



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 & (3) \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$yz = 4x + x^2 \quad (2)$$

$$zx = 4y + y^2 \quad (3)$$

$$(1) \cdot (2) \cdot (3): xy \cdot yz \cdot zx = (4z + z^2)(4x + x^2)(4y + y^2)$$

$$(xyz)^2 = xyz(x+4)(y+4)(z+4)$$

$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{xy}{z} + 4xy + 4yz + 4zx + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$4(xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 16) = 0$$

$$xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 16 = 0 \quad (4)$$

$$(1) + (2) + (3): xy + yz + zx = 4x + 4y + 4z + x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$(4) + (5): xy + yz + zx = xy + yz + zx + 8x + 8y + 8z + x^2 + y^2 + z^2 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 - 32 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$$

Answer: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{25.000} = \underbrace{100 \dots 00}_{25.000} - 1 = 10^{25.000} - 1$$

Требуется найти к-во ~~раз~~ ^{указов} в десяти записи числа $n^3 = (10^{25.000} - 1)^3 = 10^{75.000} - 3 \cdot 10^{50.000} + 3 \cdot 10^{25.000} - 1$

$$\text{рассмотрим число } a = 10^{75.000} - 3 \cdot 10^{50.000} + 3 \cdot 10^{25.000} = n^3 + 1$$

$$a = 10^{25.000} (10^{50.000} - 3 \cdot 10^{25.000} + 3) \quad \text{т.е. } a : 10^{25.000} \Rightarrow \text{последние}$$

25.000 цифр десяти записи a - нули. А ~~оставшиеся~~ оставшиеся цифры образуют число $b = \frac{a}{10^{25.000}} = 10^{50.000} - 3 \cdot 10^{25.000} + 3$

$$\text{рассмотрим число } c = b - 3 = 10^{50.000} - 3 \cdot 10^{25.000} = 10^{25.000} (10^{25.000} - 3)$$

$$c : 10^{25.000} \Rightarrow \text{последние } 25.000 \text{ цифр числа } c \text{ это нули.}$$

$$\text{А оставшиеся цифры образуют число } 10^{25.000} - 3 = \underbrace{10 \dots 00}_{25.000} - 3 =$$

$$= \underbrace{999 \dots 997}_{24999}$$

$$\text{Значит } c = \underbrace{99 \dots 99700 \dots 00}_{24999} \Rightarrow b = c + 3 = \underbrace{99 \dots 99700 \dots 003}_{24999}$$

$$\Rightarrow a = 10^{25.000} \cdot b = \underbrace{99 \dots 99700 \dots 00300 \dots 00}_{24999} \Rightarrow n^3 = a - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{99 \dots 99700 \dots 00}_{24999} \underbrace{0299 \dots 99}_{25.000} \quad \text{Тогда понятно, что } n^3 \text{ состоит}$$

из 24999 нулей, одной двойки, одной семёрки и 24999 + 25000 = 49999 ну-

лей Ответ: 49999

* обозначение: $x : y$ значит что $x, y \in \mathbb{N}$, x делится без остатка на y



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\begin{cases} xy = z^2 + 4z \\ xz = 4y + 4z \\ yz = 4x + 4z \end{cases}$$~~

~~$$x^2y^2z^2 + 4xz + 4yx + 4y - xy - yz - xz = 0$$~~

~~$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16z + 16x + 16y - 4xy - 4xz - 4yz = 0$$~~

~~$$+ 4xy + 4y^2 + 4xz + 16y + 16z + 16x$$~~

~~$$4x^2y^2z^2$$~~

~~$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$$~~

~~$$4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 64 = 0$$~~

~~$$x + y + z + 8y + 8z + 8x + 48 = 0$$~~

C_n^k - обозначение сочетания - кол-во способов
выбрать k элементов из n элементов ($n \geq k \geq 0$)
вычисляются по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда игрок может открыть 5 коробок, всего различных вариантов "открытия" - C_n^5 , где n - общее кол-во коробок. Число вариантов же, когда игрок указывает на 3 коробки с шариками: $C_{n-3}^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, поделу что способов взять каждую из трёх коробок с шариками равно 1, а взять оставшиеся два: C_{n-3}^2

⇒ Поскольку любой способ взять 5 коробок равновероятен, то вероятность победы $\varphi_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Если же игрок может открыть 8 коробок, то всего различных вариантов "открытия" - C_n^8 , а варианты, когда игрок указывает на все 3 коробки с шариками: $C_{n-3}^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, так как способ взять каждую из трёх коробок с шариками равно 1, а взять оставшиеся пять: C_{n-3}^5

значит вероятность победы $\varphi_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

⇒ искомая величина $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} =$

$$= \frac{\frac{(n-3)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!} \cdot \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}} = \frac{2! \cdot 8!}{5! \cdot 5!} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{28}{5} = 14$$

т.е. вероятность, что выиграет второй игрок
ответ: в 14 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~чис~~ действит. Числа x_4, x_5 - корни ур-ния:

$$f_1: x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

тогда, по т. Виета: $x_4 + x_5 = -(- (a^2 - a))$

$$x_4 + x_5 = a^2 - a$$

Пусть действит. числа x_2, x_7 - корни ур-ния:

$$f_2: 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

тогда, по т. Виета: $x_2 + x_7 = \frac{-(- (a^3 - a^2))}{2}$

$$x_2 + x_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

Пусть первое число арифм. прогрессии, в ко-ую входят числа x_2, x_4, x_5, x_7 равно b , а шаг (т.е. разность) ~~между~~ ^{между}

между соседними элементами $(x_{i+1} - x_i \text{ где } \forall i \in \mathbb{N}, i \geq 1)$

равна d ($d \neq 0$)
тогда по формуле члена арифм. прогрессии: $x_2 = b + d$ $x_4 = b + 3d$

$$x_5 = b + 4d \quad x_7 = b + 6d \quad \text{Тогда } x_4 + x_5 = 2b + 7d = x_2 + x_7$$

т.е. $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad | \cdot 2$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \quad | - 2a^2 + 2a$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $a \neq 1$: $f_1: x^2 - (1-1)x + \frac{2-1}{3} = 0$

$f_1: x^2 + \frac{1}{3} = 0$ Но $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$
противоречие.

у ур-ния нет действит. корней $\Rightarrow a \neq 1$

При $a = 0$: $f_1: x^2 - (0-0)x + \frac{2-0}{3} = 0$

$f_1: x^2 + \frac{2}{3} = 0$ Но $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$

у ур-ния нет действит. корней. противоречие $\Rightarrow a \neq 0$

При $a = 2$: $f_1: x^2 - (2-2)x + \frac{2-8}{3} = 0$

$f_1: x^2 - 2x - 2 = 0$

Есл. $D_{f_1} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$

корни $f_1: \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$f_2: 2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \quad | :2$

$f_2: x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$

$f_2: x^2 - 2x - 74 = 0$

$D_{f_2} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-74) = 4 + 4 \cdot 74 = 4 \cdot 75 = 300$

корни $f_2: \frac{2 \pm \sqrt{300}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$

Тогда при $b = 1 - 5\sqrt{3}$, $d = 2\sqrt{3}$ $\left. \begin{matrix} x_2 = 1 - 5\sqrt{3} \\ x_7 = 1 + 5\sqrt{3} \end{matrix} \right\}$ - корни f_2

$\left. \begin{matrix} x_4 = 1 - \sqrt{3} \\ x_5 = 1 + \sqrt{3} \end{matrix} \right\}$ корни $f_1 \Rightarrow a = 2$ подходит

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6 \quad - \text{пер-во фигуры A}$$

Заметим, что пер-во, ~~симметрично~~ верное при

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \text{ верно и при } \begin{cases} x = -x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow A \text{ симметрична от-но}$$

O_y . Тогда рассмотрим только часть фигуры A, где

$$x \geq 0 \Rightarrow y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

Рассмотрим случаи:

$$1) y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

тогда пер-во фигуры A: $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Leftrightarrow 2y \leq 36 \Leftrightarrow y \leq 18$

$$\alpha \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15 \Rightarrow x \leq 6\sqrt{3}(y - 15)$$

Значит часть фигуры в этом случае ограничена прямыми:

O_y , $y = 18$, $x = 6\sqrt{3}(y - 15)$ (прямая является треугольником, ограничен-
ной или) $\Rightarrow$ является треугольником $(0, 18)$; $(0, 15)$; $(18\sqrt{3}, 18)$

$$2) \begin{cases} y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$$

Неудобно заметить, что, если пара $(x_1; y_1)$

удовлетв. системе 1 то пара $(x_2; y_2)$ то

удовлетв. системе 2) при этом, что

$$15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$15 - y + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$15 - y_2 = y_1 - 15 \quad \text{т.е. } y_1 = 30 - y_2, \quad y_1 + y_2 = 30$$

А значит часть фигуры в этом случае симметрична части фигуры в случае 1) относительно прямой $y = \frac{1}{2} \cdot 30 \Leftrightarrow y = 15$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если часть фигуры в этом случае ограничена треугольником, симметричным тр-ку с вершинами $(0; 18); (0; 15); (18\sqrt{3}; 18)$ относительно $y = 15$. Это треугольник $(0; 12); (0; 15); (18\sqrt{3}; 12)$.

$$\begin{cases} y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 15 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ -(y - 15) \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow |y - 15| \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \quad x \geq 0$$

$$2 \times \frac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow y - 15 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \quad y - 15 \geq -\frac{x}{6\sqrt{3}}$$

пер-во фигуры A:

$$\text{тогда } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

$$x \leq 18\sqrt{3}$$

Все углы части фигуры A

$$\text{ограничена кривыми } \begin{cases} y - 15 = \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ -y + 15 = \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

и кривыми $oy, x = 18\sqrt{3}$

часть фигуры ограничена треугольником

с вершинами: $(0; 15); (18\sqrt{3}; 12); (18\sqrt{3}; 18)$

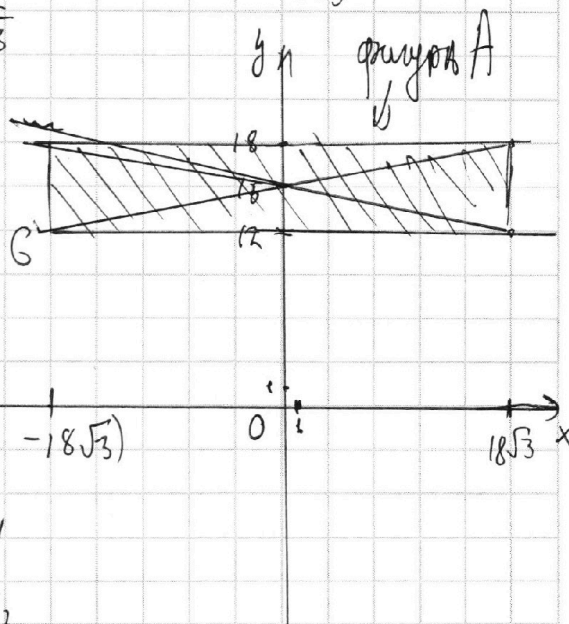
z_1, z_2, z_3

z_2, z_3

z_1, z_3

Важно отметить, что при $x \geq 0$ других случаев нет

$\Rightarrow$ Фигура A при $x \geq 0$ ограничена кривыми с вершинами $(0; 15); (0; 18); (18\sqrt{3}; 18)$



$\Rightarrow$ все точки, расположенные входящие в круг, ограниченный $\omega(o'; R)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
48 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не будут покрыты

Точки же, рас-е го которых OD ^{выглядит не все} 129036 ^{выглядит}

и ~~на~~ ~~для~~ ~~каждых~~ ~~точка~~, ~~составляя~~ ~~от~~ ~~на~~ $(0,0)$

ка OC на рас-и OD 129036 ~~есть~~ точка Z .

поэтому $\omega_z(0; R=OZ)$ ^{конечно, что:} ^{существует} ~~есть~~ дуга ^{этой ω_z} между точкой,
входящей в A и Z точкой Z , ~~этой дуги~~ градусная
мера которой не больше π , и на которой A ~~и~~ Z ~~каждый~~
является концом, а не началом; дуги, ~~присоединяем~~ "изги"
по ней в сторону по часовой стрелке] $\Leftrightarrow$ [Z ~~будет~~
покрыта] (из определения поворота на 180° по часовой стрелке)

$\Rightarrow$ в правой полу-ти ~~есть~~ OY ^{покрыты} будут ~~покрыты~~ все
точки на допустимом расстоянии (OD 129036)

~~А в левой - только те, которые окружены в фигуре~~
ограниченных:

Пусть $\omega_2 \in OY = (N; N')$ причем N лежит выше OX

Пусть $X \in OY = M$, $X' \in OX = M'$

Тогда в левой полу-ти, исходя из вышеказанных кри-

терия, будут ~~то~~ ~~покрыты~~ только фигуры, огранич:
дугой AN , прямой BC , прямой CM , прямой MN ; (0)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
54 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дуги $K'N'$; прямыми: $N'M'$; $M'X'$; $X'Y'$ (2)

Вопрос: площадь каждой из этих фигур:

Потому что эти все фигуры равны.

Вычисляем площадь фигуры (1).

Пусть $K = (0, 18)$ тогда в прямоугольнике

ширина $BO = 36$, а $OK = 18$. Тогда $\angle BOK = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BOK = 90^\circ$

Значит, сектор BOK - $\frac{1}{6}$ площади окружности ω_2 ,

а площадь $S_{BOK} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18\sqrt{3} = 9 \cdot 18\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ площадь фигуры BMK : $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 36^2 - 9 \cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow$ площадь

фигуры (1): $\frac{1}{6} \pi \cdot 36^2 - 9 \cdot 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3} \cdot 6 = 54(6\pi - \sqrt{3})$

$= 18(12\pi - 3\sqrt{3}) = 54(6\pi - \sqrt{3})$

А значит суммарная площадь: $54(6\pi - \sqrt{3}) \cdot 2 = 648\pi - 108\sqrt{3}$

А площадь покрытой области в левой правой полушарии:

$$\frac{S_{\omega_2}}{2} - \frac{S_{\omega_1}}{2} = \frac{1}{2} \pi (36^2 - 12^2) - \frac{1}{2} \pi 48 \cdot 24 = 24\pi^2 - 576\pi$$

(S_{ω_1} - площадь окружности ω_1)

$\Rightarrow$ суммарная площадь $648\pi + 576\pi - 108\sqrt{3} = 1224\pi - 108\sqrt{3}$

Ответ: $1224\pi - 108\sqrt{3}$



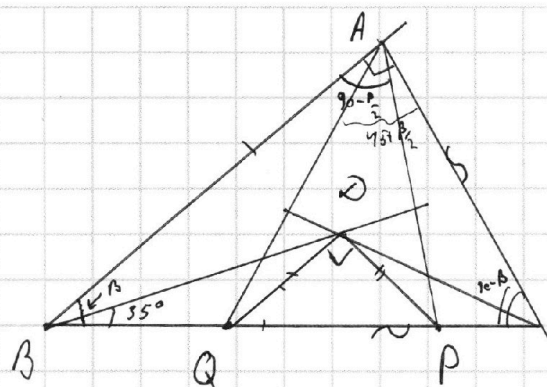
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



с основанием AP

$$1) \text{ Пусть } \angle CBA = \beta$$

2) Тогда сумма углов $\triangle ABC$:

$$\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\beta + 90^\circ + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \beta$$

3) $\triangle PBA$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle BPA = \angle BAP$. Тогда сумма углов $\triangle BPA$:

$$\angle PBA + \angle BPA + \angle BAP = 180^\circ$$

$$\beta + 2\angle BAP = 180^\circ \Rightarrow \angle BAP = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

4) $\triangle ACQ$ - равнобедр. с основанием AQ $\Rightarrow \angle CAQ = \angle AQC$

Тогда сумма углов $\triangle CQA$: $\angle CAQ + \angle AQC + \angle ACQ = 180^\circ$

$$2 \cdot \angle CAQ + 90^\circ - \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAQ = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

Заметим, что $\angle BAP + \angle QAC = \angle QAP + \angle BAC = 90^\circ$

$$90^\circ - \frac{\beta}{2} + 45^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \angle QAP \Rightarrow \angle QAP = 90^\circ$$

6) Пусть O - центр окр-ти $\triangle AQP$. Тогда $OQ = OP$ т.е.

(1) O лежит на серединном перпендикуляре к QP,

(2) O лежит внутри $\triangle AQP$, (3) центральный угол $\angle QOP = 2 \cdot \angle QAP = 90^\circ$

т.е. O лежит на окр-ти с диаметром QP. Заметим, что формула, удобная для выражения всех условий (1) и (3) только одна. И этим условием удовлетв.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6 \cdot 6\sqrt{3}$$

$$\underbrace{\left|6\sqrt{3}y - 90\sqrt{3} + x\right|}_{a} + \underbrace{\left|6\sqrt{3}y - 90\sqrt{3} - x\right|}_{a} \leq 36\sqrt{3}$$

$$\cancel{|a+x|} + \cancel{|a-x|} \leq 36\sqrt{3}$$

$$|a+2x| + |a| \leq 36\sqrt{3}$$

$$\text{При } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0: \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq y - 15$$

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$2y - 30 \leq 6$$

$$y \leq 18$$

$$\cancel{30\sqrt{3}} \quad x \leq 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

$$\text{При } \begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \leq 18\sqrt{3}$$

$$\text{При: } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 15 - y$$

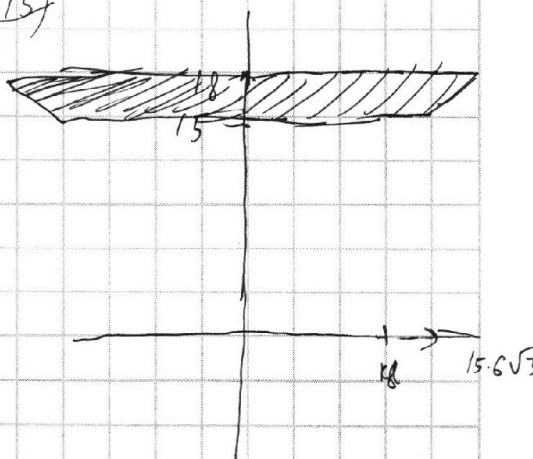
$$\begin{cases} y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 15 - y \\ \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 15 - y \end{cases} \Rightarrow |x| \leq 6\sqrt{3}(15 - y)$$

$$2y - 30 \geq -6$$

$$y \geq 12$$

$$|x| = 6\sqrt{3}y - 6\sqrt{3} \cdot 15$$

$$y = \frac{|x|}{6\sqrt{3}} + 15$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow D=O$ - центр окруж-ти $\triangle AQR$

7) Тогда D лежит на сер. пер-е к AP , так и точка B
(поэтому что $BA=BP$) $\Rightarrow$ в равнобед $\triangle ABP$ $\sim$ BD - сер. пер.
соед. AP к AP

$\Rightarrow$ по св-ву равнобед тр-ка BD - биссектриса $\angle PBA$

$\Rightarrow \angle PBD = 35^\circ = \frac{1}{2} \angle CBA = \beta \Rightarrow \beta = 70^\circ \Rightarrow \angle ACQ = 90^\circ - \beta = 20^\circ$

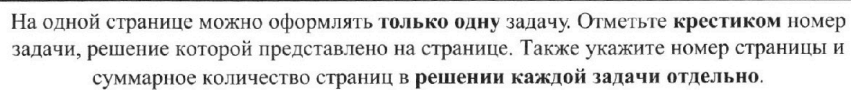
8) Заметим, что D лежит на сер. пер-е к AQ , так и точка C (поэтому что $CA=CQ$) $\Rightarrow$ в равнобед $\triangle QCA$
соед. AQ

CD - сер. пер. к $AQ \Rightarrow$ по св-ву равнобед треугольника

AD и CD - биссектриса $\angle QCA \Rightarrow \angle DCB = \angle DCQ = \frac{1}{2} \angle QCA = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$

Ответ: 10°

* сер. пер. - серединный перпендикуляр



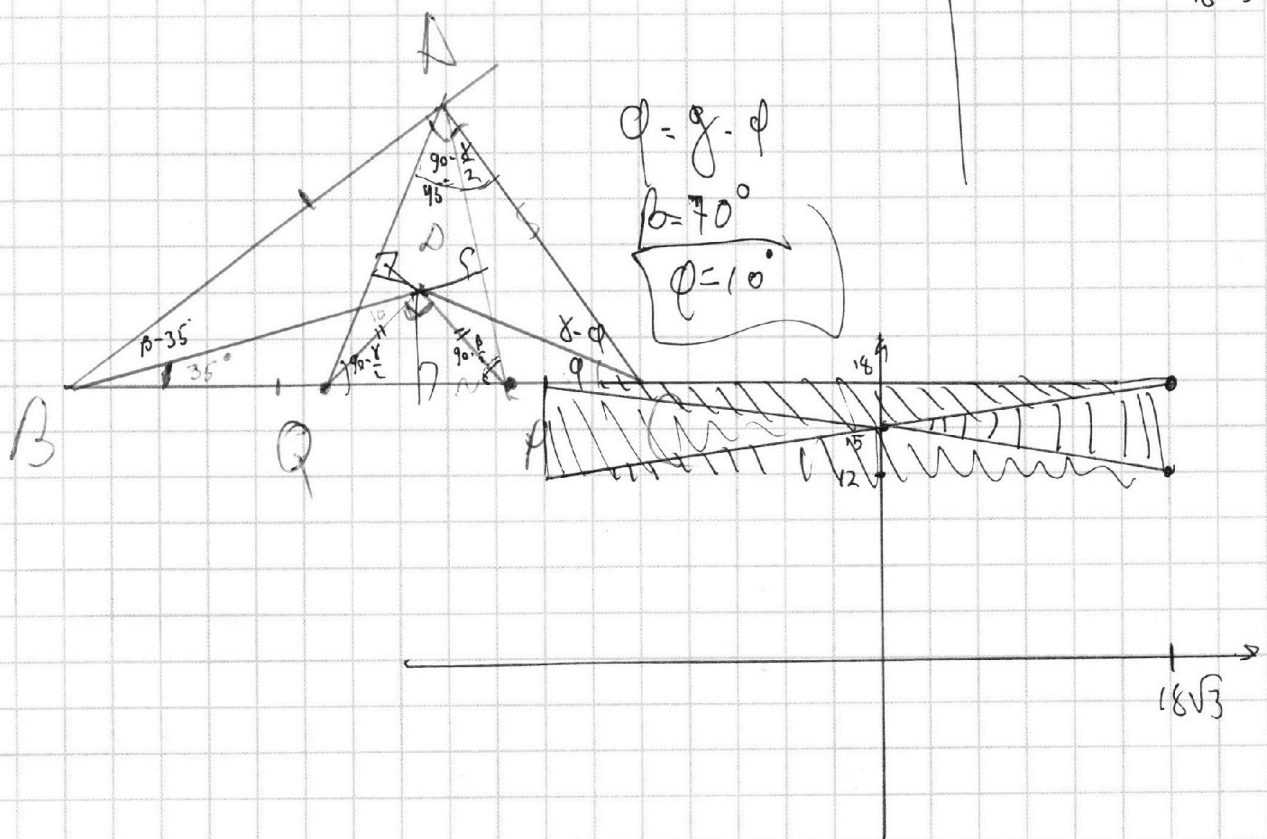
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$g \leq \frac{6}{2\sqrt{2}}$$

$$|2\sqrt{3}y - 30| \leq (6\sqrt{3}y - 15 + x) + |6\sqrt{3}y - 15 - x| \leq 6$$

$$30 - 12\sqrt{3} \approx 9.6$$



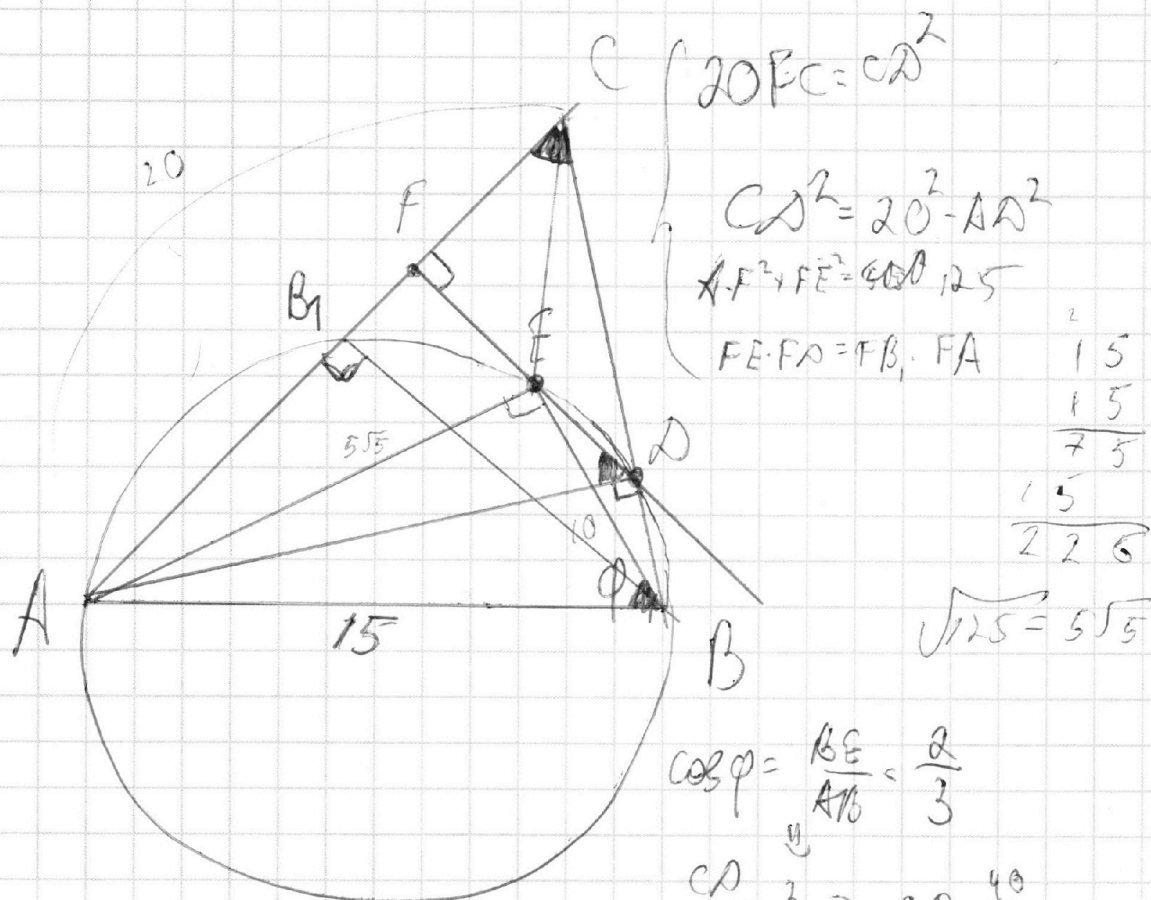


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \varphi = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow CD = \frac{40}{3}$$

$$FC = \frac{1040 - 40}{20 \cdot 9} = \frac{80}{9} = 9 \frac{1}{9}$$

$$AF = \frac{100}{9}$$

$$= 10^{25000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = 10^{25000} (10^{30000} - 3 \cdot 10^{25000} + 3) - 1$$

$$10^{50000} - 3 \cdot 10^{25000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = 10^{25000} (10^{25000} - 3 \cdot 10^{25000} + 3) - 1$$

$$99 \dots 99700 \dots 08299 \dots 99$$

$$99 \dots 99700 \dots 08299 \dots 99$$

$$49.999$$

$$00000000000000000000$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z(z+4) \\ yz = x(x+4) \\ xz = y(y+4) \end{cases}$$

$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xyz}{z} = x^2y + 4xy + 4yz + 4xz + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$xy + yz + xz + 4x + 4y + 4z + 16 = 0$$

$$\cancel{x^2y + 2yz + 2xz + 8x + 8y + 8z + 48 = 16}$$

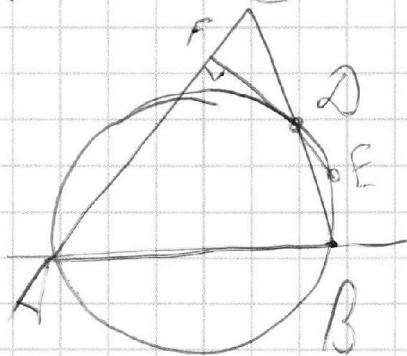
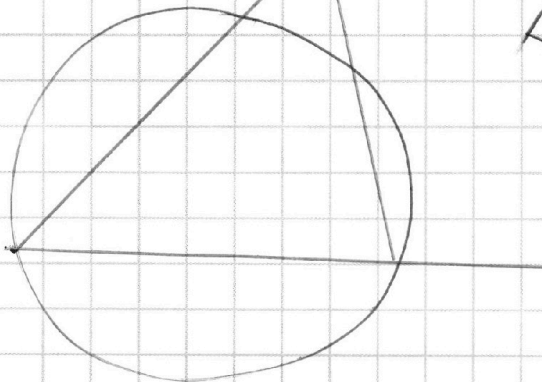
$$x^2 + 8x + y^2 + 8y + z^2 + 8z + 48 = A$$

$$x^2 - xy - y^2 - y^2 + z^2 - xz + 4x + 4y + 4z + 32 = A$$

$$xy + yz + zx + 48 + 4x + 4y + 4z = A$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = A$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$$

$$(x_1+x_2) = a^2 - a$$

или

$$(x_3+x_4) = a^3 - a^2$$

$$a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a - 1 = a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

при $a=1$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

при $a=0$:

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\text{при } a=1: x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$2x^2 - 2 - 8 - 4 = 0$$

$$\text{при } a=2: x^2 - 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$2x^2 - 4x - 12 - 16 - 4 = 0$$

$$-64 - 8 - 2$$

$$x_1+x_2 = x_3+x_4$$

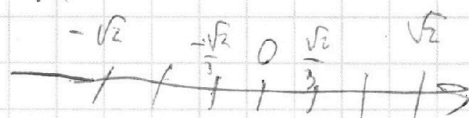
$$|x_1-x_3| = 2 \cdot |x_1-x_2|$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

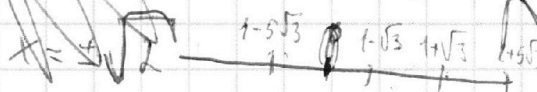
$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$



$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_{34} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$



$$x_{12} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad D = 4 + 8 = 12$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0 \quad D = 4 + 28 = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11 карбон

$$\frac{C_n^2}{C_n^5}$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}}$$

$$\begin{array}{r} 1648 \\ 576 \\ \hline 229 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 54 \\ \hline 452 \\ 108 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\frac{C_n^5}{C_n^8}$$

$$\frac{C_n^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_n^2} = \frac{\frac{n!}{5!(n-5)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}} =$$

$$= \frac{5! \cdot 5!}{8! \cdot 2!} \cdot \frac{(n-8)! \cdot (n-2)!}{(n-5)! \cdot (n-5)!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5!} \cdot \frac{(n-8)(n-3)(n-4)}{(n-5)(n-6)(n-7)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \dots =$$

$$= \frac{28}{5} \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$