



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 (продолжение)

№ 1 (случай, где $x + y + z = 2$)

найдем все изначальные

равенства: $xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + xz)$

$$xy + yz + xz = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz)$$

$$3(xy + yz + xz) = 4 - 4 = 0$$

$$xy + yz + xz = 0$$

значит т.е. нужно

найти $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy +$

$$2yz + 2xz = 2(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz)$$

$$= 2(x + y + z)^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

Ответ: 12 или 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

вычтем из 1 2: $xy - yz = 2x - 2z + z^2 - z^2$

$$y(x - z) = 2(x - z) - (x + z)(x - z)$$

$$(x - z)(x + y + z - 2) = 0$$

пусть $x + y + z \neq 2$

тогда если вычтем

из 3 2 например

и сделав то же

получим, что $x = z$

$$\text{и } x = y \Rightarrow x = y = z$$

1)

$$x^2 = -2x + x^2$$

2)

$$x = 0, y = 0, z \neq 0$$

$$(-2)^2 \cdot 3 = 12$$

пусть $x + y + z = 2$,

тогда $(x - z)^2$

$$= (x - (x + y + z))^2$$

$$= (y + z)^2$$

тогда $(x + y)^2 + (y + z)^2$

$$+ (x + z)^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$$

$$+ 2xz + 2yz$$

мы знаем, что $2xy =$

$$= -4z + 2z^2,$$

$$\text{тогда } 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

III. к. где запись состоит

из 30001 девяток, то $n = 10^{30001-1}$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{30001 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{30001 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

начнем посмотреть на $10^{30001 \cdot 3}$
- $3 \cdot 10^{30001 \cdot 2}$, в числе будет

начнем в $30001-1$ ноль девяток,

а если шёрка, а если достаточно много нулей для следующего шага.

далее прибавляется прибавл.
 $3 \cdot 10^{30001} - 1$ это число представляет собой одну 2, а

число 30001 девяток, причем

при сложении данных чисел не $\perp$ -пересекаются $\Rightarrow$ девяток

всего $30000 + 30001 = 60001$ девяток

Ответ: 60001



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Посчитаем вероятность 1-го
выбывания: она равна

$$a = \frac{k_{\text{блн}}}{k_{\text{всех}}}, \quad k_{\text{блн}} - \text{кол-во}$$

ящиков, содержащих

3 шарика т.к. у нас

коробки зафиксированы,

то если всего n коробок,

то мы выделим 2 шара,

$$\text{то есть } k_{\text{блн}} = \binom{n-3}{2}, \quad \text{и } k_{\text{всех}} = \binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\binom{n-3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{n \cdot (n-1)}$$

Но не совсем считаем,
если выбираем 4 коробки:

$$a_2 = \frac{\binom{n-3}{4}}{\binom{n}{4}} = \frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-7)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}$$

$$= \frac{5! \cdot (n-3)!}{2 \cdot n!} \quad a_2 = \frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-7)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{7!}{4! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7! \cdot 2}{4! \cdot 5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{2}$$

Ответ: $\frac{7}{2}$ раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В случае $\sqrt{4}$ (продолжение)

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_3 = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}$$

если разность
прогрессии равна
 $\sqrt{13}$, то видно,
что эти числа подходят
Ответ: $a = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5
П. 5. корни 1-го уравнения являются 6-м и 3-м членами, так как 2-го ч-м и 4-м, то т.к. $7+9=6+4$, то сумма корней 1-го уравнения равна сумме корней 2-го уравнения.

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow a^2 - 2a = \frac{a^2 - 2a^2}{3}$$
$$(a^2 - 2a) \left(\frac{a}{3} - 1 \right) = 0$$

$$a = 0$$

тогда

$$x^2 - 4 = 0$$

$$3x^2 + 6 = 0$$

нет корней

$$a = 2$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$3x^2 - 26 = 0$$

но т.к. корни

$$\pm \sqrt{5} \text{ и } \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

но они не являются чл. ариф. пр.

$$a = 3$$

$$x^2 - 3x - 12 = 0$$

$$3x^2 - 9x - 24 = 0$$

$$\downarrow = 0$$

$$x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{93}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{329}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

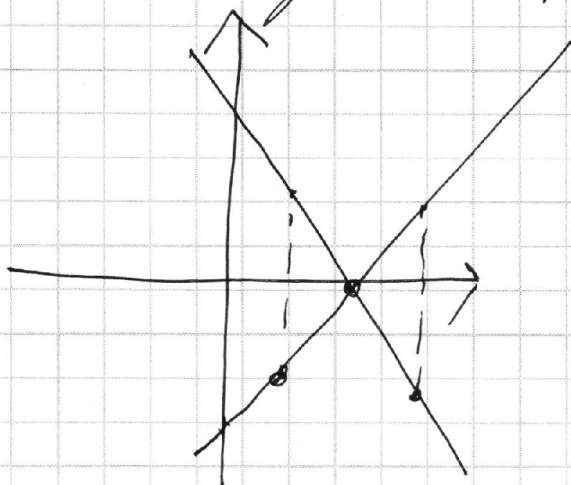
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)
3. Если $\begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$, то
получается зона 1
а условие $\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4 \quad y \leq 4\sqrt{3}$
4. Если зона 1, $y \geq 4\sqrt{3}$



можно
заметить,
что эти
2 прямые
проходят
через уже
известные
вершины

т.е. $x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 0$, $x = 10$, то

$y = 4\sqrt{3}$, так можно

сделать и со второй прямой.
Выразится приращение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение)

$$\begin{aligned} &= \cancel{4921} \quad \cancel{9611} \quad 19211 - 3211 = 6411 \\ &- 64 + 32 = 9611 - 32 \end{aligned}$$

Ответ: $9611 - 32$

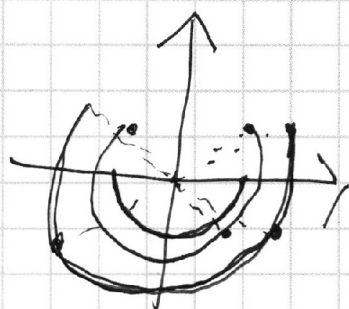


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$xy + yz + xz$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$2xy = (x-2)^2, \quad x(z-2) = xy$$

$$(x-2)^2 = xy - 2z + 4$$

$$(10^{30001} - 1)^3$$

$$= 10^{30001 \cdot 3} - 10^{30001 \cdot 2}$$

$$+ 10^{30001} - 1$$

$$- (x+y+z)^2 + 12$$

$$2x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 2z^2 - 4z$$

$$= 2xz + 2xz + 2yz$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0$
 $y \geq (10 - x)2\sqrt{3}$
 $y \geq (x - 10)2\sqrt{3}$
 $a^3 - 2a^2 \geq a^2 - 2a$
 $a^2 - 2a \left(\frac{a}{6} - 1 \right)$
 $a = 6$
 $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a + 22$
 $(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 1)$
 $(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5)$
 $a^6 - 4a^5 + 4a^4 - 72 + 12a^5$
 $a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 72$
 $a^2 - 2a$
 $a^3 - 2a^2$
 $\frac{a^3 - 2a^2}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy(x-z) = -2z + 2x + z^2 - x^2$$

$$y(x-z) = -2(x-z) - (x-z)(x+z)$$

$$x - 4z = 2xy(x-z) \quad (y+2+x+z) = 0$$

$$x^2 = -2z + z^2$$

$$x + y + z = -2$$

$$z = -2 - x - y$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 4 + 4x + 4y + 2xy = 0$$

$$(2x + y + z)^2 + (2y + x + z)^2 = 0$$

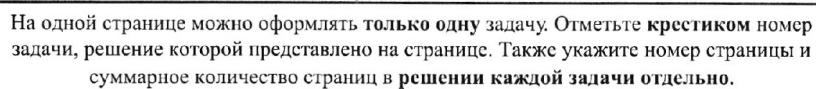
$$\frac{C_n^2}{C_n^5} = \frac{h!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$$

$$\frac{C_n^4 \cdot C_n^5}{C_n^4 \cdot C_n^2} = \frac{h!}{4! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{h!}{5! \cdot (n-5)!}$$

$$\frac{h!}{4! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{h!}{5! \cdot (n-5)!}$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$



СТРАНИЦА
3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

30° m.k.
 arcos $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Сер
-нлауык
Укмар

$$S = S_{12} - \frac{S_{17}}{2}$$

$$= \frac{\pi (12^2 + (4\sqrt{3})^2)}{2} - \frac{\pi \cdot 8^2}{2} - \pi (12^2 + (4\sqrt{3})^2) \cdot \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

