \dots 9}_{k \text{ шестырок}} - \underbrace{299 \dots 9}_{k-1 \text{ шестырок}} \underbrace{700 \dots 0}_{k \text{ шестырок}} \\ \hline \underbrace{999 \dots 9}_{k-1 \text{ шестырок}} \underbrace{700 \dots 00}_{k \text{ шестырок}} \underbrace{299 \dots 9}_{k \text{ шестырок}} \end{array}$$

у $(10^k - 1)^3$ $2k-1$ девяток, след-но у $n = \overline{999 \dots 9}$

40000 девяток, а у $n^3 = \overline{79999}$ ~~20000~~ девяток

Ответ: ~~20000~~ 79999

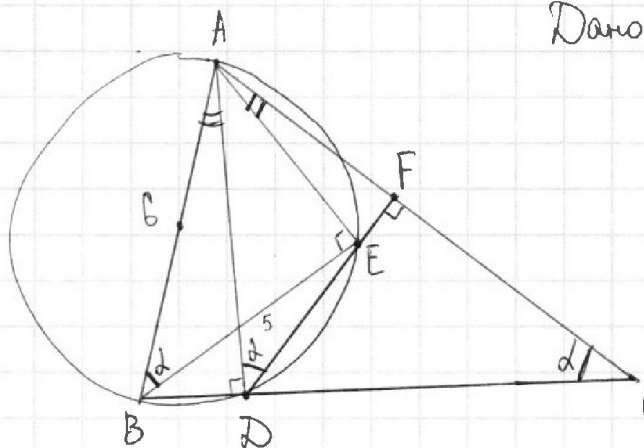


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3



Дано: $\triangle ABC$, окр.^ω с диаметром AB,
 $BC \cap \omega = (D)$, $DF \perp AC$,
 $DF \cap \omega = (E)$, $AC = 10$,
 $AB = 6$, $BE = 5$
 Найти: AF

Решение:

- 1) Проведем AD , BE , AE , т.к. AB - диаметр и $\angle ADB$ и $\angle AEB$ - вписанные, то $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$
 Обозначим $\angle ABE$ за α , тогда $\angle ADE = \alpha$, т.к. $\angle ABE$ и $\angle ADE$ опр. на $\cap AE$, тогда в $\triangle ADF$:
 $\angle AFD = 90^\circ - \alpha$, след-но из $\triangle ADC$: $\angle ACD = \alpha$.

$$2) \begin{cases} \angle CAD = \angle FAE + \angle EAD = 90^\circ - \alpha \\ \angle BAE = \angle BAD + \angle EAD = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \angle FAE = \angle BAD$$

Тогда $\triangle AFE \sim \triangle ABD$ по 2м углам: $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$

Из $\triangle BAE$: по т. Пифагора $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

след-но $\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

Из $\triangle CAD$: $\frac{AD}{AC} = \sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, тогда $AD = \frac{10\sqrt{11}}{6}$

$$AF = \frac{10\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть всего коробок n штук, тогда вероятность, что шрек выберет: $P_1 = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4} = \frac{3^5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
(открывание 5 коробок)

А вероятность, что шрек выберет, открывая 6 коробок: $P_2 = \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4} \cdot \frac{3}{n-5} = \frac{3^6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$

$$\text{тогда } \frac{P_2}{P_1} = \frac{3^6 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3^5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = \frac{3}{n-5}$$

Ответ: $\frac{3}{n-5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Пусть есть арифметическая прогрессия b_n такая,

что корни ур-я $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ — b_5 и b_6 ,

а корни ур-я $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ — b_3 и b_8

Тогда заметим, что $b_5 + b_6 = 2b_5 + d = b_3 + b_8$

Тогда по м. Виета:
$$\begin{cases} b_5 + b_6 = a^2 - a \\ b_3 + b_8 = \frac{a^3 - a^2}{4} \end{cases}$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

Ответ: 0; 1; 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

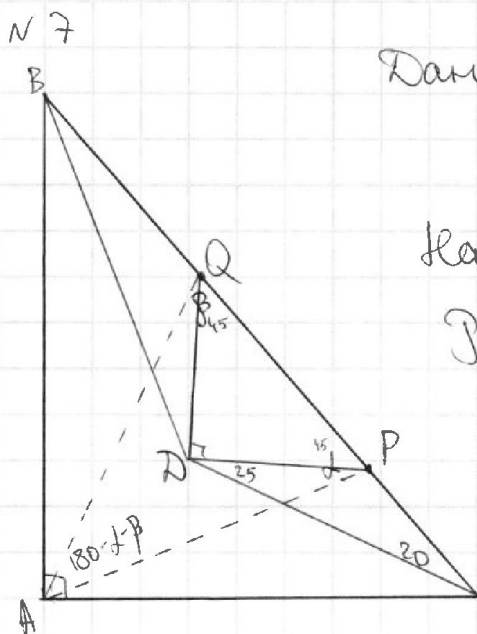
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BP$, $AC=CQ$, $DP=DQ$,
 $\angle PDQ=90^\circ$, $\angle DCB=20^\circ$

Найти: $\angle DBC$

Решение:

1) Построим AQ и AP ,
образованные $\mu\delta$ $\triangle ABP$ и $\triangle ACQ$,
с обозначим $\angle BAP=\angle APB=\alpha$ и
 $\angle CAQ=\angle CQA=\beta$, тогда

в $\triangle QAP$: $\angle QAP=180-\alpha-\beta$, в $\triangle AQC$: $\angle ACQ=180-2\beta$,

в $\triangle ABP$: $\angle ABP=180-2\alpha$, но т.к. $\triangle ABC$ — прямоугольный,
то $\angle ABP+\angle ACB=90^\circ=360-2\alpha-2\beta \Rightarrow \alpha+\beta=135$,

а значит $\angle QAP=45^\circ$

2) $\angle DQP=\angle DPQ=45^\circ \Rightarrow \angle DPC=135$, а значит

в $\triangle DPC$: $\angle PDC=25^\circ$

3) $\angle BDC=135^\circ \Rightarrow \angle DBC=25^\circ$

Ответ: 25°



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a$$

$$x_1 \cdot x_2 = a - 5$$

$$x_{1,2} = b_5 = b_1 \pm 4d \quad | \quad x_2 x_1 = d$$

$$x_{2,1} = b_6 = b_1 + 5d$$

$$x_1 + x_2 = 2b_1 + 9d = 2b_5 + d = a^2 - a$$

$$x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = b_3 = b_1 + 2d$$

$$x_{2,1} = b_8 = b_1 + 7d$$

$$x_1 + x_2 = \frac{a^3 - a^2}{4} = 2b_1 + 9d$$

$$x_1 - x_2 = 5d$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a$$

$$a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{или} \quad a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$a_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$1) \text{ при } a = 0: x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 = 4$$

$$x = \pm 1$$

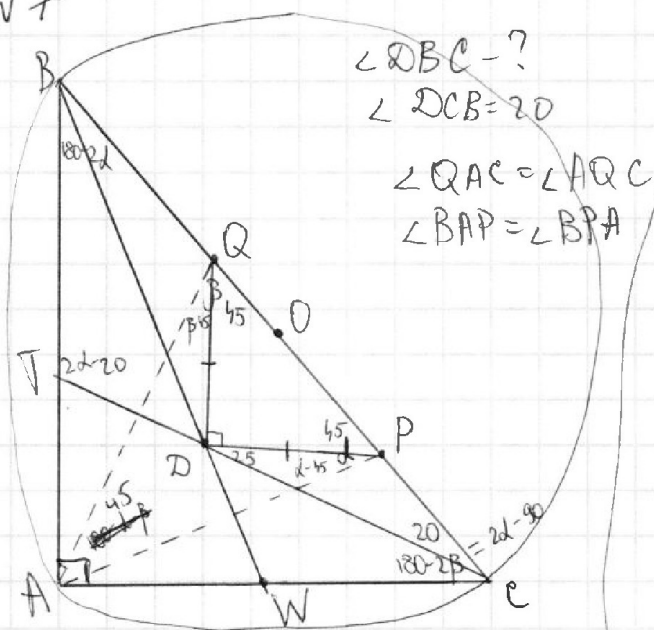
$$b_5 = -\sqrt{5}$$

$$b_6 = \sqrt{5}$$

$$b_3 = -1$$

$$b_8 = 1$$

N7



n кораблей

$$I = \frac{3}{n}$$

$$II = \frac{2}{n-1}$$

$$\frac{3^5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = P_1$$

$$P_2 = \frac{3^6}{n(n-1) \dots (n-4)(n-5)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{3}{n-5}$$

$$180 - 2\beta = 2\alpha - 90$$

$$2\alpha + 2\beta = 270$$

$$\alpha + \beta = 135$$

$$\angle QAP = 45$$

$$\angle PDC = 1$$

$$\angle TCA = 2\alpha - 90 - 20 = 2\alpha - 110$$

$$\angle ATC = 90 - 2\alpha + 110 = 200 - 2\alpha$$

$$\angle BTC = 180 - 200 + 2\alpha = 2\alpha - 20$$

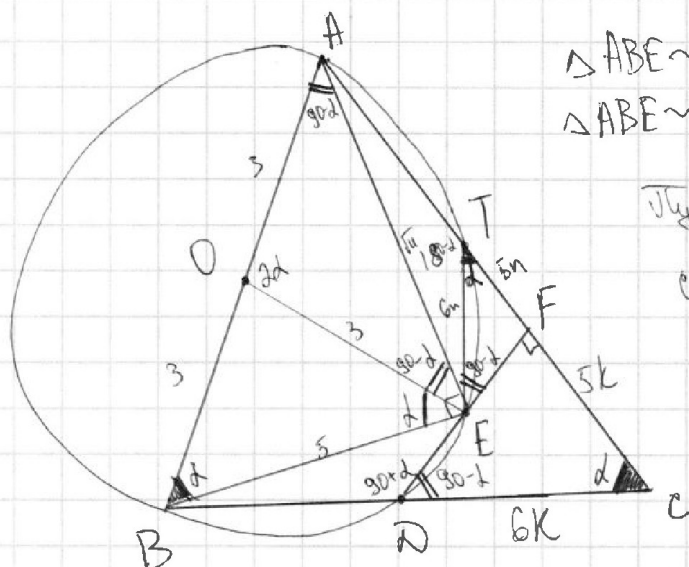


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta ABE \sim \Delta TEF: \frac{FE}{AE} = \frac{TE}{AB}$$

$$\Delta ABE \sim \Delta DFC: \frac{FC}{BE} = \frac{DF}{AE}$$

Пусть $AF = x$, тогда $FC = 10 - x$

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\angle CAD = 90 - \alpha = \angle CAE + \gamma$$

$$\angle BAE = 90 - \alpha = \angle BAD + \gamma$$

$$\Delta AFE \sim \Delta ABD: \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

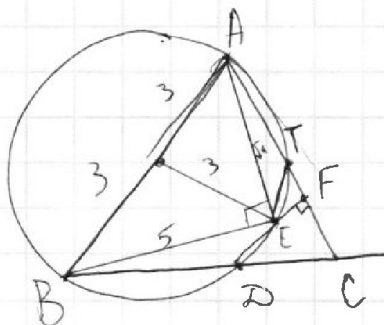
$$\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{AF}{AD} = \cos(90 - \alpha)$$

$$\frac{AD}{AC} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AD = \frac{10\sqrt{11}}{6} = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

тогда $AF = AD \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{5 \cdot 11 \cdot \sqrt{11}}{18} = \frac{55\sqrt{11}}{18}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = \overbrace{9999 \dots 9}^{40000}$$

$$n^3 = ?$$

$$n = \overline{\dots 9}$$

$$n^3 = (\dots 10 + 9)^3 = \dots + 9^3 = \dots + 729$$

$$3 \cdot 10^{2k} - 3 \cdot 10^k =$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$= 30000 \dots 00$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 980100 \\ \times 99 \\ \hline 980100 \\ 980100 \\ \hline 980100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9800100 \\ - 98001 \\ \hline 9702099 \end{array}$$

3 цифр

или 10^3 делителей

$$(10^n - 1)^3 = (10^n - 1)(10^n - 1)(10^n - 1) =$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

Всего 40000

2n-1 делителя

это

$$79999$$

← Ответ

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$$A = xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27$$

$$(x+3)(y+3)(z+3) = xyz + 3xy + 3xz + 3yz + 9x + 9y + 9z + 27$$

$$(x+3)(y+3)(z+3) = xyz + 3A - 54$$

$$A = \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3}$$

$$xyz + 3(xy + xz + yz) + 9(x+y+z) + 27$$

$$A = \frac{(x+3)(y+3)(z+3) - xyz + 54}{3}$$