



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы рассматриваем  $x, y, z \neq 0$

$$xy = 4z + z^2; \quad yz = 4x + x^2$$

$$y(x-z) = 4(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$(z-x)(4+x+y+z) = 0$$

мы можем сделать для всех пар уравнений

$$(x-y)(4+x+y+z) = 0$$

замечим что если  $(y-z)(4+x+y+z) = 0$ ,  $x, y, z$  одновременно не равны друг другу, то одна из скобок

будет  $x-y$  - будет не равной нулю поэтому  
①  $x+y+z = -4$  или  $x=y=z$  (могут быть одновременно)

если  $x=y=z$  то:  $x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow x=0$  Не подходит.

$$② x+y+z = -4$$

$$z = -4 - x - y; \quad xy = (x+y+4)(x+y) \Rightarrow$$

$$xy = x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2xy \Rightarrow 0 = (x+y)^2 + 4(x+y) - xy$$

$$x+y=t; \quad t^2 + 4t - (4z + z^2); \quad 16 + 4(4z + z^2) = 0$$

$$16 + 16z + 4z^2 = (2z+4)^2; \quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{2z+4}}{2}$$

$$① \frac{-4 + \sqrt{2z+4}}{2} = t$$

$$z = -4 - z$$

$$2z = -4$$

$$z = -2$$

$$② \frac{-4 - \sqrt{2z+4}}{2} = t$$

$$4 - z = z$$

сумма корней -4 один корень -2 значит другой тоже -2

$$-4 - z = -2$$

$$z = -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$z = -2$$

$$x + y + z = -4$$

$$x + y = -2$$

$$x = -2 - y$$

$$\begin{aligned} 2y &= x(x+y) \\ (2-y)(2-y) + 2y &= 0 \\ 4 - 4y + y^2 + 2y &= 0 \\ y^2 - 2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2y = (-2-y)(2-y) = (2+y)(y-2)$$

$$y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$① y_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5} - 1$$

$$② y_2 = -1 - \sqrt{5}$$

$$① x = -1 - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} (-3 - \sqrt{5})^2 + (-3 + \sqrt{5})^2 + (-2)^2 &= \\ = 9 + 5 + 9 + 5 + 4 &= \\ = 32 \end{aligned}$$

это симметричная  
система в базисе

Ответ: 32.

верно  
на  
решит  
 $x, y, z$

$$① x = 1 + \sqrt{5}$$

подставим  $x, y$  и  $z$  в  $6xy = 4z + z^2$

$$-(7 + 2\sqrt{5}) = -8 + 4 - \text{неправда.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☒6  
☐7  
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 2(x - x_3)(x - x_4)$$

Всего четыре корня:  $x_1 = b + 3k$ ,  $x_2 = b + 4k$

$$x_3 = b + k; \quad x_4 = b + 6k.$$

то есть  $b$  - первый член прогрессии,  $k$  - её шаг.

$$x_1 + x_2 = a^2 - a; \quad x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$x_1 + x_2 = b + 7k = x_3 + x_4$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

если  $a \neq 0$ ,

$$a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Заметим корни 1 и 2.

при  $a = 0$   
 $x^2 - \frac{2}{3} = 0$  - имеет  
 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$  корней

при  $a = 1$   
 $x^2 + \frac{1}{3} = 0$  - имеет  
 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}$  корней

при  $a = 2$   
 $x^2 - 2x - 2 = 0$   
 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ .

если  $a \neq 0, 1, 2$   
 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$x_3$  и  $x_4$  - не 0  
 не взаимно обратны

$$2x^2 - 4x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$\frac{-4}{2} = -x_3 + x_4$$

тогда  $x_1 = 2\sqrt{3}$ , а  $x_2 = 1 - \sqrt{3}$   
 пример.

Ответ:  $a = 2$

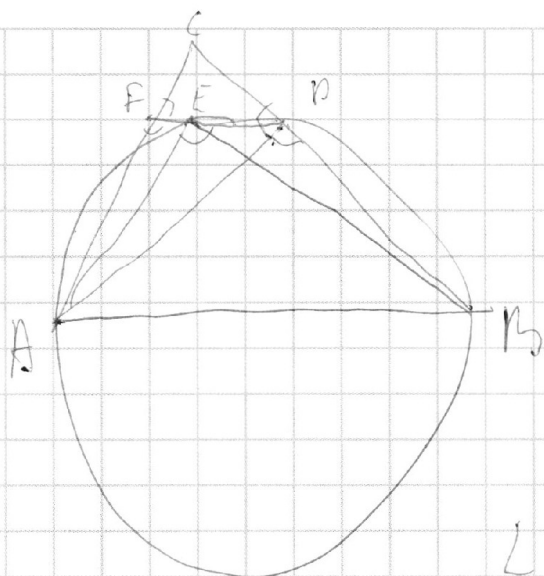


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20, AB = 15, AE = 10$$

$$\angle FAD = 90^\circ - \angle FDA$$

$$\angle FDA = \angle EBA$$

по углов вписанности ENBA

$$\angle EAM = 90^\circ - \angle EBA$$

$$\angle FAD = \angle EAM = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{EB}{AB}, \quad \sin \alpha = \frac{CN}{AC}$$

$$\frac{CN}{AC} = \frac{EB}{AB} \Rightarrow CN = \frac{AC \cdot EB}{AB} = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$$

$$AD = \sqrt{400 - \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 400}{9}} = \frac{20}{3} \sqrt{5}$$

$$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5} \cdot 5}{3 \cdot \frac{20}{3} \sqrt{5}} = \frac{AE}{AD}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{100}{3} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{100}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В этой игре количество способов выбрать 5 коробок это  $C_n^5$ , где  $n$  - кол-во коробок.

выигрывают в случаях  $C_3^3 \cdot C_{n-3}^2 = C_{n-3}^2$

выигрывают с маном:  $\frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!}$

$$= \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

в случае с нашим игроком.

кол-во способов:  $C_n^8$ , а выигрывают только:

$C_3^3 \cdot C_{n-3}^5$  манс выигрывает:

$$\frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!} \cdot \frac{8! \cdot (n-8)!}{n!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$

увеличился манс:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \cdot 10} = 5,6$$

Ответ: 5,6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

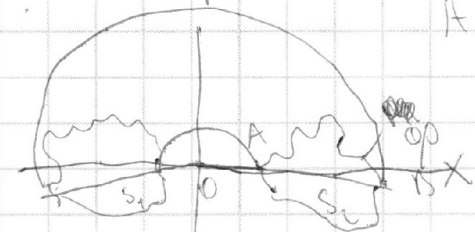
1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐

СТРАНИЦА

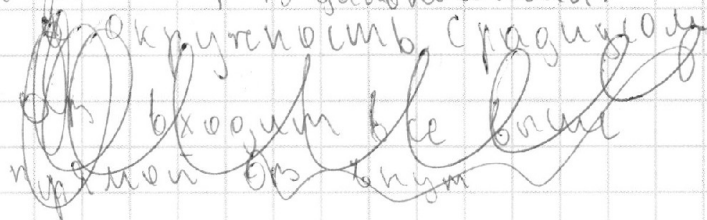
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что площадь будет равна половине площадей  $\odot$  круга около ближайшей точки  $\odot$  минус площадь круга около ближайшей точки от поворота фигуры и еще плюс площадь этой фигуры.



Наиближайшей, в данной точке.



В точку M входят все точки выше прямой OA и входящие в окружность с радиусом OA и с центром в O точке. а оставшаяся часть выше дает площадь фигуры  $\odot$ .

$$\textcircled{a} \text{ при } y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$2y - 30 \leq 6$$

$$y - 15 \leq 3, \text{ - прямая.}$$

$$y \leq 18$$

$$y > 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$x < 36\sqrt{3}$$

$\textcircled{a}$  при  $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$   
симметрично  $\textcircled{a}$   
относительно  
Y оси координат

$$\frac{1x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 3$$

$$x \leq 9\sqrt{3}$$

$$y > 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}; y < 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\textcircled{b} \text{ при } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $AB = AC$ , то  $BM$  лежит на медиане  
 $AM$ . Также  $\triangle ABM$  - симметричен,  $\triangle AMC$   
а значит,  $\angle AMB = 35^\circ$ .

---



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 - (z+x)^2$$

$$x^2 + 4x + 16 + y^2 + 4y + 16 + z^2 + 4z - 16 = ?$$

$$z^2 = 4y(y+4)$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y + z^2 + 4z = xy + yz + zx$$

$$yz = z(y+4)$$

$$x^2 + 4x - x(y+z) + z^2 + y^2 + 4y + 4z - yz$$

$$(4-y-z)^2 - 4z^2 - 4y^2 - 4y - 4z + 4yz \geq 0$$

$$64 - 8y - 8z + 4y^2 + 4z^2 - 4yz - 4y - 4z + 4yz \geq 0$$

$$x^2 + 4z - xy = 0$$

$$16 + 4xy \geq 0$$

$$xy \geq -4$$

$$xy \leq 4$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$yz \leq 4$$

$$zx \leq 4$$

$$0 = 4(4-x)(4-y)$$

$$x \cdot (x+4) + 4(x+4) + y(y+4) + 4(y+4) + z(z+4) + 4(z+4)$$

$$yz + 4x + 16 + xy + zx + 4y + 16 + 4z + 16 = ?$$

$$-x^2 + 2yz - y^2 + 2zx - z^2 + 2xy$$

$$0 = 12 + x + y + z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4x + y = xy + yz + zx$$

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

$$x > 0, y > 0, z < 0$$

$$x > 0, y > 0, z$$

$$zy = 4y + z^2$$

$$zy$$

$$yz = 4x + x^2$$

$$4y + y^2 =$$

$$x_2 = b + 3k, x_1 = b + k, x_4 = b + 6k$$

$$a^3 - a^2 = a^2 - a$$

$$2x_3 + 2x_4 = a^3 - a^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 2 - 8 - 4 = 0$$

$$-2y = 10x(4+x)$$

$$x^2 - 1 = 4 - 2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 4 - 2 = 0$$

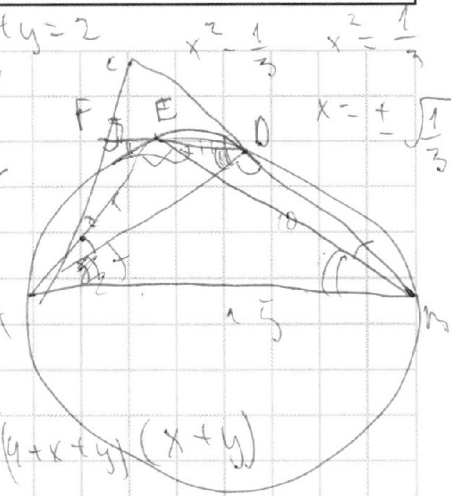
$$\frac{CN}{CF} = \frac{AD}{FD} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{15}{10}$$

$$x^2 - 1 = 4 - 2 = 0$$

$$\frac{CN}{CF} = \frac{AD}{FD} = \frac{AC}{CD}$$

$$15$$



$$\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{CN}{FD}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AC}$$

$C_n^5$  - количество вар.

$$xy = (4+x+y)(x+y)$$

$$C_n^1 \cdot C_{n-3}^4 + C_n^2 \cdot C_{n-3}^3 + C_n^3 \cdot C_{n-3}^2 + C_n^4 \cdot C_{n-3}^1 - \text{хорошие.}$$

$$(n-3)! \cdot x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z$$

$$xy = 4x + 4y + x^2 + xy + y^2 + 4z$$

$$n! \cdot (n-7)! \cdot 3! \cdot (n-6)! \cdot T$$

$$\frac{(n-3)! \cdot x^2 + y^2 + xy + 4(x+y)}{2! \cdot (n-5)!} \cdot (x+y)^2 + 4(x+y) + xy$$

$$x^2 - 2x - 2$$

$$\sin 2\alpha$$

$$z = -y - x - 4$$

$$- \text{вер. 1}$$

$$\sin(\alpha + \pi) =$$

$$\frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle AFB} = 2R$$

$$\sin 2\alpha = 2(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$x^2 - 2x - 16 \cdot 4 =$$

Впр хороша

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9$$

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin \alpha \cos \pi$$

$$\sin \pi \cos \alpha$$

$$\frac{(n-3)!}{8! \cdot (n-10)!} + \frac{3(n-3)!}{8! \cdot (n-9)!} + \frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}$$

$$\frac{(n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}$$

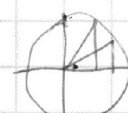
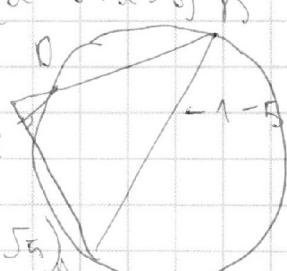
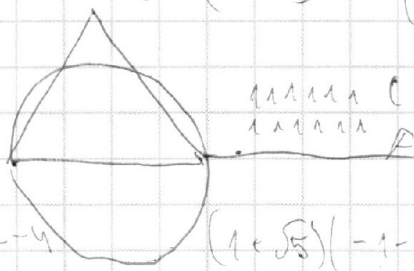
$$x+y = \frac{z}{2}$$

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} =$$

$$\frac{(n-3)!}{8! \cdot (n-11)!} - (2+5+2\sqrt{5})R$$

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{2} \quad x+y = \frac{-4 \pm (2+4)}{2}$$

$$\frac{(n-3)!}{9! \cdot (n-7)!} + \frac{3 \cdot (n-3)!}{5! \cdot (n-8)!}$$



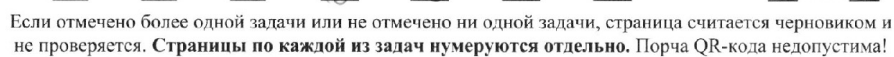
$$(z+y)^2 =$$

$$2x^2 - 4x - 2^4 - 8 - 8 \cdot 2 - 4$$

$$(1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})$$

$$16 + 16z + 4z^2$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$





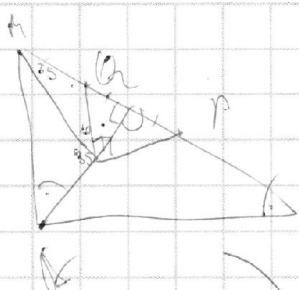
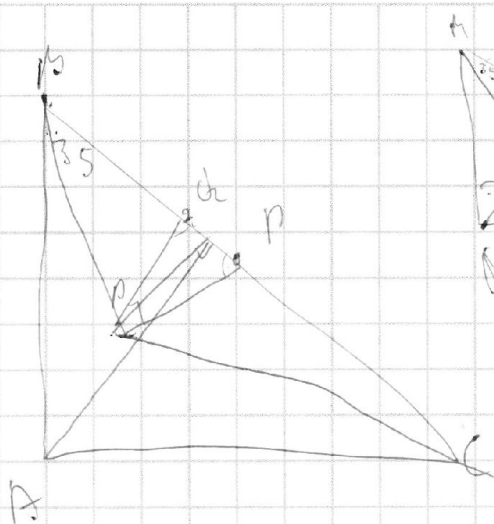
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



СТРАНИЦА

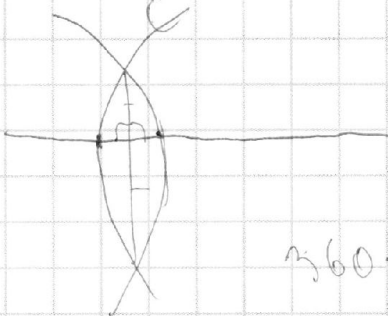
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$10 - a - 35$$
$$180 - a - 35$$

$$PM = \sin 35 \cdot \tan 35 \cdot (7+y)$$



$$60 - 110 - a$$

$$n^3$$

$$n^2 \cdot n$$

$$110 + a$$

$$j \cdot 111 \dots 111$$

$$\sin 45 + a - b = \frac{2y+x}{2y+x+z}$$

$$n(n + 10n + 100n + \dots + 10^{25000} n) \cdot n$$

$$n^2 + 10n^2 +$$

$$55 + a - b$$

$$\frac{2y+z+x}{2} = R$$

$$10 - 35 + a - b$$

$$55 + a - b$$

