



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ xz = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0$$

н.к. границы формулы решения,
но в которой уравнения решены
на формулы ≥ 0

$$\begin{cases} x+3 = \frac{yz}{x} \\ y+3 = \frac{xz}{y} \\ z+3 = \frac{xy}{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9+4xy \geq 0 \\ 9+4yz \geq 0 \\ 9+4xz \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \geq -\frac{9}{4} \\ yz \geq -\frac{9}{4} \\ xz \geq -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} = \\ &= \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2} \geq \frac{(\frac{9}{4})^3 \cdot 3}{(\frac{9}{4})^3} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

но пер. крими:

~~$$\sqrt[3]{\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{(\frac{9}{4})^3 \cdot 3}{(\frac{9}{4})^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$$~~

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}} &\geq \sqrt[3]{\frac{(\frac{9}{4})^3 \cdot 3}{(\frac{9}{4})^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{4} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4} \end{aligned}$$

Значит $S = \frac{27}{4}$
Ответ $S = \frac{27}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{м. к. } \angle DFC - \text{прямой, но } CF = CD \cdot \sin \alpha = \frac{25}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{18}$$
$$AF = AC - FC = 10 - \frac{125}{18} = \frac{180 - 125}{18} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ. } AF = \frac{55}{18}$$

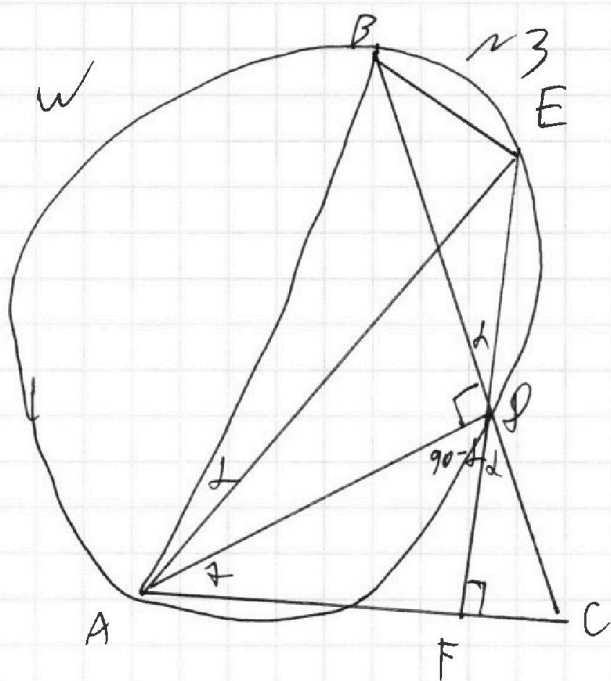


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: ~~AB=6~~
 $AC=10$ $DF \perp AC$

$AB=6$

$BE=5$,

$AB=2R$

Найти: AF ?

Пусть $\angle FDC = \alpha$, тогда $\angle BDE = \alpha$ (вертикальные)

Правильно AE, тогда $\angle BAE = \angle BDE = \alpha$ (н.к. опираются на одну и ту же дугу)

н.к. AB - диаметр, но $2R=6$, $R=3$

~~н.к.~~ $\triangle BED$ вписан в $\odot \Rightarrow$ н.к. хорд:

$$3 = \frac{BE}{2 \sin \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{5}{6}$$

н.к. AB - диаметр, но $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADF = 90^\circ - \alpha$ и н.к. $\angle AFD = 90^\circ$, но $\angle DFE = \alpha$.

н.к. $\angle ADF$ - острый, но $CD = AC \cdot \sin \alpha = \frac{10 \cdot 5}{6} = \frac{25}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24

Пусть всего n кораблей, тогда выбрать 5 можно

C_n^5 способами

~~Сколько~~ Наберём сколько комбинаций с кораблями с иждивением. ~~В~~ Корабль с иждивением равно 3, тогда тогда нужно выбрать ещё 2 из оставшихся, а это C_{n-3}^2 способов.

Тогда вероятность равно:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 120}{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

Ещё можно выбрать 6 кораблей:

Всего комбинаций:

C_n^6

с вероятностью:

C_{n-3}^3

вероятность: $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 120}{6 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} = \frac{120}{n(n-1)(n-2)}$

Заметим, что это в 2 раза больше, чем известная вероятность.

Ответ. В 2 раза увеличится



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a=1$

$$(1) x^2 - 4 = 0$$

$$(2) 4x^2 - 1 = 0$$

имеет различные корни $\Rightarrow \neq 0$

при $a=4$

$$(1) x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$(2) 4x^2 - 48x + 512 + 32 - 4096 - 4 = 0$$

~~$$(1) x^2 - 12x - 1 = 0$$~~

$$(2) x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

$$(2) x^2 - 12x - 889 = 0$$

оба уравнения имеют положительный дискриминант и совершил члены разложил $\Rightarrow$ 4
корня будут положительными $\Rightarrow \neq 0$

Решен. $a=0, a=1, a=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^3 - a)x + a - 5 = 0 \quad (1) \quad \{b_i\} - \text{выбор. корни}$$

$$x_1, x_2 = b_5, b_6 \quad \neq 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad (2)$$

$$x_3, x_4 = b_3, b_8$$

по н. Виета для (1)

по н. Виета для (2)

$$x_1 + x_2 = a^3 - a$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$b_5 + b_6 = a^3 - a$$

$$b_3 + b_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$2b_1 + 9 \neq a^3 - a$$

$$2b_1 + 9 \neq \frac{a^3 - a^2}{4}$$

Значит

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^3 - a$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a = 0$$

$$a = 4$$

$$a = 1$$

$$\text{при } a = 0$$

$$(1) \quad x^2 - 5 = 0$$

$$(2) \quad 4x^2 - 4 = 0$$

мелко разбитые корни $\Rightarrow \neq 0$

~~при a = 1~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

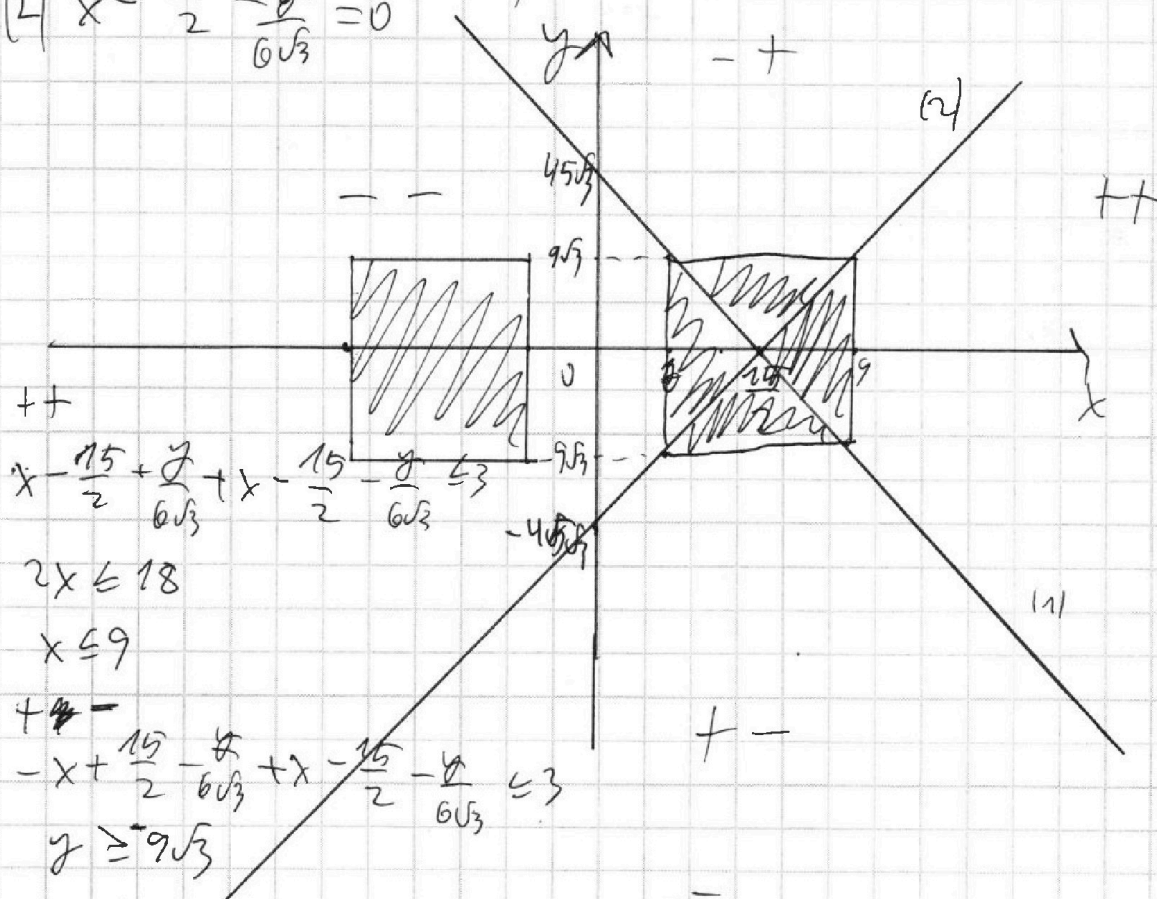
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

126
Ур: $|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}| + |x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}| \leq 3$

Построим Ур:

(1) $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$, (1) $y = 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$

(2) $x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$, (2) $y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$



(1) и (2) — уравнения
Восставим граничные уравнения и найдем
их пересечение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$R_1 = \sqrt{81 + 81 \cdot 3} = 2 \cdot 9 = 18$$

$$R_2 = \sqrt{30 + 81 \cdot 3} = 3\sqrt{4 + 21} = 3\sqrt{25}$$

$$r = 6$$

$$S_1 = 18^2 \pi - \frac{1}{2} R_1^2 + R_1^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{2}$$

~~$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{18}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$~~

~~$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}}$$~~

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$S_1 = 18^2 \pi - \frac{\pi \cdot 18^2}{6} + \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = \frac{d \cdot R_2^2}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot 9 \cdot 31 = \frac{93\pi}{2}$$

$$S_3 = 36\pi - \frac{\pi \cdot 36}{2} = 36\pi - 6\pi = 30\pi$$

$$S = 324\pi - 54\pi + 81\sqrt{3} - \frac{93\pi}{2} - 30\pi = \frac{387\pi}{2} + 81\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ. } S = \frac{387\pi}{2} + 81\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $PQ = PP = \sqrt{\frac{4V^2}{2}} = V\sqrt{2}$, $\angle QPC = \angle BQD = 135^\circ$,
Мм $\angle PDC = 25^\circ$.

по м. синусов для $\triangle PDC$:

$$\frac{PC}{\sin 25^\circ} = \frac{PD}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{a-2V}{\sin 25^\circ} = \frac{V\sqrt{2}}{\sin 20^\circ}, \quad b = \frac{V\sqrt{2} \cdot \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} + 2V$$

и.к. $c = a + b - 2V$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 4V^2 - 4aV - 4bV + 2aV$$

$$a = \frac{2V^2 - 2bV}{2V - b} = \frac{2V^2 - \frac{2V^2 \sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} - 4V^2}{2V - 2V - \frac{V\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}}$$

$$= \frac{2V + \frac{2V\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}}{\frac{V\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}} = \frac{V\sqrt{2} \sin 20^\circ + 2V \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}$$

$$= \frac{V\sqrt{2} \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} + 2V$$

$$BQ = a - 2V = \frac{V\sqrt{2} \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ}$$

по м. $\angle BQD = 45^\circ$

по м. $\angle BQD = 45^\circ$

по м. синусов для $\triangle BQD$:

$$\frac{V\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{BQ \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \sin 45^\circ + 1}$$

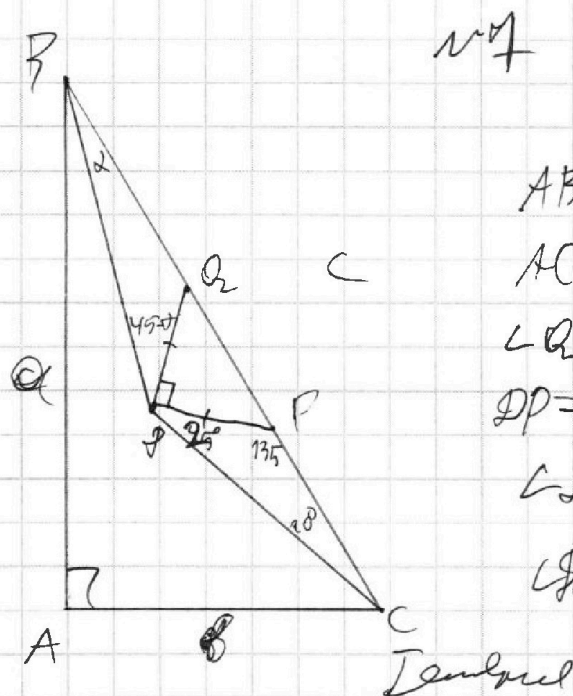


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$\angle RQP = 90^\circ$$

$$DP = PQ$$

$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$\angle BPC = ?$$

В треугольнике между B и P, угол должен быть

$$BP + CQ \angle BC$$

$$AB + AC \angle BC - \text{увеличение периметра}$$

$$AB = a$$

$$AC = b,$$

$$BC = c$$

п.к. $\triangle ABC$ - треугольник, то $c = a + b - 2r$, где r - радиус вписанной окружности

$$a + b - PQ = c = a + b - 2r$$

$$PQ = 2r$$

п.к. $\triangle PQR$ - равнобедренный треугольник. $\Rightarrow \angle RPQ = \angle RQP = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha + \sin 20^\circ = \sin 25^\circ \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)$$

$$\sin \alpha + \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ} \right)$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 25^\circ} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

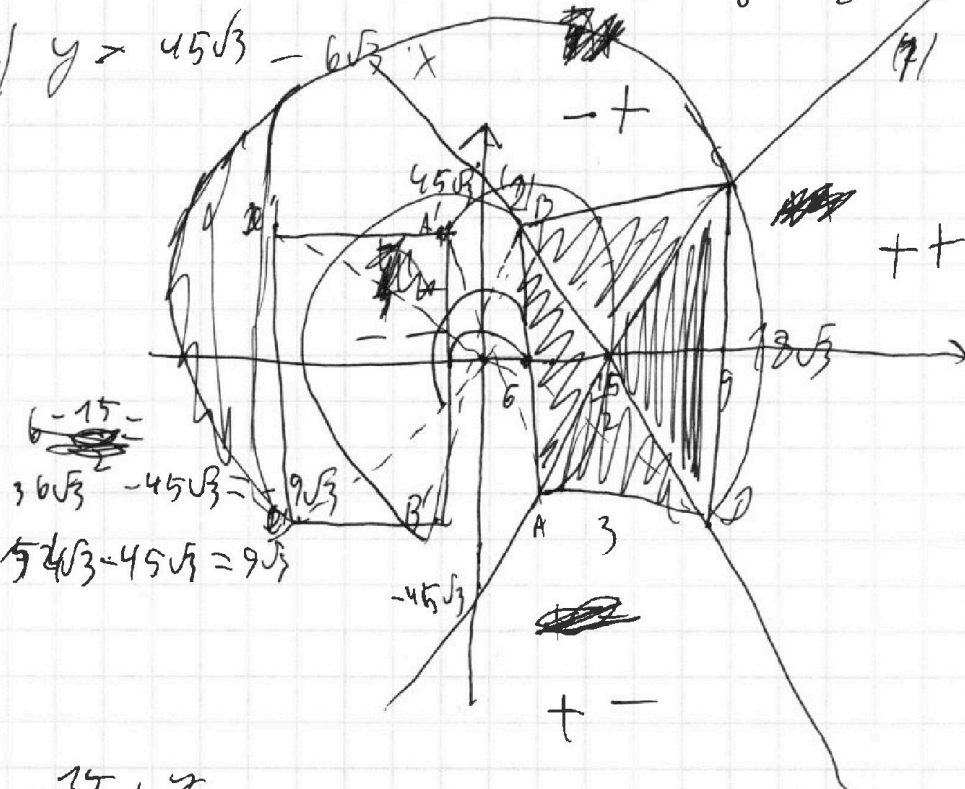
$$(2) x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$(1) y = x \cdot 6\sqrt{3} - 45\sqrt{3}$$

$$(2) y = 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \cdot x$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$



$$3 \cdot 6\sqrt{3} - 45\sqrt{3} = -9\sqrt{3}$$

$$5 \cdot 45\sqrt{3} - 45\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

++

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$x \leq 9$$

$$-x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$\frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

--

$$-x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 7$$

$$15 - 2x \leq 3$$

$$x \geq 6$$

$$\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + x^4 z^4}{x y \cdot y z \cdot x z} \geq$$

$$\leq \frac{3 \sqrt[3]{x^8 y^8 z^8}}{x^2 y^2 z^2} = 3 \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{40}} = \frac{81 \cdot 3}{16}$$

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4}{9^3} = \frac{3 \cdot 9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\leq 3 \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{3^9}{2^6}} = 3 \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 3^3}{2^2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 9}{4}} = 3 \sqrt[3]{\frac{243}{4}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^3 - a)x + a - 5 = 0$$

$$x_1, x_2 = 0, 6$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 70^2 - 0^6 - 4 = 0$$

$$x_3, x_4 = 0, 6$$

$$2a + 9d = a^3 - a$$

$$2a + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 5 = 0 \\ 4x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$729$$

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2) + 6(x+y+z)$$

$$99^2 = 90^2 + 90 \cdot 9 \cdot 2 + 81 = 8100 + 360 + 81 = 8541$$

$$9^3 = 729$$

$$8541 \cdot 99 = (85410 - 8541) \cdot 10 +$$

$$85410 - 8541 =$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a = 0$$

$$a = 1$$

$$a = 4$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 768690 \\ + 76869 \\ \hline 845559 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) + 27 =$$

$$= \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} + 3(x+y+z) + 27$$

$$a = 4$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 1 = 0 \\ 11x^2 - 40x + 572 + 32 - 4 - 4096 \end{cases}$$

$$xy + yz + xz = \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99999 \dots 9}_{40000} = 9 \cdot \underbrace{11111 \dots 1}_{40000}$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (x; 3) & \bar{a}_1 &= (x; x) \\ \bar{b} &= (y; 3) & \bar{b}_1 &= (y; y) \\ \bar{c} &= (z; 3) & \bar{c}_1 &= (z; z) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ xz = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x + 3 = \frac{y^2}{x}$$

$$y + 3 = \frac{x^2}{y}$$

$$z + 3 = \frac{y^2}{z}$$

$$\begin{aligned} |x+3|^2 + |y+3|^2 + |z+3|^2 &= \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 \\ &= xy + yz + xz + 3x + 3y + 3z + 27 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^4 y^4 z^4}{x^2 y^2 z^2}} =$$

$$= \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + x^4 z^4}{x^2 y^2 z^2} = 3 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= -3 \\ -\frac{9}{2} + \frac{9}{4} &= \boxed{-\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{1 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{6 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)} =$$

$$= \frac{120}{4(n-1)(n-2)}$$

$$n^3 = 243 \cdot (11111 \dots 11)^3$$

$$11^3 = 121 \cdot 11 = 1210 + 121 = 1331$$

$$11^4 = 1331 \cdot 11 = 13310 + 1331 = 14641$$

$$11^5 = 146410 + 14641 = 161051$$

n - черновик
 C_n^5
2 прога
 C_{n-3}^2

$$\begin{aligned} \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} &= \frac{(n-3) \cdot (n-4) \cdot 120}{2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} = \\ &= \frac{60}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

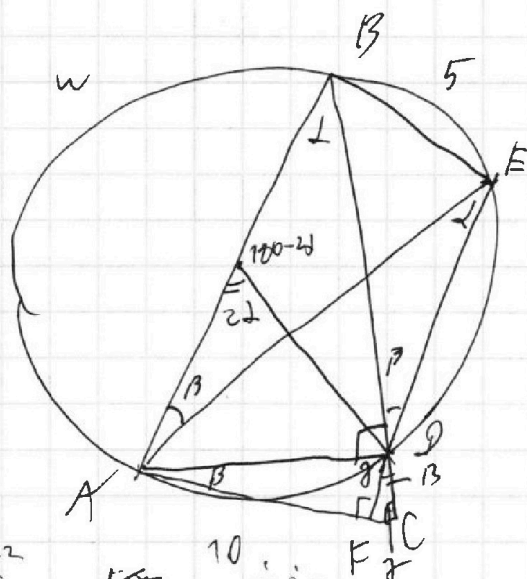
5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AC \perp EF$

$$AC = 10$$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$

$$R = 3$$

$$AF = ?$$

$$\frac{1}{2} = \frac{S}{2R \sin \alpha}$$

$$S = \frac{d \cdot h}{2}$$

$$OD = \frac{10 \cdot 4}{6} = \frac{25}{3}$$

$$AF = 10 - FC$$

$$18^2 = 100 + 10 \cdot 2 \cdot 8 + 64 = 324$$

$$-160 + 100 =$$

$$FC = OD \cdot \tan \beta = \frac{125\sqrt{11}}{3 \cdot 3}$$

~~SIN~~

$$3 = \frac{5}{25 \sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{5}{6}$$

$AD \perp BC$

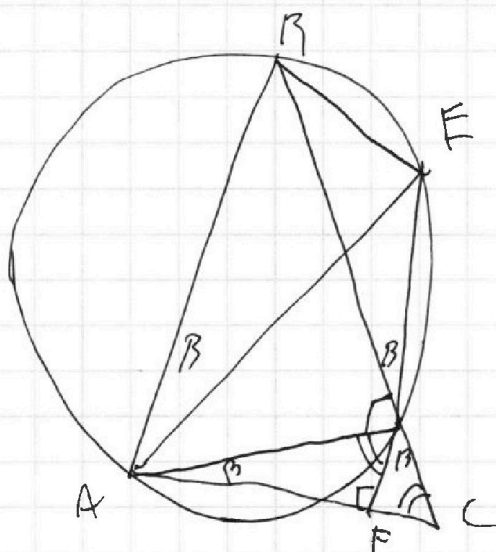
$$1 + \cos^2 \beta = \frac{36}{25}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{36 - 25}{25} = \frac{11}{25}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{5\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2}}{2}$$

$$x + 3 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2}}{2}$$



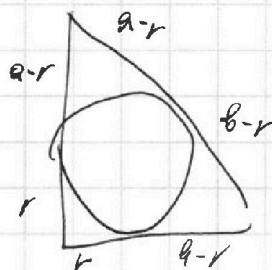
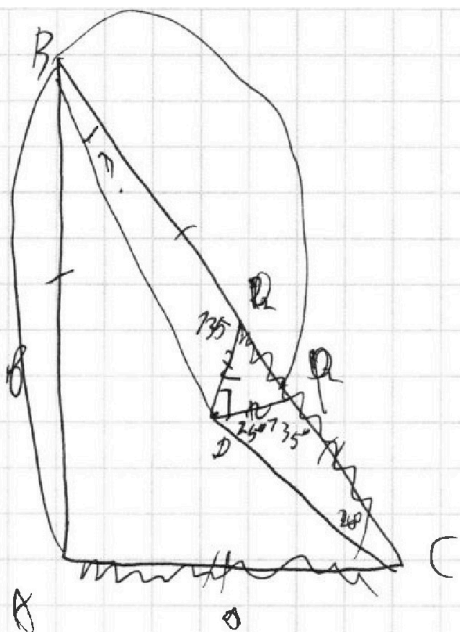


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 1024 \\ - 135 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$c = a + b - 2r$$

$$PQ = 2r$$

$$PQ = \sqrt{\frac{4r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$$

$$CP = a - 2r$$

$$BQ = b - 2r$$

$$\frac{a - 2r}{\sin 25^\circ} = \frac{r\sqrt{2}}{\sin 20^\circ}$$

$$a = \frac{r\sqrt{2} \cdot \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} + 2r$$

$$\frac{r\sqrt{2} \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} + 2r$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 4r^2 - 4ar - 4br + 20r$$

$$2r^2 + ab = 2ar + 2br$$

$$b = \frac{2r^2 - 2ar}{2r - a} = \frac{2r^2 - 4r^2 - \frac{2r^2\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}}{\frac{4r - r\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}} =$$

$$= \frac{2r + \frac{2r\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}}{\frac{\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}} = \frac{2r\sin 20^\circ + 2r\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{r\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b \sin 45^\circ = r\sqrt{2} \sin 45^\circ - 2r = r\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ \right) = r \cos 45^\circ - r \sin 45^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{2}\sin 42^\circ + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sin 42^\circ}{\sin 25^\circ} \cdot \sin 42^\circ = \sqrt{2}\sin 42^\circ - \sqrt{2}\sin 42^\circ$$

~~3\sin 42^\circ =~~

$$3\sin 42^\circ + \frac{\sqrt{2}\sin 42^\circ \cdot \sin 42^\circ}{\sin 25^\circ} = \cos 2^\circ$$

$$\begin{aligned}\sin 25^\circ &= \sin(45^\circ - 20^\circ) = \\ &= \sin(90^\circ - 20^\circ - 45^\circ) = \cos(20^\circ + 45^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 20^\circ\end{aligned}$$

$$\text{tg} \left(3 + \frac{\sqrt{2}\sin 42^\circ}{\sin 25^\circ} \right) = 7$$

$$\text{tg} \left(3 + \frac{\sqrt{2}\sin 42^\circ}{\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{2}}} \right) = 7$$

$$\begin{cases} 7 + 4xy \geq 0 & xy \geq -\frac{7}{4} \\ 7 + 4yz \geq 0 & yz \geq -\frac{7}{4} \\ 7 + 4xz \geq 0 & xz \geq -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{tg} \frac{3\cos 20^\circ - 3\sin 42^\circ + 2\sin 42^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 42^\circ} = \frac{3\cos 20^\circ - \sin 42^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 42^\circ} = 1 + \frac{2\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 42^\circ}$$

$$= 1 + \frac{2\cos 20^\circ}{\sin 25^\circ}$$

$$b = \frac{\sqrt{2} - 0 - 0}{2\sqrt{2} - 0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$xy = 7xz + z^2$$

$$x + 3 = \frac{xy}{x}$$

$$y + 3 = \frac{yz}{y}$$

$$z + 3 = \frac{xz}{z}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 =$$

$$\begin{aligned}&= xy + yz + xz + 3(x + 3) + 3(y + 3) + 3(z + 3) = \frac{xy}{x} + yz + xz + \\ &+ 3\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}\right) \quad x(x - y) + 3(y(y - z) + z(z - x)) = 0\end{aligned}$$

$$xy + yz + xz = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x(x - y) + y(y - z) + z(z - x) + 3(xy + yz + xz) = 0$$