



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$xy = -6z + z^2 = z(z-6) \Rightarrow z-6 = \frac{xy}{z}$$

аналог. $x-6 = \frac{yz}{x}$, $z-6 = \frac{xz}{y}$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 \geq$$

$$\geq (x-6)(y-6) + (y-6)(z-6) + (x-6)(z-6) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2}$$

$$2(xy + yz + zx) = -12(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x + y + z)^2 = -12(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x + y + z)(x + y + z + 12) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 36 + 36 + 36$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N^2. \quad n: \frac{99 \dots 9}{10001 \text{ "9"}} \quad n = 10^{10001} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^3 = (10^{10001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1.$$

~~Вот так~~ раскл. Число 10^{60003} : ~~6-знач~~ $100 \dots 0$
 60003 "0"

$$10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} = \frac{100 \dots 0}{60003 \text{ "0"}} - \frac{300 \dots 0}{40002 \text{ "0"}} = \frac{99 \dots 9 \ 400 \dots 0}{10000 \text{ "9"} \ 40002 \text{ "0"}}$$

$$10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} = \frac{99 \dots 9 \ 400 \dots 0}{10000 \text{ "9"} \ 40002 \text{ "0"}} + \frac{300 \dots 0}{20001 \text{ "0"}} = \frac{99 \dots 9 \ 400 \dots 0 \ 30 \dots 0}{10000 \text{ "9"} \ 10000 \text{ "0"} \ 10001 \text{ "9"} \ 10001 \text{ "0"}}$$

$$n^3 = \frac{99 \dots 9 \ 400 \dots 0 \ 30 \dots 0}{10000 \text{ "9"} \ 10000 \text{ "0"} \ 10001 \text{ "9"} \ 10001 \text{ "0"}} - 1 = \frac{99 \dots 9 \ 400 \dots 0 \ 2 \ 99 \dots 9}{10000 \text{ "9"} \ 10000 \text{ "0"} \ 10001 \text{ "9"} \ 10001 \text{ "0"}} \Rightarrow \text{в } n^3 \ 10000 + 10001 = 40001 \text{ девятки.}$$

Ответ: 40 001.

Омьел: $AF = 3,8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ 100 ур-ние:

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 = 16$$

корни: $x_1 = \frac{a^2 - 4a - 4}{2}$
 $x_2 = \frac{a^2 - 4a + 4}{2}$

100 ур-ние:

№ 5 $x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$

$$D = (a^3 - 4a^2)^2 + 4 \cdot 5 \cdot (2a^3 + 6a + 15) = a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 40a^3 + 120a^2 + 300 = 0$$

корни: $x_1' = \frac{a^3 - 4a^2 - 4}{10}$; $x_2' = \frac{a^3 - 4a^2 + 4}{10}$

Если x_1, x_2, x_1', x_2' удовл. условию: $x_1 + x_2 = 28 + 5a + 6a = 28 + 11a$
 $x_1' + x_2' = 0$ тогда $x_1 + x_2 = 28 + 5a + 6a = 28 + 11a = 28 + 4a + 7a = x_1' + x_2'$

$$x_1 + x_2 = \frac{a^2 - 4a - 4}{2} + \frac{a^2 - 4a + 4}{2} = a^2 - 4a = x_1' + x_2' = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(a^2 - 4a) = a^3 - 4a^2 = a^2(a - 4)$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0$$

$$a = 0 \vee a = 4 \vee a = 5$$

Проверим: $a = 0$

100 ур-ние: $x^2 + 4 = 0$ Нет корней, $\Rightarrow$ не шаг.

$a = 4$

100 ур-ние: $x^2 - (16 - 16)x + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0$ корни: $x_1 = -2, x_2 = 2$

100 ур-ние: $5x^2 - (64 - 64)x - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 5x^2 - 164$ корни: $x_1' = -\sqrt{\frac{164}{5}}, x_2' = \sqrt{\frac{164}{5}}$
 $(-2 - 2) - 4 + \sqrt{\frac{164}{5}} - 2 \Rightarrow$ не шаг.

$a = 5$

100 ур-ние: $x^2 - (25 - 20)x + 25 - 30 + 4 = x^2 - 5x - 1 = 0$ $D = 25 + 4 = 29$ корни:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

100 ур-ние: $5x^2 - (125 - 4 \cdot 25)x - 2 \cdot 125 - 6 \cdot 5 - 15 = 5x^2 - 25x - 250 - 45 = 5x^2 - 25x - 295 = 0$ $x^2 - 5x - 59 = 0$ $D = 25 + 4 \cdot 59 = 251 = 9 \cdot 29$

корни: $x_1' = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}, x_2' = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5-2\sqrt{29}}{2}, \frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2}, \frac{5+3\sqrt{29}}{2}$$

могут являться членами арифм. прогрессии (и, соответственно, удовл. условию) с разностью $\sqrt{29}$ и тем же членом ~~было~~ $\frac{5-11\sqrt{29}}{2}$. $\rightarrow$ этот вариант подх.

ответ: 5.

Answer: ~~256~~ $256(\pi - 13)$



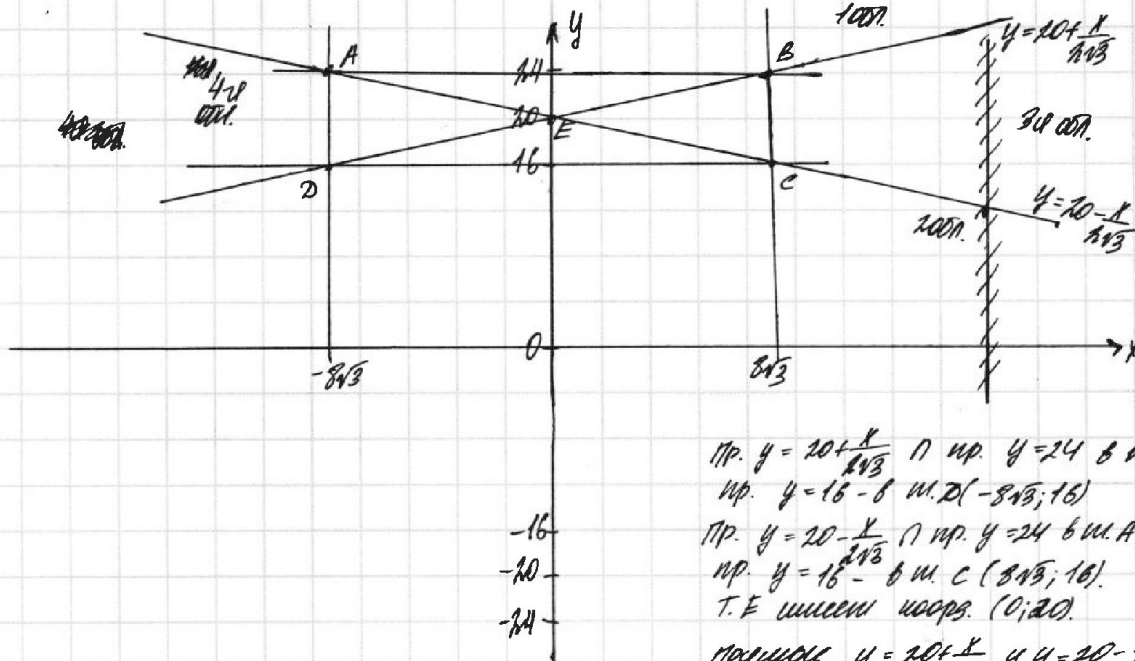
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Определим наименьший шаг в м, который фигура Ф займем на координатной плоскости.



пр. $y = 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ и пр. $y = 24$ в м. $B(8\sqrt{3}, 24)$,
пр. $y = 16 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ в м. $D(-8\sqrt{3}, 16)$
пр. $y = 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ и пр. $y = 24$ в м. $A(-8\sqrt{3}, 24)$,
пр. $y = 16 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ в м. $C(8\sqrt{3}, 16)$.
Т. Е имеет коорд. $(0, 20)$.

Прямые $y = 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ и $y = 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$
соединим ш. в м. на границе
обл. - см. рис.

100 (1000) $y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} \geq 0$ и $y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} \geq 0$
 $y \geq 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ $y \geq 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ - 1000

тогда $|y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}| = y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} = 2y - 40 \leq 8$
 $2y \leq 48$
 $y \leq 24$ $\Rightarrow$ макс. шаг в м. - $\triangle ABE$

200 $y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} \leq 0$ и $y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} \leq 0$
 $y \leq 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ $y \leq 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ - 2000

Условие, зад. Ф: $20 - y - \frac{x}{8\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{8\sqrt{3}} = 40 - 2y \leq 8$ $2y \geq 32$ $y \geq 16$.
Получ. шаг в м. - $\triangle DEC$

300 $y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} \geq 0$ и $y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} \leq 0$
 $y \geq 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ $y \leq 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ - 3000

Усл. зад. Ф: $y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} = \frac{x}{4\sqrt{3}} \leq 8$ $x \leq 8\sqrt{3}$. Получ. шаг в м. - $\triangle BCE$

400 $y - 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}} \leq 0$ и $y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} \geq 0$
 $y \leq 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}}$ $y \geq 20 + \frac{x}{8\sqrt{3}}$ - 4000

Усл. зад. Ф: $-y + 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{8\sqrt{3}} = -\frac{x}{4\sqrt{3}} \leq 8$ $x \geq -8\sqrt{3}$. Получ. шаг в м. - $\triangle ADE$.

Итого: фигура Ф имеет шаг в м. равный периметру ромба ABCD.

ответ: $\angle DCB = 22^\circ$.

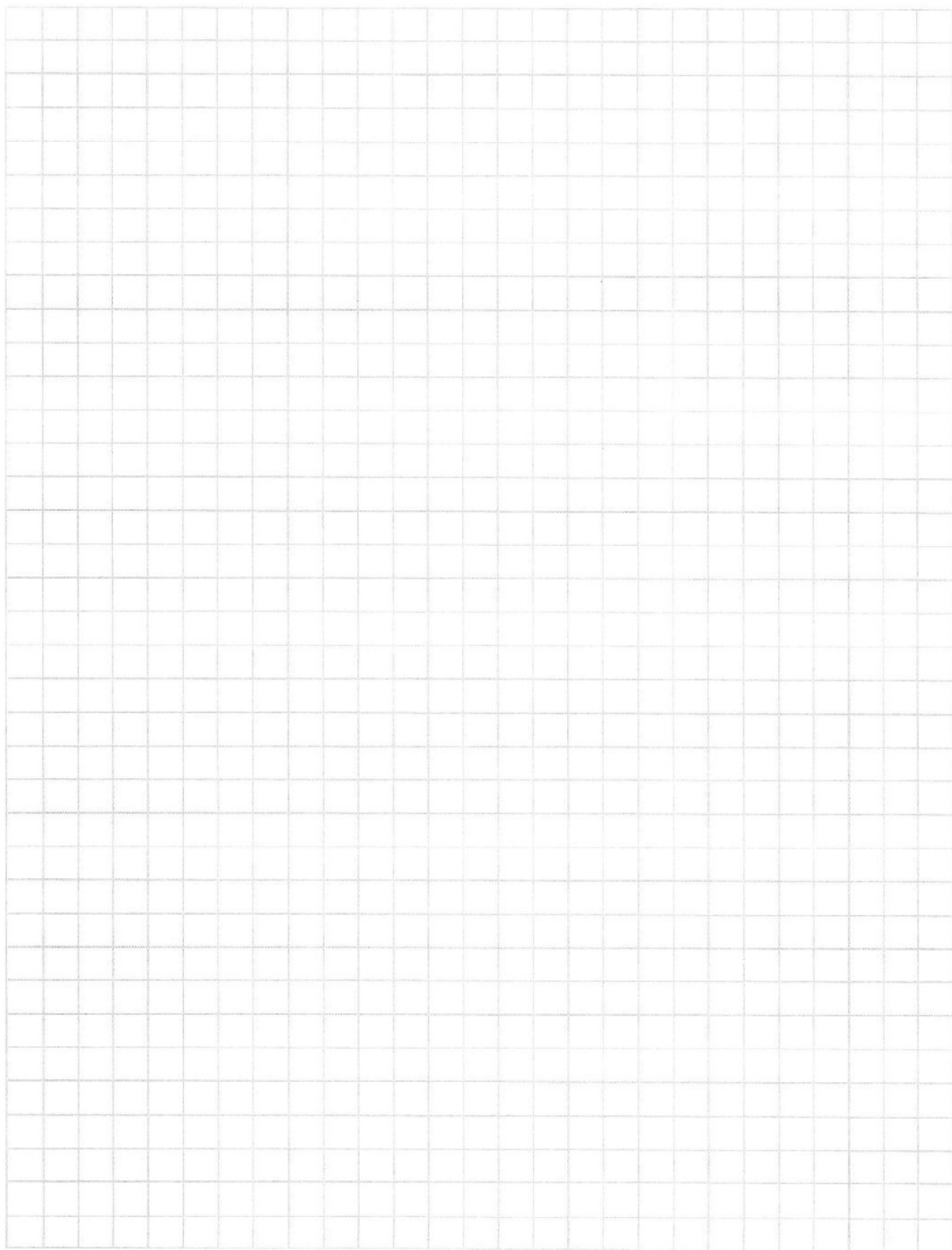


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad y - 20 + \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0 \quad \vee \quad y - 20 - \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$$

$$y \geq 20 - \frac{x}{\sqrt{3}} \quad y \leq 20 + \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$y - 20 + \frac{x}{\sqrt{3}} = y - 20 + \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \quad x \leq 8\sqrt{3}$$

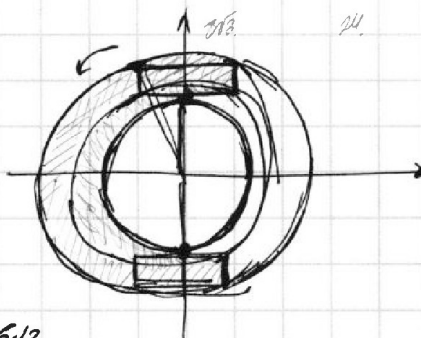
$$x^2 + y^2 - 2xy =$$

$$= (x+y)^2 - x^2 - y^2 + 2xy = 62$$

$$\frac{2}{16}$$

$$\frac{12}{64}$$

$$\frac{3}{32}$$



$$8-3$$

$$-8-3$$

$$z(2-6)$$

$$z-6 = \frac{14}{2}$$

$$\left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18$$

а. в - иском.

а, в, с

$$c^2 - bc = ab$$

$$c(c-b)$$

если все - одного знака:
раскл. найдем по мод.

если все - "+":

$$\frac{c(c-b) = ab}{+ + +}$$

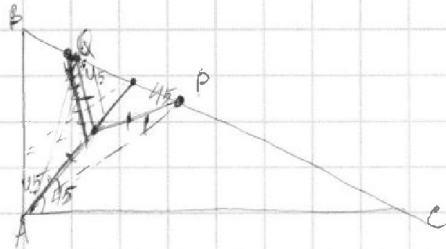
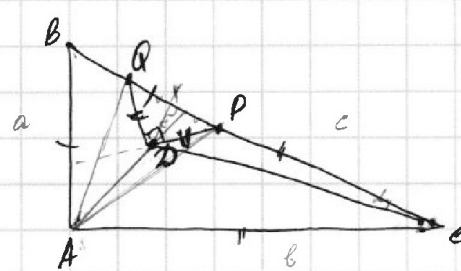
все - "-"

$$-3 \quad -3 \quad -3$$

$$9$$

$$-3 \quad -3 \quad -3$$

$$-3 \quad 3\sqrt{3} \quad 3\sqrt{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36$$

$$6y = y^2 - zx \Rightarrow -6y = zx - y^2$$

$$y^2 - 6y = zx$$

$$y^2 - 12y = zx + zx - y^2 = 2zx - y^2$$

$$\text{или } 10: 2xy + 2zx + 2yz - x^2 - y^2 - z^2$$

$$(z-6)z = xy$$

$$z-6 = \frac{xy}{z}$$

$$(z-6)^2 = \frac{x^2y^2}{z^2}$$

$$\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{x^2z^2}{y^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} = \frac{x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4}{x^2y^2z^2}$$

$$z(z-6) = xy$$

$$yz - 6yz = xy$$

$$\Rightarrow z-6 > xy$$

20 001 3 секунды

9...9

$$99 = 10^2 - 1$$

522 секунды

$$(10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

10...0

$$10^6 - 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 - 1$$

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ - 300000 \\ \hline 700000 \\ + 30000 \\ \hline 730000 \\ - 1 \\ \hline 729999 \end{array}$$

и-1 цифра

и-1 цифра

$$10^9 - 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 - 1$$

$$\begin{array}{r} 1000000000 \\ - 3000000000 \\ \hline 9970000000 \\ + 3000000000 \\ \hline 9970003000 \\ - 1 \\ \hline 9970002999 \end{array}$$

и-1

$$\begin{aligned} 2x &\leq h \\ 10 &\geq 48 \\ 8 &\geq h - 0.5 \\ 8 &\geq \frac{8x}{x} + 0.5 + h - \frac{8x}{x} - h - 0.5 \end{aligned}$$

$$\frac{8x}{x} - 0.5 \geq h$$

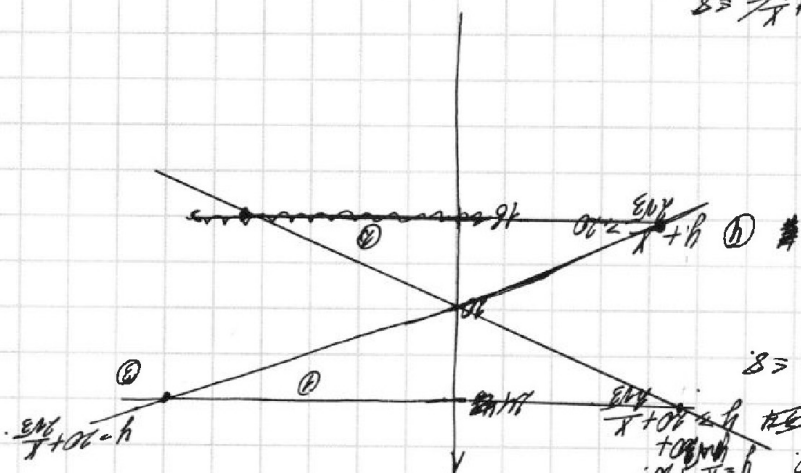
$$0.5 \geq \frac{8x}{x} + h$$

$$\begin{aligned} 10 &\geq h \\ 8 &\geq h \\ 8 &\geq 0.5 - h \end{aligned}$$

$$8 \geq \frac{8x}{x} - 0.5 - h + \frac{8x}{x} + 0.5 - h$$

$$\begin{aligned} 8 &\geq \frac{8x}{x} + 0.5 - h \\ 8 &\geq \frac{8x}{x} - h \\ 8 &\geq \frac{8x}{x} - h \end{aligned}$$

$$8 \geq \left| \frac{8x}{x} - 0.5 - h \right| + \left| \frac{8x}{x} + 0.5 - h \right|$$



$\angle CDS = 87^\circ$
 $\angle D = 10^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$2xy = -12z + 2z^2$$

$$\bullet \cdot 2xy - z^2 = -(\cancel{xy})^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$y^2 - zx = 6y$$

$$\frac{x^4y^4 + y^4z^4 + x^4z^4}{x^2y^2z^2} \geq 3x^2y^2z^2$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \cdot 2$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} +$$

$$\geq 2(a+b+c)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 \geq$$

$$\geq (x-6)(y-6) + (y-6)(z-6) +$$