



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\begin{cases} (1) xy = 4z + z^2 \\ (2) yz = 4x + x^2 \\ (3) zx = 4y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z \neq 0) \begin{cases} y = \frac{xy - z^2}{z} \\ y = \frac{yz - x^2}{x} \\ y = \frac{zx - y^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{xy - z^2}{z} = \frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y} = 4 \right)$$

$$\frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y} \Leftrightarrow y^2z - yx^2 = x^2z - xy^2 \Leftrightarrow z(x^2 - y^2) + xy(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

Аналогично, $\begin{cases} x = z \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = z \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$

Если среди x, y, z есть равные числа, то из совокупности с неравной парой чисел следует $xy + yz + zx = 0$.

В противном случае $x = y = z \Rightarrow 4 = \frac{xy - z^2}{z} = \frac{x^2 - x^2}{x} = \frac{0}{x} = 0 \quad \text{W} - \text{этот случай невозможен}$

Следовательно, $xy + yz + zx = 0$

$$(1) + (2) + (3): \underline{xy + yz + zx} = 4x + 4y + 4z + x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y + z) + (x + y + z)^2 - 2 \underline{(xy + yz + zx)} \Rightarrow (x + y + z)(x + y + z + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = -4 \end{cases}$$

Если $x + y + z = 0: \underline{xy + yz + zx} = 4(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \quad \text{W}$

Следовательно, $x + y + z = -4$

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 4(x + y + z) + 3 \cdot 4^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) + 8(x + y + z) + 48 = \\ &= (-4)^2 - 2 \cdot 0 + 8 \cdot (-4) + 48 = 16 - 32 + 48 = 32 \end{aligned}$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\begin{aligned} n \text{ состоит из } 25000 \text{ цифр} &\Rightarrow n = \underbrace{99 \dots 99}_{25000} = 10^{25000} - 1 \Rightarrow n^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = \\ &= 10^{50000} (10^{25000} - 3) + (3 \cdot 10^{25000} - 1) = \underbrace{99 \dots 99}_{25000} \underbrace{700 \dots 00}_{50000} + \underbrace{299 \dots 99}_{25000} = \underbrace{9 \dots 9}_{24999} \underbrace{70 \dots 0}_{24999} \underbrace{29 \dots 9}_{25000} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{В числе } n^3 \text{ } 24999 + 25000 = 49999 \text{ цифр} \end{aligned}$$

Ответ: 49999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

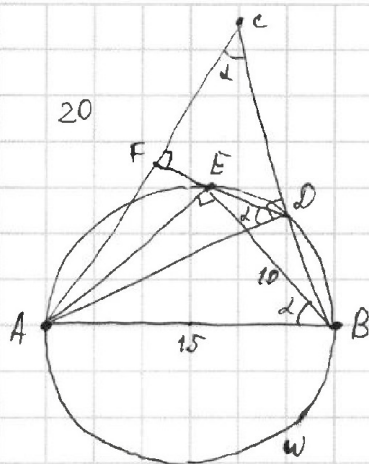
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.



$$AB - \text{диаметр } \omega, D \in \omega, E \in \omega \Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$$

$$\angle ABE = \alpha, \cos \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\triangle AEB - \text{впис. в } \omega \Rightarrow \angle ADE = \angle ABE = \alpha \text{ (вписанные, опирающиеся на дугу } \overset{\frown}{AE} \text{)}$$

$$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - \angle CDF = 90^\circ - (90^\circ - \angle ADF) = \angle ADF = \alpha$$

$$AD = AC \cdot \sin \angle ACD = AC \cdot \sin \alpha; AF = AD \cdot \sin \angle ADF = AC \cdot \sin^2 \alpha = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Пусть n — количество коробок всего.

Кол-во способов для вернутого разложить 3 шарика по n коробкам — C_n^3

Кол-во способов для игрока, чтобы в пяти выбранных им коробках лежали 3 шарика — C_5^3

$\Rightarrow$ вероятность выигрыша игрока в первый раз $P_1 = \frac{C_5^3}{C_n^3}$

Кол-во способов для игрока, чтобы в восьми выбранных им коробках лежали 3 шарика — C_8^3

$\Rightarrow$ вероятность выигрыша игрока во второй раз $P_2 = \frac{C_8^3}{C_n^3}$

Значит, увеличился ли коэффициент выигрыша игрока $k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{C_8^3}{C_5^3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{46}{12} = \frac{28}{5} = 5,6$

Ответ: в 5,6 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

Арифм. прогрессия: $b_k = b_1 + (k-1)d$; $b_4 + b_5 = b_1 + 3d + b_1 + 4d = b_1 + d + b_1 + 6d = b_2 + b_7 \Rightarrow$ суммы корней

уравнений $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^2}{3} = 0$ (1) и $2x^2 - (a^2 - a^4)x - (2a^6 + 8a + 4) = 0$ (2) равны.

По Т. Виета сумма корней (1) ур. $-(a^2 - a)$, а сумма корней (2) ур. $-\frac{a^2 - a^4}{2}$ (если корни есть) они есть по условию

$$a^2 - a = \frac{a^2 - a^4}{2} \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$a=0$: (1) $x^2 + \frac{2}{3} = 0$ — нет корней, т.к. $x^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow a=0$ не подходит

$a=1$: (1) $x^2 + \frac{1}{3} = 0$ — нет корней, т.к. $x^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow a=1$ не подходит

$a=2$: (1) $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases}$

$$(2) 2x^2 - 4x - 148 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 74 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 75 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5\sqrt{3} \\ x=1-5\sqrt{3} \end{cases}$$

Рассмотрим арифм. прогрессию: $b_1 = 1 - 7\sqrt{3}$, $d = 2\sqrt{3}$: $b_2 = (1 - 7\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3}$,

$b_4 = (1 - 7\sqrt{3}) + 3 \cdot 2\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}$, $b_5 = (1 - 7\sqrt{3}) + 4 \cdot 2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$, $b_7 = (1 - 7\sqrt{3}) + 6 \cdot 2\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3}$

Эта прогрессия подходит, т.к. b_2 и b_7 — корни (2), а b_4 и b_5 — корни (1) $\Rightarrow a=2$ подходит

Ответ: $a=2$



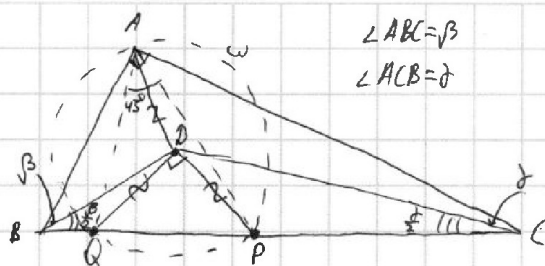
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle ABC = \beta$$

$$\angle ACB = \gamma$$

Задача 7.

$$AB = BP \Rightarrow \triangle ABP \text{ равнобедренный } \Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2}$$

$$AC = CQ \Rightarrow \triangle ACQ \text{ равнобедренный } \Rightarrow \angle CAQ = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\angle BAP + \angle CAQ = \angle BAC + \angle PAQ \Rightarrow \angle PAQ = \frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Рассмотрим окружность ω с центром D и радиусом $DP = DQ$; центральный угол, опирающийся на дугу PQ , равен $\angle PDQ = 90^\circ \Rightarrow$ вписанный угол, опирающийся на дугу PQ , равен $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

А D лежит на биссектрисе угла PAQ , $\angle PAQ$ равен вписанному в ω , опирающемуся на дугу $PQ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \in \omega \Rightarrow AD = DP = DQ$$

$$BA = BP, DA = DP, BD = BD \Rightarrow \triangle BAD = \triangle BPD \text{ (по III ак.)} \Rightarrow \angle ABD = \angle PBD = \frac{1}{2} \angle ABP = \frac{\beta}{2}$$

$$CA = CQ, DA = DQ, CD = CD \Rightarrow \triangle CAD = \triangle CQD \text{ (по III ак.)} \Rightarrow \angle ACD = \angle QCD = \frac{1}{2} \angle ACQ = \frac{\gamma}{2}$$

$$\angle DBC + \angle DCB$$

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle DCB = 45^\circ - \angle DBC = 45^\circ - 35^\circ = 10^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle DCB = 10^\circ$$

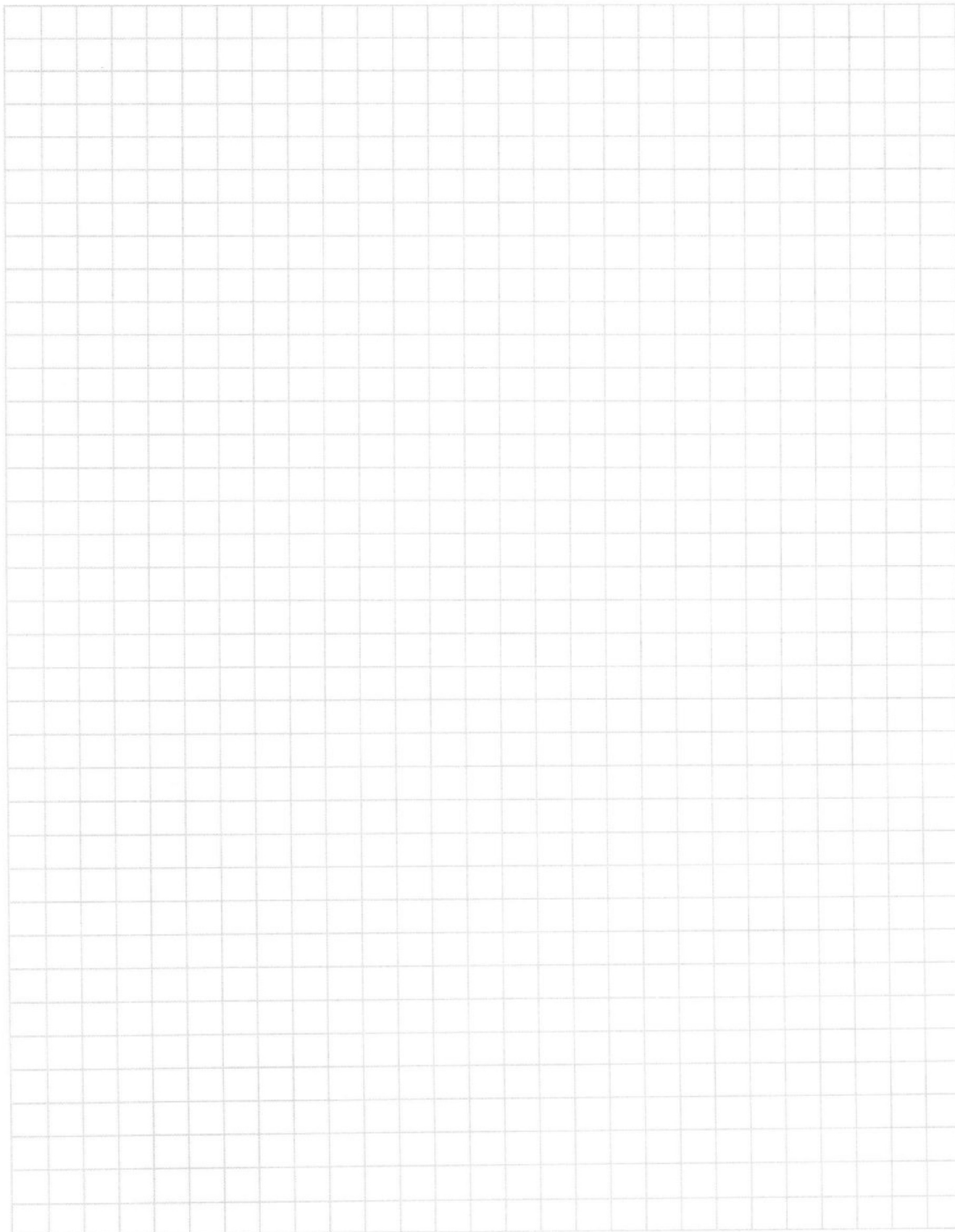


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болсс одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



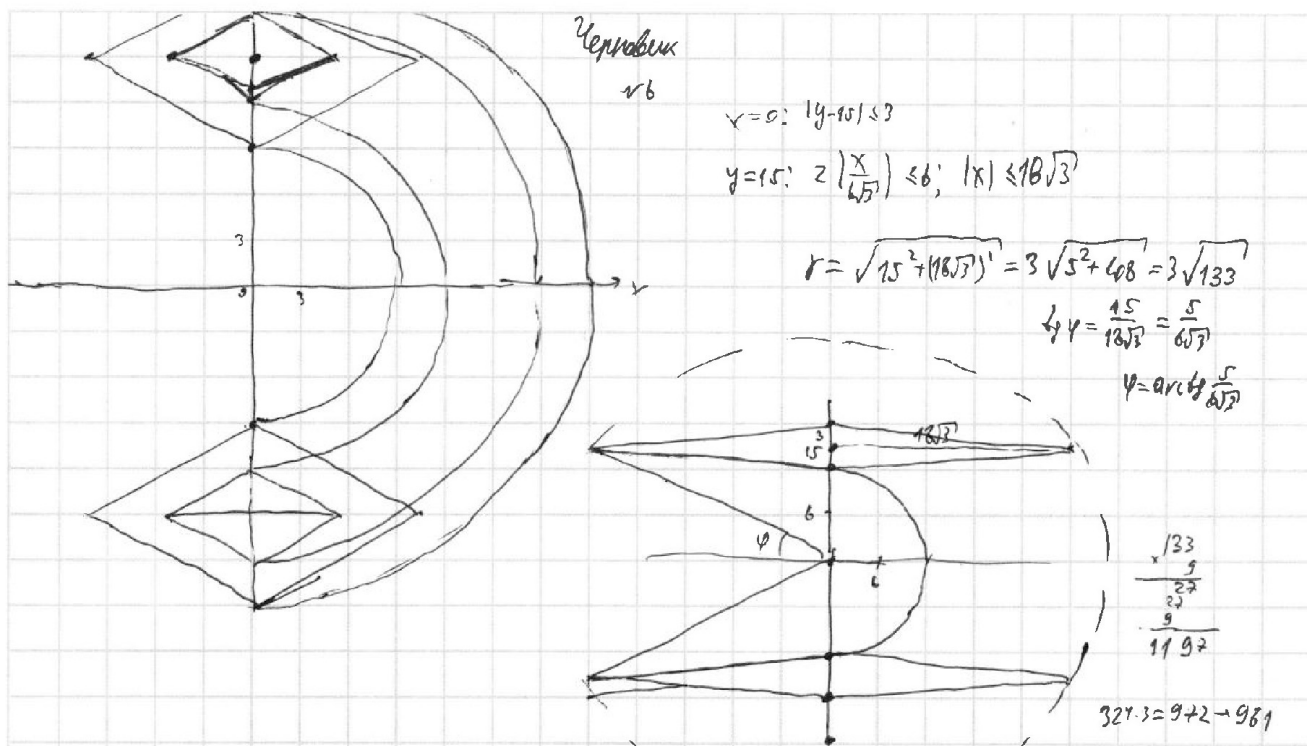


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

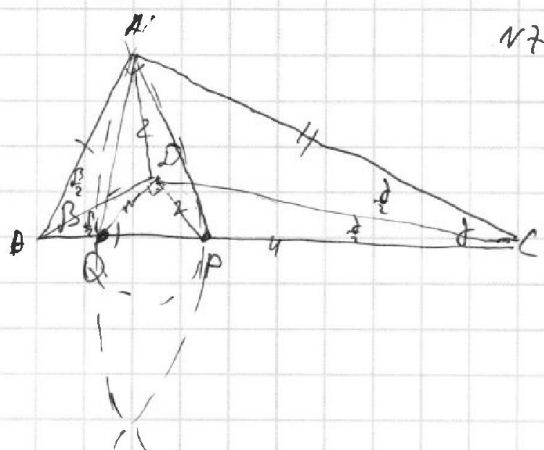
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \pi r^2 \cdot \frac{2\pi - 2 \arccos \frac{5}{6\sqrt{3}}}{2\pi} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\sqrt{3} - \frac{1}{2} \pi \cdot 12^2 = \pi \cdot 9 \cdot 133 \left(1 - \frac{\arccos \frac{5}{6\sqrt{3}}}{\pi}\right) - 216\sqrt{3} - 72\pi =$$

$$= \pi \left(\frac{9 \cdot 133 - 9 \cdot 8}{9 \cdot 125} \right) - 9 \cdot 133 \cdot \arccos \frac{5}{6\sqrt{3}} - 216\sqrt{3} = 1125 \pi - 1197 \arccos \frac{5}{6\sqrt{3}} - 216\sqrt{3}$$



$$\angle QAP = (180^\circ - 150^\circ - \frac{\beta}{2}) - (50^\circ - \frac{\beta}{2}) = \frac{\beta}{2} = 45^\circ$$

$$O(ARP) = D$$

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{\beta}{2} = 45^\circ$$

$$10^\circ$$

