



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0$$

Перемножим эти три равенства:

$$xy \cdot yz \cdot zx = (z+3) \cdot x(x+3) \cdot y(y+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3) = (xy + 3x + 3y + 9)(z+3) =$$

$$= xyz + 3xz + 3yz + 9z + 3xy + 9x + 9y + 27 =$$

$$= xyz + 3xy + 3yz + 3zx + 9x + 9y + 9z + 27$$

$$3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + 27 = 0 \quad | :3$$

$$xy + yz + zx + 3(x + y + z) + 9 = 0$$

$$3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2 + 3x + 3y + 3z + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 6y + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + (y+3)^2 - 9 + (z+3)^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим произвольное число из n девяток: $\overbrace{99 \dots 99}^n$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } n^3 &= \overbrace{99 \dots 99}^n = (10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1 = \\ &= (10^{3n} - 1) - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n = \underbrace{99 \dots 99}_{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n \end{aligned}$$

Это действие означает, что та девятка, которая стоит на месте разряда 10^{2n} , уменьшается на 3, то есть становится ~~шестёркой~~ 6.

Это действие ~~также~~ означает, что к той девятке, которая стоит на n -ом месте (читая справа налево), прибавляется 3. Происходит переносимение $\Rightarrow$ переход через десяток. Теперь на месте этой девятки стоит 2, а все девятки, стоящие между этой двойкой и шестёркой (на месте $2n$), превращаются в нули, а шестёрка на $2n$ -ом месте станет семёркой.

В итоге в числе $\overbrace{99 \dots 99}^n$ осталось $3n - (n + 1) = 2n - 1$ девяток ~~и~~ (отнимаем от $3n$ именно $n + 1$, т.к. все девятки на местах с n по $2n$ включительно изменились на другие цифры, а их количество равно $2n - n + 1 = n + 1$).

Значит, если число состоит из 40000 девяток, то в числе n^3 будет $2n - 1$ девятка, то есть $40000 \cdot 2 - 1 =$

$$= \boxed{79999} \text{ девяток}$$

Ответ. 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

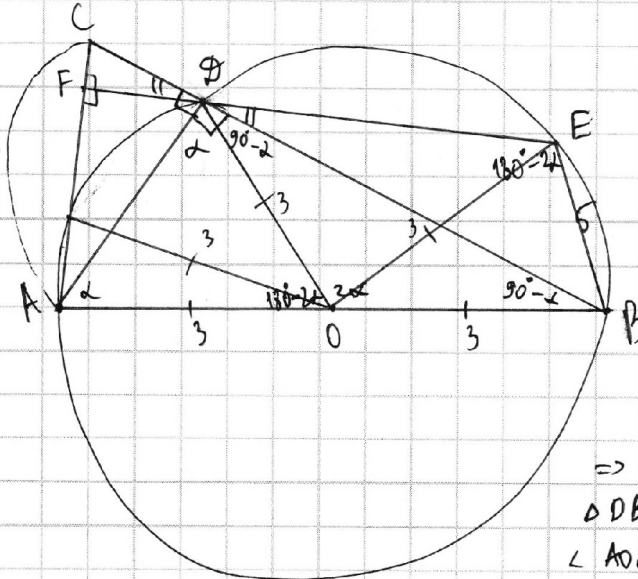
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\omega \subset \text{diam. } AB$
 $\omega \cap BC = \emptyset$
 $F \in AC$
 $\emptyset F \perp AC$
 $\emptyset F \cap \omega = E \neq \emptyset$
 $BE = 5$
 $AB = 6$
 $AC = 10$
 $AF = ?$



Проведём радиусы
 AO, EO .

$$AO = EO = BO = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Проведём AD .

$\angle ADB$ опирается на диаметр, значит, прямой.

Пусть $\angle DAO = \alpha$.

Тогда $\angle ADO = \alpha$,

т.к. $\triangle AOD$ — $\triangle$.

$$\angle BOD = 90^\circ - \alpha.$$

$$\Rightarrow \angle OBD = 90^\circ - \alpha, \text{ т.к.}$$

$\triangle OBD$ — $\triangle$.

$$\angle AOE = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle BOE = 2\alpha$$

$$\angle DEB = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle CDA = 90^\circ$$

По т. синусов:

$$\frac{BE}{\sin \angle BDE} = 2R$$

$$\frac{5}{\sin \angle BDE} = 6.$$

$$\sin \angle BDE = \frac{5}{6}$$

$$\angle BDE = \angle CDF.$$

$$\frac{CF}{CD} = \sin \angle CDF = \frac{5}{6}$$

$$CF \cdot AF = FD^2$$

$$AF = AC - CF = 10 - CF$$

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle CDF$$

$$\cos \angle ADF = \sin \angle CDF = \frac{5}{6} = \frac{FD}{AD}$$



1 2 3 4 5 6 7

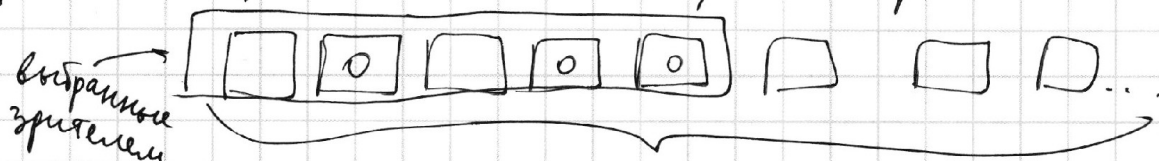
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

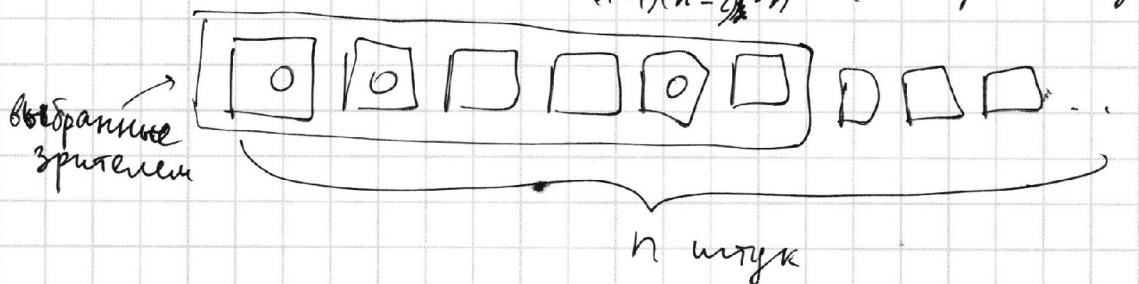
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у ведущего n коробок. ~~Нужно~~ Провернём задачу: пусть зритель выбрал 5 коробок из n штук, а не говорит ведущему. Затем ведущий кладёт случайно в некоторые коробки по одному шарiku, всего 3 шарика. Тогда нужно найти вероятность того, что все три шарика, которые положили ведущий, лежат в ~~каких-то~~ каких-то из выбранных зрителем коробках. ~~Нужно~~ Эта вероятность равна:



$$P_1 = \frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} = \frac{60}{(n-1)(n-2)n} \quad (в первом случае)$$



$$P_2 = \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1} \cdot \frac{4}{n-2} = \frac{120}{(n-1)(n-2)n}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{120 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2) \cdot 60}}{1} = 2$$

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

n_5 и n_6 — корни

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

n_3 и n_8 — корни

Если n_3, n_5, n_6 и n_8 — члены некоторой непостоянной арифметической прогрессии, то выполняется равенство:

$$n_5 + n_6 = n_3 + n_8.$$

По т. Виета;

$$n_5 + n_6 = a^2 - a$$

$$n_3 + n_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4(a^2 - a) = a(a^2 - a)$$

$$(a^2 - a)(a - 4) = 0$$

$$a^2 - a = 0 \text{ или } a - 4 = 0$$

$$\underline{a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 4}$$

Проверим:

1) при $a = 0$.

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$-\sqrt{5}$	-1	1	$\sqrt{5}$
"	"	"	"
n_5	n_3	n_8	n_6

Арифметическая прогрессия (непостоянная) либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, поэтому $n_i < n_j < n_k$ или $n_i > n_j > n_k$ при $i < j < k$.

Но здесь ~~$a = 0$~~ одновременно $n_6 > n_8$ и $n_6 < n_3$, что невозможно. $a = 0$ не подходит.

2) при $a = 1$.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
"	"	"	"
n_5	n_3	n_8	n_6

~~$a = 1$~~ То же самое, что и при $a = 0$. $a = 1$ не подходит.

пусть для удобства
наша арифметическая
прогрессия
возрастает
(это не вылезет)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) при $a=4$:

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$D = 144 + 4 = 148 =$$

$$= 4 \cdot 37 = (2\sqrt{37})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{37}}{2} =$$

$$= 6 \pm \sqrt{37}$$

$$4x^2 - 48x + a^2(2a^2 + 2a - a^4) - 4 =$$

$$= 4x^2 - 48x + 16(32 + 2 - 256) - 4 =$$

$$= 4x^2 - 48x + 16 \cdot (-222) - 4 =$$

$$= 4x^2 - 48x - 4 \cdot (888 + 1) =$$

$$= 4x^2 - 48x - 4 \cdot 889 = 0.$$

$$x^2 - 12x - 889 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 889 =$$

$$= 148 + 4 \cdot 888 = 37 \cdot 4 + 4 \cdot 24 \cdot 37 =$$

$$= 37 \cdot 100 = 3700 = 10\sqrt{37}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$6 - 5\sqrt{37}$$

"
 h_3

$$6 - \sqrt{37}$$

"
 h_5

$$6 + \sqrt{37}$$

"
 h_6

$$6 + 5\sqrt{37}$$

"
 h_8

Эти числа являются соответствующими членами арифметической прогрессии с первым членом $h_1 = 6 - 9\sqrt{37}$ и разностью $d = 2\sqrt{37}$.

$a = 4$ подходит.

Ответ: $a = 4$.

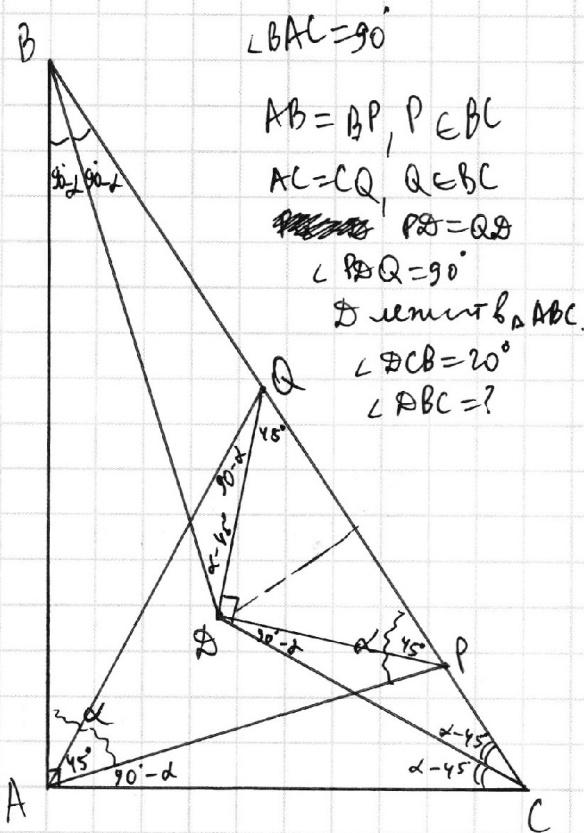


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BAC = 90^\circ$$

$$AB = BP, P \in BC$$

$$AC = CQ, Q \in BC$$

$$\angle BDC = 90^\circ$$

$$\angle BDC = 90^\circ$$

Д — центр $\triangle ABC$.

$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$\angle DBC = ?$$

Точка D — точка пересечения биссектрис $\angle ABC$ и $\angle ACB$
 $\Rightarrow BD$ и CD — биссектрисы.

$$\angle ABD = \angle DBC, \angle ACD = \angle DCB$$

$$\triangle ABP \sim \triangle BPA \Rightarrow \angle BAP = \angle PBA = \angle BPA = \angle PAB = \angle PCA = \angle CQA = \angle CQA = \angle CQA$$

$$\text{Пусть } \angle BAP = \alpha. \text{ Тогда } \angle BPA = \alpha, \angle ABP = 180^\circ - 2\alpha, \angle ABD = \angle DBC = 90^\circ - \alpha.$$

$$\angle CAP = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle PAC + \angle BCA = \alpha$$

$$90^\circ - \alpha + \angle BCA = \alpha$$

$$\angle BCA = 2\alpha - 90^\circ$$

$$\angle BCD = \angle DCA = \alpha - 45^\circ$$

$$\triangle DQP \sim \triangle PQR \Rightarrow \angle DQP = \angle PQR = 45^\circ$$

$$\angle AQC = \angle QAC = \frac{180^\circ - (2\alpha - 90^\circ)}{2}$$

$$= \frac{270^\circ - 2\alpha}{2} = 135^\circ - \alpha$$

$$\angle PAQ = (135^\circ - \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ$$

$$\angle AQP = (135^\circ - \alpha) - 45^\circ = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle BDC = 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ$$

$$\angle PDC = 45^\circ - (\alpha - 45^\circ) = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle BCD + \angle DBC + \angle BDC + \angle DCP + \angle PCQ + \angle CQP =$$

$$= \alpha - 45^\circ + \alpha - 45^\circ + 90^\circ + 90^\circ - \alpha +$$

$$+ 90^\circ - \alpha = 180^\circ \text{ — верно.}$$

$$\alpha - 45^\circ = 20^\circ$$

$$\alpha = 65^\circ$$

$$\angle DBC = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

Ответ: 25° .

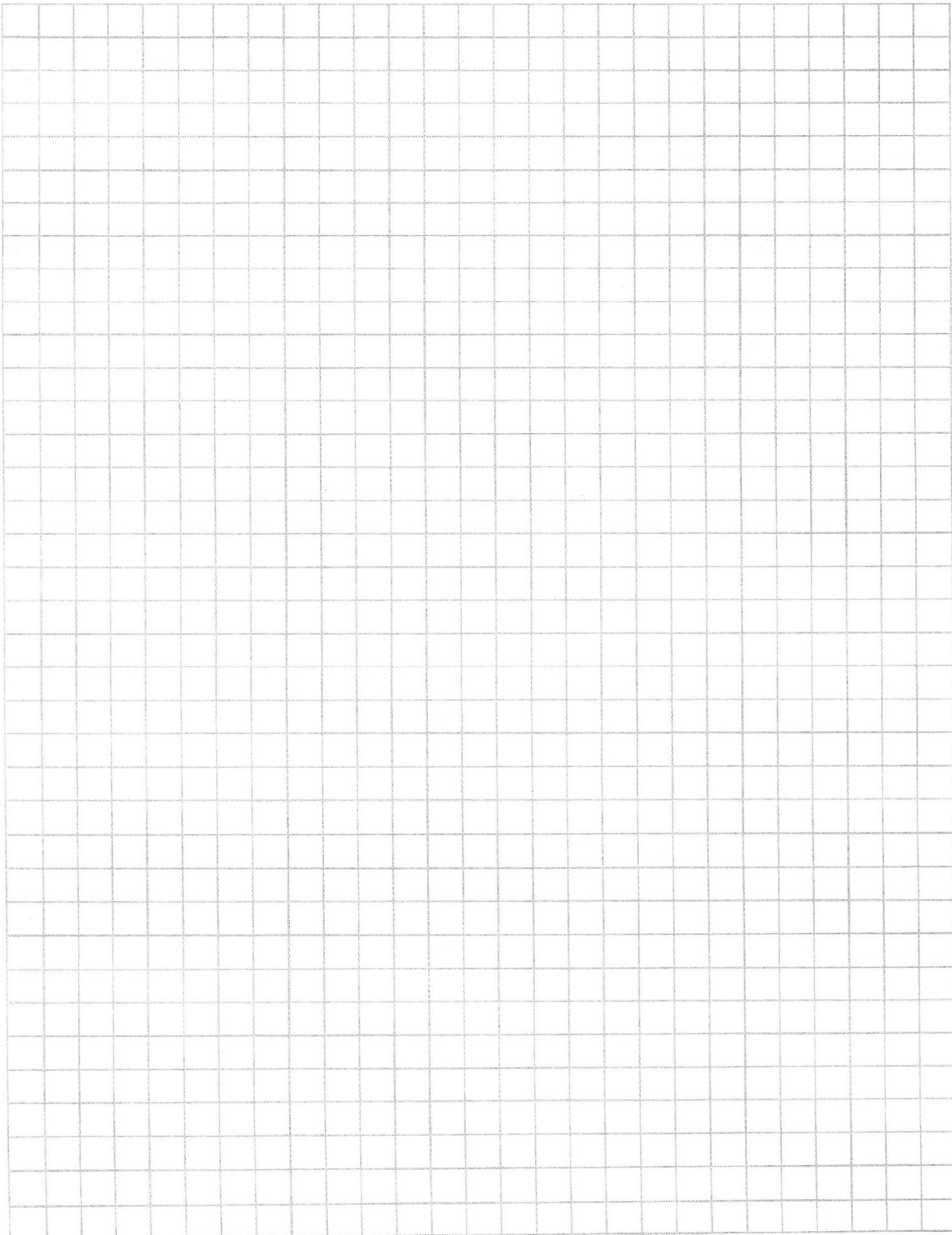


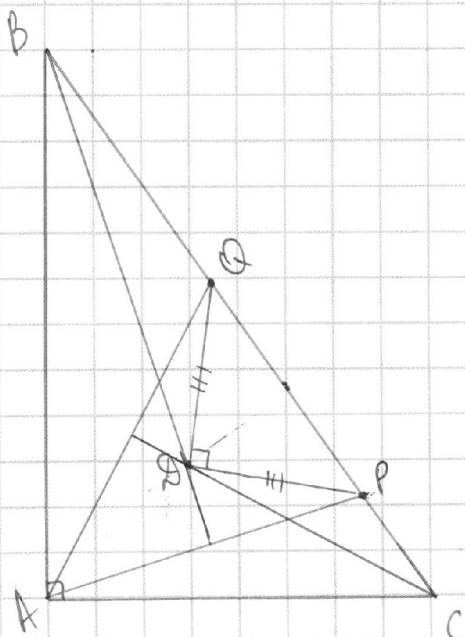
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
^ ИЗ ^

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$xy, z \neq 0$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(z+3) = xy \\ x(x+3) = yz \\ y(y+3) = zx \end{cases}$$

$$z(z+3) = \frac{y^2(y+3)}{z}$$

$$\frac{y(y+3)}{z} \cdot \left(\frac{y(y+3)}{z} + 3 \right) = yz$$

$$z^2(z+3) = y^2(y+3)$$

$$\frac{y^2(y+3)^2}{z^2} + \frac{3y(y+3)}{z} = yz$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$\frac{y(y+3)}{z} = x$$

$$x = \frac{y(y+3)}{z}$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} =$$

$$= \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{(xyz)^2}$$

$$(xyz)^2 = (x+3)(y+3)(z+3)xyz$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$= (xy + 3x + 3y + 9)(z+3) = xyz + 3xz + 3yz + 9z +$$

$$+ 3xy + 9x + 9y + 27 = xyz + 3(xy + yz + zx) + 9(x+y+z) + 27$$

$$3(xy + yz + zx) + 9(x+y+z) + 27 = 0$$

$$xy + yz + zx + 3x + 3y + 3z + 9 = 0$$

$$3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2 + 3x + 3y + 3z + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 6y + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 - 9 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

N2.

$$9 - 1 = 8 \quad 9^3 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$99 - 3 = 96 \quad 99^3 =$$

$$999 - 5 = 994 \quad 999^3 =$$

$$10000 - 200 + 1 = 9799$$

$$100000 - 2000 + 1 = 97800$$

$$1000000 - 20000 + 1 = 976000$$

$$10000000 - 200000 + 1 = 9740000$$

$$100000000 - 2000000 + 1 = 97200000$$

$$1000000000 - 20000000 + 1 = 970000000$$

$$(10-1)^3 = 10^3 - 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000 - 300 + 30 - 1 = 729$$

$$99^3 = (100-1)^3 = 1000000 - 3 \cdot 100000 + 3000 - 1 = 970299$$

$$999^3 = (1000-1)^3 = 1000000000 - 300000000 + 300000 - 1 = 997000299$$