



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} xy \cdot yz \cdot zx &= (z + z^2)(-6x + x^2)(-6y + y^2) \\ (xyz)^2 &= z(z-6) \cdot x(x-6) \cdot y(y-6) \\ (xyz)^2 &= xyz(x-6)(y-6)(z-6) \quad | : xyz \\ xyz &= (x-6)(y-6)(z-6) \end{aligned}$$

имеем
правильно
т.к. $x \neq 0$,
 $y \neq 0$,
 $z \neq 0$.

$$(x-6)(y-6)(z-6) - xyz = 0$$

$$(xy - 6x - 6y + 36)(z-6) - xyz = 0.$$

$$xyz - 6xz - 6yz + 36z - 6xy + 36x + 36y - 36 \cdot 6 - xyz = 0.$$

$$-6xz - 6yz - 6xy + 36z + 36x + 36y = 6 \cdot 36 \quad | : (-6)$$

$$xz + yz + xy - 6z - 6x - 6y = -36.$$

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 3 \cdot 36 = \\ &= (-6x + x^2) + (-6y + y^2) + (-6z + z^2) - 6x - 6y - 6z + 3 \cdot 36 = \end{aligned}$$

$$= yz + zx + xy - 6x - 6y - 6z + 3 \cdot 36 = -36 + 3 \cdot 36 =$$

$$= 2 \cdot 36 = 72.$$

Ответ: 72.



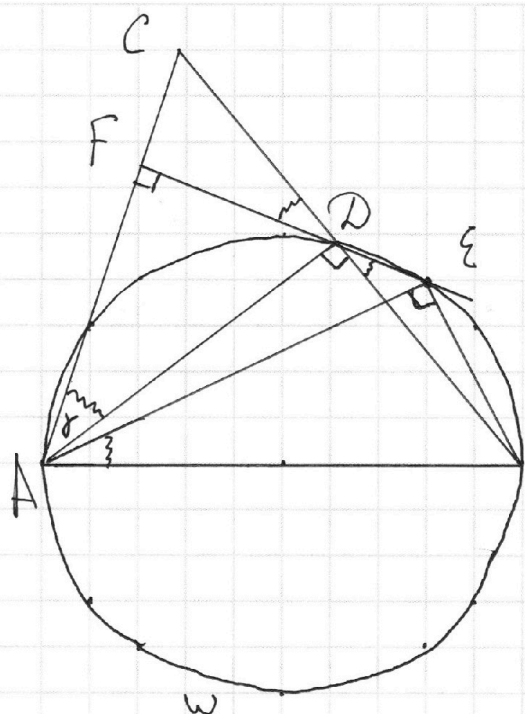
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. AB-диаметр, то углы, опирающиеся на него, прямые $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

$$\angle ADB = 90^\circ = \angle AEB \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

Тогда $\triangle ADC$ и $\triangle ABE$ - прямоугольные. Т.к. $DF \perp AC$, то $\angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \triangle DFC$ - прямоугольный.

Пусть $\angle CAD = x$. Тогда т.к.

~~$\triangle ACD$ - прямоугольный~~

ный, то $\angle DAC + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - x. \text{ Т.к. } \triangle CDF \text{ - прямоугольный,}$$

$$\text{то } \angle CDF + \angle DCF = 90^\circ \Rightarrow \angle FDC = 90^\circ - \angle DCF = 90^\circ - (90^\circ - x) = x.$$

$\angle CDF = \angle EDB = x$, как вертикальные. $\angle BDE = \angle BAE = x$, т.к. $\angle BDE$ и $\angle BAE$ опираются на одну дугу BE. ~~т.к.~~ $\triangle CDF$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ - прямоугольные, то:

$$\text{в } \triangle ABE \sin \angle BAE = \sin x = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10}; \text{ в } \triangle ACD \sin \angle DAC = \sin x = \frac{DC}{AC} = \frac{CD}{20};$$

$$\text{в } \triangle CDF \sin \angle FDC = \sin x = \frac{FC}{DC}.$$

$$\sin x = \frac{9}{10} = \frac{CD}{20} \Rightarrow CD = 18, \sin x = \frac{FC}{DC} = \frac{FC}{18} \Rightarrow FC = 18 \cdot \sin x = 18 \cdot 0,9 =$$

$$= 16,2. \quad AC = AF + FC \Rightarrow AF = AC - FC = 20 - 16,2 = 3,8.$$

Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n — число коробок в телепередаче. Пусть A — событие, при котором игрок, указав на 5 коробок, выигрывает. Пусть B — событие, при котором игрок, указав на 9 коробок, выигрывает. $P(A)$ — вероятность события A , $P(B)$ — вероятность события B . $n > 9$, т.к. иначе игрок не сможет открыть 9 коробок.

C_n^5 — способов выбрать 5 коробок из имеющихся.

C_n^9 — способов выбрать 9 коробок из имеющихся.

~~Способов выбрать 5 коробок из имеющихся~~

Способов выиграть, указав на 5 коробок, все равно, это способов выбрать 5 коробок, в трех из которых лежит по шарик, из имеющихся коробок, все равно, это способов выбрать 2 коробки из тех, в которых нет шариков,

т.е. C_{n-3}^2 .

Аналогично, C_{n-3}^9 — способов выиграть, указав на 9 коробок, все равно, это способов выбрать $9-3=6$ коробок из тех, в которых нет шариков, т.е. C_{n-3}^6 .

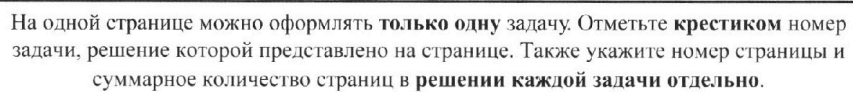
$$\text{Тогда } P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{2! (n-5)!} \cdot \frac{n!}{5! (n-5)!} = \frac{(n-3)!}{2! (n-5)!} \cdot \frac{5! (n-5)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} ; P(B) = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{(n-3)!}{6! (n-9)!} \cdot \frac{(n-9)! \cdot 9!}{(n-3)! \cdot n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)} . \text{ Тогда вероятность выигрыша игрока увеличилась в } \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4 \text{ раз.}$$

$$\text{т.е. в } \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)} : \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4 \text{ раз.}$$

~~Следовательно, если игрок указал 5 коробок, то $P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}$. Если же он указал 9 коробок, то $P(B) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)}$. Тогда вероятность выигрыша игрока увеличилась в $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 8,4$ раз.~~



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Exemplos de pontos de equilíbrio, como $P(A)$, E , $P(B)$ e F .

Omber: 6 8,4 raza.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4, \\ x_1 + x_2 = a^2 - 4a \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 x_4 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}, \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

$\{c_n\}$ — арифметическая прогрессия, d — её знаменатель. $d \neq 0$.

$c_6 = x_1, c_7 = x_2, c_5 = x_3, c_8 = x_4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c_6 c_7 = a^2 - 6a + 4, \\ c_6 + c_7 = a^2 - 4a, \\ c_5 + c_8 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}, \\ c_5 + c_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

т.к. $d \neq 0$, то $x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4$

$$c_6 + c_7 = c_1 + 5d + c_1 + 6d = 2c_1 + 11d = (c_1 + 4d) + (c_1 + 7d) = c_5 + c_8.$$

$$c_6 + c_7 = c_5 + c_8 \Rightarrow a^2 - 6a + 4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$5a^2 - 30a + 20 = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 + 9a^2 - 30a + 20 = 0$$

Заметим, что $a=1$ — корень этого уравнения, т.к. $1 + 9 - 30 + 20 = 0 \Rightarrow (a^3 + 9a^2 - 30a + 20) = (a-1)(a^2 + 10a - 20)$ (из следствия теоремы Безу). b и m — некоторые коэффициенты

$$\begin{array}{r|l} a^3 + 9a^2 - 30a + 20 & a-1 \\ \hline a^2 - a^2 & a^2 + 10a - 20 \end{array} \Rightarrow a^2 + 10a - 20 = 0$$

$$\begin{array}{r} -10a^2 - 30a \\ \hline 10a^2 - 10a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -20a + 20 \\ \hline -20a + 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$b=10, m=-20, \text{ т.е.}$$

$$a^3 + 9a^2 - 30a + 20 = (a-1)(a^2 + 10a - 20).$$

$$a^2 + 10a - 20 = 0.$$

$$D = 100 + 4 \cdot 20 = 180 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = (6\sqrt{5})^2$$

$$a_1 = \frac{-10 - 6\sqrt{5}}{2} = -5 - 3\sqrt{5}, a_2 = -5 + 3\sqrt{5}.$$

следы

Рассмотрим уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ и $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$: их дискриминанты > 0 , т.к. они имеют два различных корня. $(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 > 0$, $(a^3 - 4a^2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2a^3 - 6a - 15) > 0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим $a = 1$:

$$1^3 - 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 16 = 1 - 8 + 12 + 24 - 16 = 17 > 0,$$

$$(1^3 - 4 \cdot 1^2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 - 15) = (1 - 4)^2 + 20(2 + 6 + 15) = 9 + 40 + 120 + 300 > 0. \Rightarrow a = 1.$$

проверим $a = -5 - 3\sqrt{5}$:

$$(-5 - 3\sqrt{5})^4 - 8(-5 - 3\sqrt{5})^3 + 12(5 - 3\sqrt{5})^2 + 24(-5 - 3\sqrt{5}) - 16 = (5 + 3\sqrt{5})^4 + 8(5 + 3\sqrt{5})^3 + 12(5 + 3\sqrt{5}) - 24(5 + 3\sqrt{5}) - 16 > 0.$$

~~$\Rightarrow a = -5 - 3\sqrt{5}$~~

Проверим $a = -5 + 3\sqrt{5}$:

Ответ: 1;

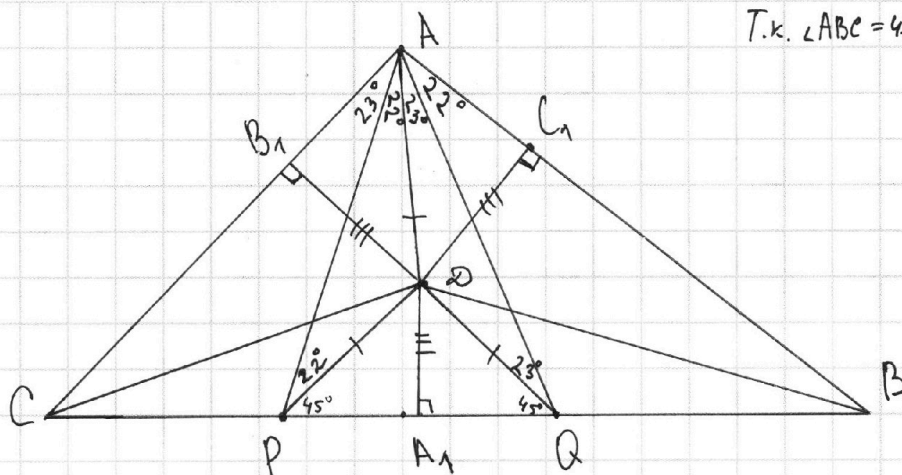


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $\angle ABC = 46^\circ$, то $\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$

$\triangle PDQ$

$PD = DQ$ и

$\angle PDQ = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle PDQ$ - прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle DPQ = \angle DQP =$

$= 45^\circ$. В $\triangle CAQ$ $AC = CQ$ и в $\triangle BAP$ $BA = BP \Rightarrow \triangle CAQ$ и $\triangle BAP$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle APB = \angle PAB = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ$, $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = \frac{136^\circ}{2} = 68^\circ$. Тогда $\angle APQ = \angle DPQ + \angle APD \Rightarrow$

$\angle APD = \angle APB - \angle DPB = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$. Аналогично, $\angle DQA = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$.

Пусть O - центр описанной окружности $\triangle PAQ$. Тогда $OA = OP = OQ$ как радиусы $\Rightarrow \triangle OPA, \triangle OPQ, \triangle OQA$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP, \angle OAP = \angle OPA, \angle OAQ = \angle OQA$.

Пусть $\angle OPQ = x$. Тогда $\angle OQP = x, \angle APQ = \angle APQ - \angle OQP = 67^\circ - x, \angle AQP = \angle AQP - \angle OQP = 68^\circ - x \Rightarrow \angle PAQ = 67^\circ - x, \angle QAO = 68^\circ - x \Rightarrow \angle PAQ = \angle PAQ + \angle QAO = 67^\circ - x + 68^\circ - x = 135^\circ - 2x = 180^\circ - \angle APQ - \angle AQP = 180^\circ - 67^\circ - 68^\circ = 45^\circ$
 $135^\circ - 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$. Тогда $\angle QPR = 45^\circ = \angle OQP$.

$\triangle POQ = \triangle PDQ$ по II признаку равенства треугольников, т.к. $PQ = PQ, \angle QPR = 45^\circ = \angle DQP = \angle OQP = \angle OQP$.

Но т.к. $\angle OPR, \angle OQP$ и PQ треугольника POQ совпадают с $\angle DQP, \angle DQP$ и PQ треугольника PDQ , то сами треугольники тоже совпадают $\Rightarrow O \equiv D$, т.е. D - центр описанной окружности $\triangle APQ \Rightarrow AD = DP = DQ \Rightarrow \triangle ADP, \triangle ADQ$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle APD = \angle PAD = 22^\circ, \angle AQD = \angle DAQ = 23^\circ \Rightarrow \angle PAQ = \angle PAD + \angle DAQ = 45^\circ \Rightarrow \angle CAP = \angle CAQ - \angle PAQ = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ, \angle QAB = \angle PAB - \angle PAQ = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ. \angle CAD = \angle CAP + \angle PAD = 45^\circ = \angle DAQ + \angle QAB = \angle DAB \Rightarrow AD$ - биссектриса $\triangle ABC$. Опустим перпендикуляры DB_1, DC_1, DA_1 из точки D на AC, AB, BC соответственно. Тогда $\triangle B_1AD, \triangle AC_1D, \triangle CB_1D, \triangle CDA_1$ - прямоугольные. В $\triangle B_1AD \angle B_1AD = 45^\circ, \angle DB_1A = 90^\circ \Rightarrow \angle B_1DA = 45^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, $\angle A_1DC_1 = 45^\circ$. Тогда $\angle B_1AD = 45^\circ = \angle DAC_1$, $\angle B_1DA = \angle C_1DA = 45^\circ$, $DA = DA \Rightarrow \triangle C_1AD = \triangle B_1AD$ по II признаку равенства треугольников $\Rightarrow DB_1 = DC_1$.
В $\triangle PDA_1$ $\angle PA_1D = 90^\circ$, $\angle DPA_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle PDA_1 = 45^\circ$.

$\angle PDA_1 = \angle DPA_1 = 45^\circ = \angle B_1AD = \angle B_1DA$, $AD = PD \Rightarrow \triangle B_1AD = \triangle A_1PD$ по II признаку равенства треугольников $\Rightarrow DA_1 = DB_1 = DC_1 \Rightarrow$ точка D равноудалена от сторон $\triangle ABC \Rightarrow D$ — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC \Rightarrow CD$ — биссектриса $\angle ACD \Rightarrow \angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$.

Ответ: 22°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

При $y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0, y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$:

$$y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y+20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3}.$$

При $y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0, y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$:

$$-y+20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$-\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$36 - 46 \geq 20.$$

$$(a-3+\sqrt{3})(a-3-\sqrt{3})$$

$$x \geq -8\sqrt{3}.$$

При $y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0, y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$:

$$y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8.$$

$$2y \leq 48$$

$$(a-n)^4 = a^4 - 4a^3n -$$

$$(a-2)^4 = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16.$$

$$12a^2 + 56a - 32 =$$

$$= 4(3a^2 + 14a - 8)$$

$$4 \cdot 8$$

$$y \leq 24.$$

При $y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0, y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$:

$$-(y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) - (y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}) \leq 8.$$

$$-2y \leq -36$$

$$y \geq 18.$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0.$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0.$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0.$$

$$12 \cdot 136 + 96 = 292$$

$$24$$

$$96$$

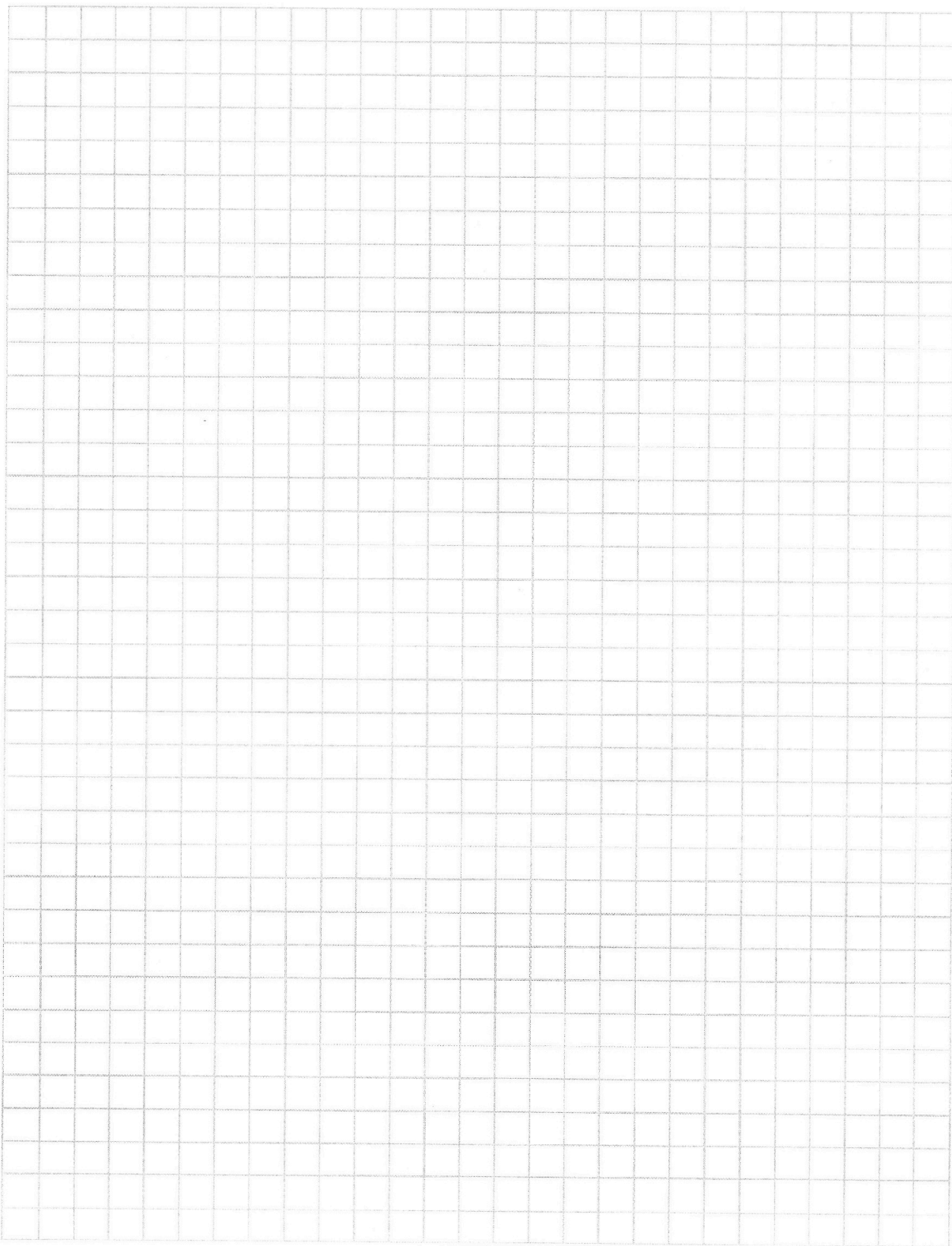


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



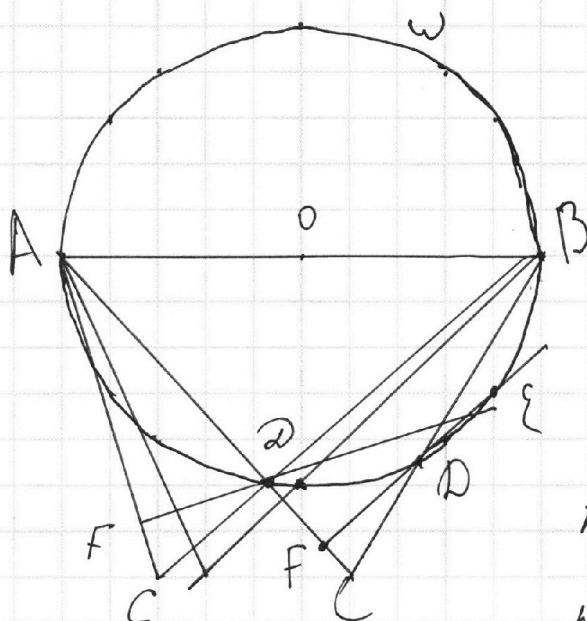


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=20, AB=10, BE=9.$$

$$\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{KD}}{2} = 90^\circ - \frac{\overset{\frown}{KD}}{2}$$

$$\angle ADB = 90^\circ, \text{ т.к. } AB - \text{диаметр.} \Rightarrow$$

$$AD - \text{высота } \triangle ABC.$$

$$\angle ABD = \angle AED \quad (\overset{\frown}{AD} - \text{общая})$$

$$\triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle DCF.$$

$$\triangle AFE \sim \triangle ADB.$$

$$\text{По Т. Пифагора в } \triangle ABE$$

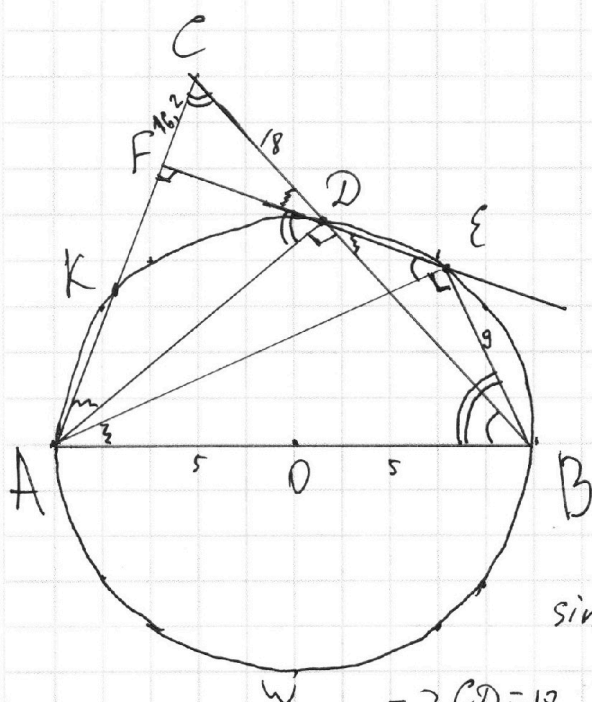
$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow$$

$$AE^2 = 100 - 81 = 19 \Rightarrow AE = \sqrt{19}.$$

$$\sin \angle = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10} = \frac{FC}{CD} = \frac{FD}{AD} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = 18.$$

$$\frac{FC}{CD} = \frac{9}{10} = \frac{FC}{18} \Rightarrow FC = \frac{9 \cdot 9 \cdot 2}{10} = \frac{81}{5} = 16,2$$



18
 9
 16,2

20
 18
 3,8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

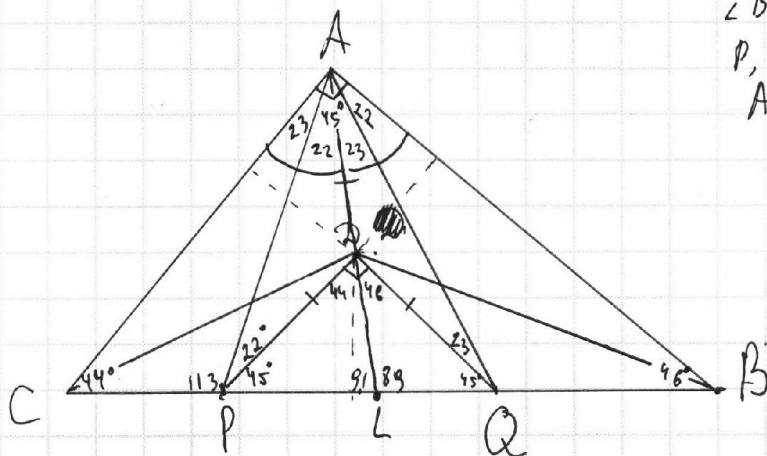
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $5 < n \leq 9$: $P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}$ $P(B) = 1$.

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{60}$$

Если $3 \leq n \leq 5$, то $P(A) = 1$, $P(B) = 1$.



$$\angle CBA = 46^\circ$$

$$\angle BAC = 90^\circ$$

$$P, Q \in BC$$

$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$DP = DQ, \angle PDQ = 90^\circ$$

$$44 + 23 = 67$$

$$180 - 67 =$$

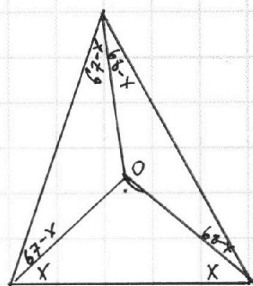
$$113$$

$\triangle PDQ$ - прямоугольник, P, Q - $\triangle ABP$ и $\triangle ACQ$ - P, Q - $\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$, $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ \Rightarrow \angle DQA = \angle CQA - 45^\circ = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$, $\angle CPD = 22^\circ$

Тогда в $\triangle PAQ$ $\angle PAQ = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

O - центр описанной ω $\triangle APQ$.

$$135 - 2x = 45^\circ \Rightarrow 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \Rightarrow O \equiv D$$



$$\angle ACL = 44^\circ, \angle CAL = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAL \sim \triangle DPL$$

$$\angle DPL = 45^\circ, \angle PLD = \angle ALC$$

AL - биссектриса $\triangle ABC$

$$\angle PDL = 44^\circ$$

$$\frac{AC}{CL} = \frac{AB}{BL}$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0.$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 \geq 0.$$

$$a=2: 16 - 8 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 24 \cdot 2 - 16 = 48 + 48 - 64 > 0.$$

$$16 + 64 + 48 - 48 - 16 - 64$$

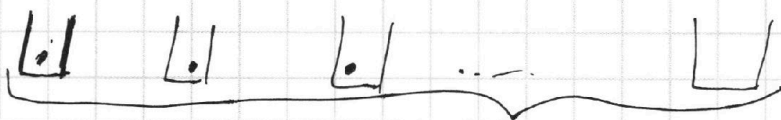
$$A = a^2 - 4a$$

$$64 \cdot 4 - 64 \cdot 8 + 3 \cdot 64 + 16 \cdot 6 - 16 = 160 - 512 + 192 + 96 - 16 = 120$$

$$48 + 64 + 48 - 48 - 16 - 64$$

$$(a^2 + 4a)^2 + a^2 + 4a \quad 12(a^2 + 2a)$$

$$a^2 - 4a$$



Если $n \geq 10$.

Способов выбрать 5 коробок: C_n^5 .

Способов выбрать 2 коробки, в кот. нет шариков: C_{n-3}^2 . т.е. (т.е. способов выбрать при первом выборе)

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} : \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!} \cdot \frac{5! \cdot (n-5)!}{n!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}$$

Способов выбрать 9 кор.: C_n^9

Способов выбрать, выбрав 9 кор., т.е. способов выбрать 6 кор., в кот. нет шариков: C_{n-3}^6

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} \neq \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$$

$$P(B) = \frac{(n-3)!}{6! \cdot (n-9)!} : \frac{n!}{9! \cdot (n-9)!} = \frac{(n-3)!}{6! \cdot (n-9)!} \cdot \frac{9! \cdot (n-9)!}{n!} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} : \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4$$