



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1) z^2 \geq 0, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0}$$

↓

$$xy + 6z \geq 0, yz + 6x \geq 0, zx + 6y \geq 0$$

$$\frac{xy}{z} \geq -6; \frac{yz}{x} \geq -6; \frac{zx}{y} \geq -6$$

$$x-6 = \frac{yz}{x}; y-6 = \frac{xz}{y}; z-6 = \frac{xy}{z}$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z) = 2(xy + yz + zx)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2(z^2 - 6z + x^2 - 6x + y^2 - 6y) - 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$x - \frac{yz}{x} + y - \frac{xz}{y} + z - \frac{xy}{z} + 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$\frac{x^2 - yz}{x} + \frac{y^2 - xz}{y} + \frac{z^2 - xy}{z}$$

$$a \leq 36 \cdot 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$x(x-6) - (y-6)y = \frac{yz}{x} - \frac{xz}{y} = \frac{z(y^2 - x^2)}{xy}$$

$$x-y = \frac{z(x-y)(-x-y)}{xy} \Rightarrow \text{либо } x=y \text{ (случай рассмотрен выше)}$$

либо

$$1 = -\frac{z(x+y)}{xy}, xy = -zx - zy \Rightarrow xy + zx + zy = 0$$

$$\text{Тогда } a \leq 36 \cdot 3 \quad (a = 36 \cdot 3 \text{ достигается при } x=y=z=0)$$

$$a = 108 \text{ при } x=y=z=0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = a$$

Рассматриваются все

x, y, z :

при $x=y=z=0$:

$$a = 36 \cdot 3 = 108$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + z^2 - 6z + y^2 - 6y + 27 = 27$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 27$$

Это сфера с центром в точке $(3; 3; 3)$ и радиусом 3.

При этом $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = r^2$ — сфера с радиусом r и центром $(6; 6; 6)$. Крайние случаи — когда

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) + 36 \cdot 3 = 36 \cdot 3 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 =$$

$$\frac{(-zx - xy)^2}{x^2} + \frac{(-zy - xy)^2}{y^2} + \frac{(-zx - zy)^2}{z^2} =$$

$$\frac{(z+y)^2}{x^2} + \frac{(z+x)^2}{y^2} + \frac{(x+y)^2}{z^2} = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) =$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = a$$

$$36 \cdot 3 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$a = 36 \cdot 2 = 72$$

Пусть $x = y$ (теперь $xy + yz + xz = 0$ не обязательно выполняется).

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 \Rightarrow z^2 - 6z \geq 0; z \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty) \\ zx = -6x + x^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$X = \sqrt{Z^2 - 6Z}$$

$$Z \sqrt{Z^2 - 6Z} = -6 \sqrt{Z^2 - 6Z} + Z^2 - 6Z$$

$$(Z+6) \sqrt{Z^2 - 6Z} = \sqrt{Z^2 - 6Z} \cdot \sqrt{Z^2 - 6Z}$$

либо

$$Z^2 - 6Z = 0$$

$$Z = 0:$$

↓

$$X = 0, Y = 0$$

иногда уже
рассмотрен,

$$a = 108$$

$$Z = 6:$$

$$X = 0, Y = 0$$

$$a = 72$$

симметричные
аналогичные
случаи
для $x=6, y=z=0$
и $y=6, x=z=0$

либо

$$Z+6 = \sqrt{Z^2 - 6Z}$$

$$Z^2 + 12Z + 36 = Z^2 - 6Z$$

$$18Z = -36; Z = -2$$

$$X = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$Y = X = 4$$

$$(-2; 4; 4)$$

симметричные
аналогичные
случаи
 $x=-2, y=z=4$
 $y=-2, x=z=4$

$$a = 4^2 + 4^2 + \frac{8^2}{8^2} = 64 + 32 = 96$$

Ответ: выражение может принимать значения
72; 96; 108.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$n = \underbrace{999\dots 9}_{20001}$$

$$n+1 = \underbrace{1000\dots 0}_{20001}$$

$$n^3 = \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} - 1 \right)^3 = \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^3 - 3 \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^2 + 3 \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right) - 1$$

$$\left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^3 = \underbrace{10\dots 0}_{40003} \underbrace{0000}_{20000}$$

$$3 \cdot \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^2 = \underbrace{3000\dots 0}_{40002}$$

$$\begin{array}{r} 1000\dots 0 \\ - 1000\dots 0 \\ \hline 999970000 \end{array}$$

$$\left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^3 - 3 \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right)^2$$

$$\begin{array}{r} 999970000 \\ + 300000000 \\ \hline 1299970000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1299970000 \\ + 999970000 \\ \hline 2299940000 \\ + 999970000 \\ \hline 3299910000 \end{array}$$

$$3 \left(\underbrace{1000\dots 0}_{20001} \right) = \underbrace{3000\dots 0}_{20001}$$

$$\underbrace{3000\dots 0}_{20001} + \underbrace{999970000}_{20000} \underbrace{0000}_{40002}$$

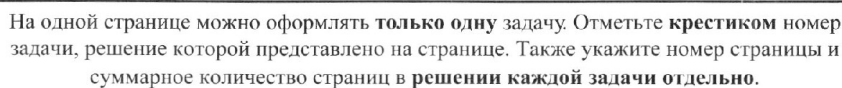
$$\begin{array}{r} 3299910000 \\ + 300000000 \\ \hline 3599910000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3599910000 \\ - 1 \\ \hline 3599909999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3599909999 - 1 : \\ \hline 3599909999 \\ \hline 1 \end{array}$$

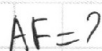
Суммарно $20002 + 20002 = 40004$ гектар

Ответ: 40004 гектар.

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20 \quad AB = 20 \quad BE = 9$$

$$DF \perp AC \quad D = \omega \cap BC$$

$$E = DF \cap \omega, E \neq \emptyset$$

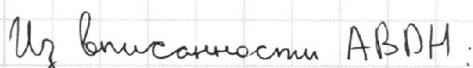
0 - центр окружности.

Пробегим вместе ВМ.

B - точка ~~на~~ на диаметре AB ,

т.е. вписанный угол, опирающийся на AB , прямой. Углы, опирающиеся на AB , будут острыми, если вершина угла лежит вне окружности, и тупыми, если она лежит внутри $\Rightarrow K$ лежит на окружности.

$AB = 10 = \text{диаметр} \Rightarrow \text{радиус } r = 5$. Тогда для точек на окружности $OA = OK = OE = OD = OB = 5$. А также $\angle ADB = \angle AEB = \angle AKB = 90^\circ$. Отсюда следует, что AD — высота.



$$\angle CHD = 180^\circ - \angle AHD = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABD) = \angle ABD$$

$$\angle HCD = \angle ACB, H \in AC, D \in BC$$

Получаю по 2 уравн $\Delta HCP \sim \Delta BCA$

$\text{PF} + \text{CH} \Rightarrow \text{PF} - \text{breana } \delta \text{CPH} \text{ y } \text{D}, \text{ m.e.}$

$$\frac{DF}{AD} = k, \text{ если } k = \frac{HD}{AB}, \text{ констр. } \overline{AD} \text{ и } \overline{AB} \text{ параллельны.}$$

$$\frac{DF}{AD} = \cos \angle EDA, \text{ m.k. } \angle AFD = 90^\circ.$$

$\angle EDA = \angle EBA$ как вписанные, опирающ. на одну дугу.

$$\triangle EBA: \angle E = 90^\circ \Rightarrow \text{по т. Пифагора } AB^2 = BE^2 + EA^2, \quad AE = \sqrt{19}$$

$$\cos \angle EBA = \frac{BE}{AB} = 0,9$$

$$K = 0,9. \quad K = \frac{DM}{AB} \Rightarrow DM = 9 = BE, \text{ тогда } EPBH - \text{прямоугольник}$$

($ED \perp AC$, $BH \perp AC \Rightarrow ED \parallel BH$ + $ED = BH$ вписанный; вписан. трапеция p/o)

$$AF = \sin \angle EDA \cdot AD$$

$$Og = \cos \angle EPA = \cos \angle FPA = \sin \angle FAP \text{ w.z. } \triangle FPA$$

$$\sin \angle FAD = \sin \angle CAD = 0,9 = \frac{CD}{AC} \quad (\angle ACD, \angle ADC = 90^\circ) \Rightarrow CD = 18.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение $\triangle ACD$ по теореме Пифагора:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2; AD = \sqrt{100 - 324} = 2\sqrt{19}$$

Решение $\triangle AFD$ по теореме Пифагора:

$$AD^2 = AF^2 + FD^2;$$

$\frac{DF}{1}$

$$AF = \sin \angle EDA \cdot AD$$

$$\sin \angle EDA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EDA} = \sqrt{0,19} = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$AF = 2\sqrt{19} \cdot \sqrt{0,19} = \frac{38}{10} = 3,8$$

Ответ: $AF = 3,8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

54)

n коробок, в 3-х шарик

Способов, при которых игрок выигрывает:

C_{n-3}^2 , т.к. 3 коробки „зафиксированы“ (игрок обязан выбрать их для выигрыша), ещё 2 коробки выбираются из оставшихся $(n-3)$. При этом всего способов выбрать 5 коробок из n : C_n^5

вероятность выигрыша $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = P_1$

Когда разрешается открыть 9 коробок:

Аналогично, выигрышных способов C_{n-3}^6 , всего способов C_n^9 , т.е. $P_2 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^9}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(\frac{(n-3)!}{(n-9)!6!} \cdot \frac{n!}{(n-5)!5!} \right)}{\left(\frac{(n-3)!}{(n-5)!2!} \cdot \frac{n!}{(n-9)!9!} \right)} = \frac{\left(\frac{1}{6!5!} \right)}{\frac{1}{2!9!}} = \frac{2!9!}{6!5!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9! \cdot 2!}{6! \cdot 5!} = \frac{\overset{3}{9} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{14}{5} = 2,8$$

Ответ: вероятность выигрыша выросла в

$$\frac{14}{5} = 2,8 \text{ раза.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $a = 4$:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = -2; 2$$

$$5x^2 - 16x = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{16x}{5}}$$

По возрастанию: $-\sqrt{\frac{16x}{5}}$; -2 ; 2 ; $\sqrt{\frac{16x}{5}}$, но $2 - (-2) \neq \sqrt{\frac{16x}{5}} - 2$,

т.е. $a = 4$ не подходит

При $a = 5$:

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$D = 625 + 4 \cdot 5 \cdot 295 = 25(25 + 4 \cdot 45) =$$

$$25 \cdot 205$$

$$x = \frac{25 \pm 5\sqrt{205}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{205}}{2}$$

По возрастанию: $\frac{5 - \sqrt{205}}{2}$, $\frac{5 - \sqrt{29}}{2}$, $\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$, $\frac{5 + \sqrt{205}}{2}$

$\sqrt{205} - \sqrt{29} \neq 2\sqrt{29}$, т.к. $\sqrt{205} \in (14; 15)$, $3\sqrt{29} \in (15; 18)$

$a = 5$ не подходит.

Ответ: таких значений нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Корни ^{NS} ур-ия $x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$: x_6 и x_7

Корни ур-ия $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0$: x_5 и x_8

По м. Виета:

$$\begin{cases} x_6 + x_7 = a^2 - 4a \\ x_5 + x_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

Пусть шаг арифм. прогрессии b . Тогда:

$$x_6 = x_5 + b$$

$$x_7 = x_5 + 2b$$

$$x_8 = x_5 + 3b$$

$b \neq 0$,
прогрессия
непостоянная

$$x_8 - x_7 = x_6 - x_5$$

$$x_8 - x_7 - (x_6 - x_5) = 0; \quad x_8 + x_5 - (x_6 + x_7) = 0$$

$$\frac{a^3 - 4a^2}{5} - (a^2 - 4a) = 0$$

$$\frac{a}{5}(a^2 - 4a) - (a^2 - 4a) = 0$$

$$\left(\frac{a}{5} - 1\right)(a^2 - 4a) = 0$$

$$a\left(\frac{a}{5} - 1\right)(a - 4) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \\ a = 4 \end{cases}$$

Проверим, все ли найденные значения подходят:

При $a = 0$:

~~$$x_6 + x_7 = x_5 + x_8 = 0 \Rightarrow 2x_5 + 3b = 0$$~~

$$x^2 - 4 = 0;$$

$$x = -2; 2$$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$x = -\sqrt{3}; \sqrt{3}$$

По возрастанию: $-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2$ т.е. 5-й шаг прогрессии —

одно из решений первого уравнения, противоречие, $a = 0$ не подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При повороте на $180^\circ (\pi)$ получим новое кер-во, которое задаётся поверн. фигура Φ' .

$$x \rightarrow -x$$

$$y \rightarrow -y$$

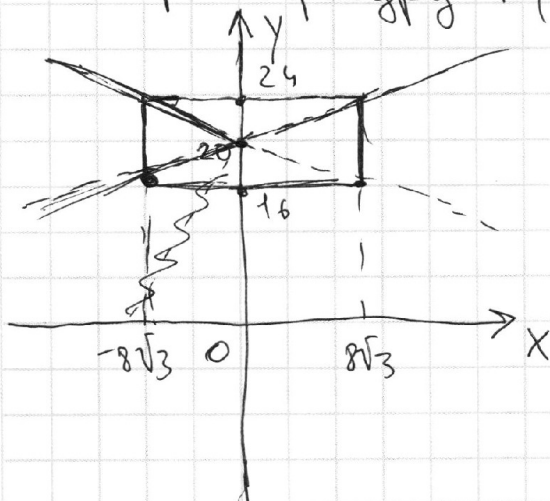
замена при повороте на π отн. начала координат, т.к. каждая точка $(x_1; y_1)$ переходит в $(-x_1; -y_1)$

$$\Phi': \left| -y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| -y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

$$\left| y + \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \right| + \left| y + \frac{x}{2\sqrt{3}} - 20 \right| \leq 8$$

выясним

Построим фигуру Φ (схематично, без учета масштаба)



проведём ~~линии~~ прямые

$$a = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 0; y = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$b = y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 0; y = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

Решим $\Phi: |a| + |b| \leq 8$

"Внешние" обеим прямым

$$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow 2y - 40 \leq 8; y \leq 24$$

Найдём т. перес. $y = 24$ с прямыми

$$a \text{ и } b: \begin{cases} 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 24; x = 8\sqrt{3} \\ 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 24; x = -8\sqrt{3} \end{cases}$$

"Внутренние" обеим прямым:

$$a \leq 0, b \leq 0$$

$$-2y + 40 \leq 8; y \geq 16$$

Аналогично, т. перес. $y = 16$ с a и b : $(-8\sqrt{3}; 16)$ и $(8\sqrt{3}; 16)$

"Внешние" обеим прямым:

$$a \leq 0, b \geq 0$$

$$-\frac{2x}{2\sqrt{3}} \leq 8; x \geq -8\sqrt{3}$$

"Внутренние" обеим прямым:

$$a \geq 0, b \leq 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{3}} \leq 8; x \leq 8\sqrt{3}$$

т.к. две стороны перпендикулярны и 2 верт.

Фигура Φ ограничена — прямоугольник, ограничена сторонами параллельными, соседние перпендикулярны

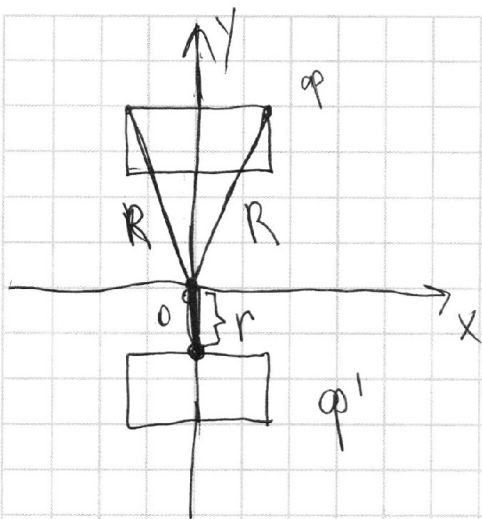
прямыми $y = 16, y = 24$ и $x = -8\sqrt{3}, x = 8\sqrt{3}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

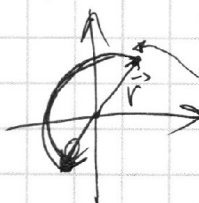
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Для каждой точки фигуры φ можно построить окружность с центром $(0;0)$ и радиусом, равным по модулю радиус-вектору из $(0;0)$ в эту точку.

Значит, при повороте на π каждая точка переходит в диаметрально противоположную на своей окружности. При этом за время поворота точка проходит полуокружность.



Площадь, занятая перемещением, тогда равна площади окружности, которую занимает

У первой окр-ты радиус R , у второй r . (в прямоугольнике, очевидно, найдётся точка, удалённая от $(0;0)$ на $x \in [r; R]$ (из непрерывности).

соответствующей самой удалённой от $(0;0)$ точке фигуры, минус площадь окружности, соответствующей самой близкой к $(0;0)$ точке фигуры.

Очевидно, что максимальная точка от $(0;0)$ лежит на $y=24$ и на $x=8\sqrt{3}$ (либо симм. на $y=24$ и $x=-8\sqrt{3}$).

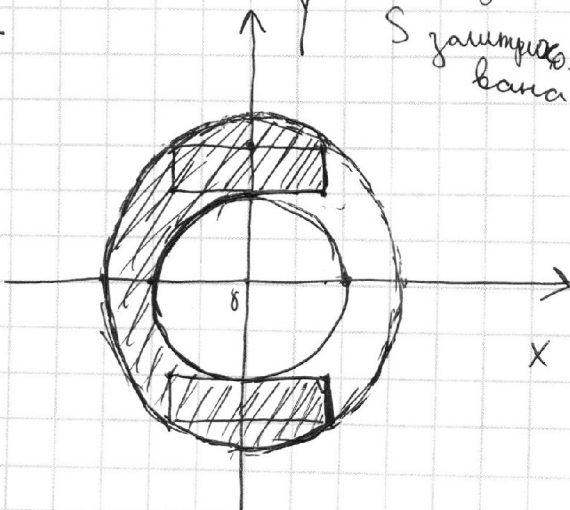
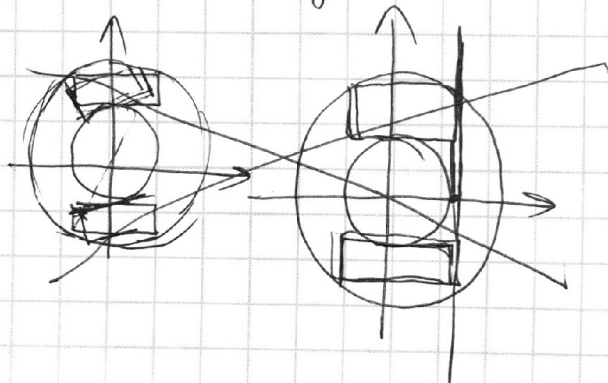
тогда по т. Пифагора $R = \sqrt{24^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2(3^2+3)} = 16\sqrt{3}$.

Наименее удалённая точка от $(0;0)$ — точка $(0;16)$.

$r=16$.

Искомая площадь $S = \pi R^2 - \pi r^2 =$

Искомая площадь S заштрихована





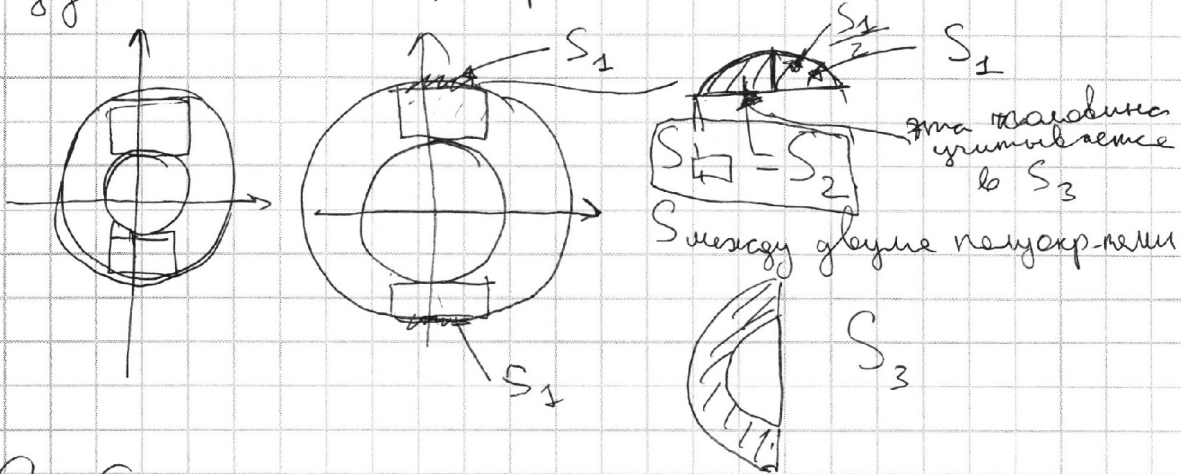
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разделим S на части, которые можно посчитать:



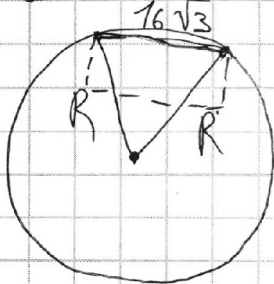
$$S = \frac{S_1}{2} \cdot 2 + S_3 + \frac{S_2}{2} \cdot 2 = S_1 + S_2 + S_3$$

Вторая половина S_2 учитывается в S_3

$$S_3 = \frac{1}{2} (\pi R^2 - \pi r^2) = 256\pi$$

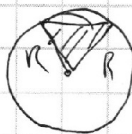
$$S_2 = S_{\square} = (24-16)(8\sqrt{3} - (-8\sqrt{3})) = 8 \cdot 16\sqrt{3} = 128\sqrt{3}$$

8 ~~4~~ S_1 :



$R = 16\sqrt{3} \Rightarrow$ треугольник равнобедренный, угол между радиусами 60° .

Тогда S_1 = площадь сектора минус площадь треугольника



$$S_{\text{сектора}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 256 \cdot 3 = 128\pi$$

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 256 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 192\sqrt{3}$$

$$S = 256\pi + 128\sqrt{3} + 128\pi - 192\sqrt{3}; \text{ Ответ: } S = 384\pi - 64\sqrt{3}$$

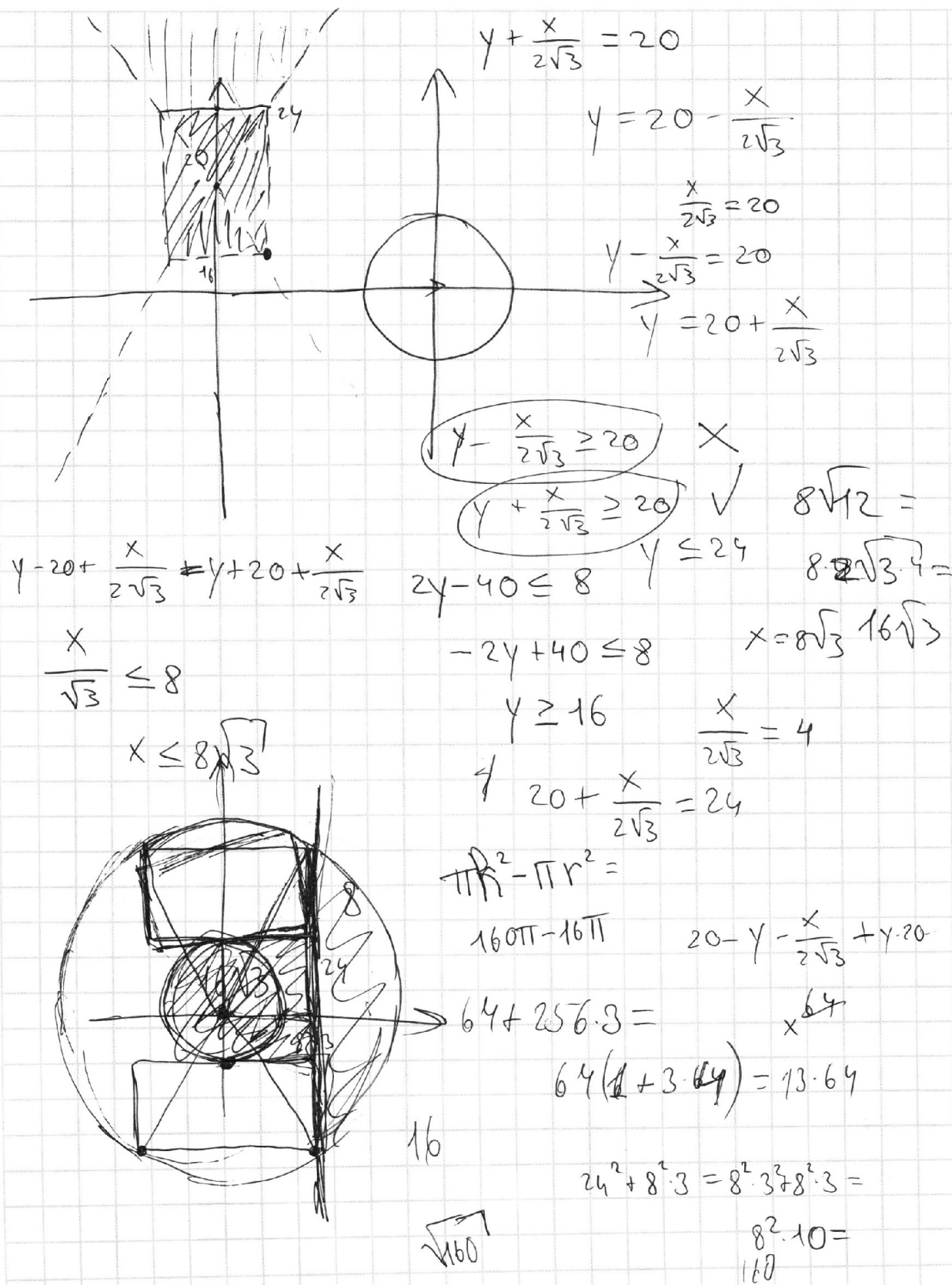


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



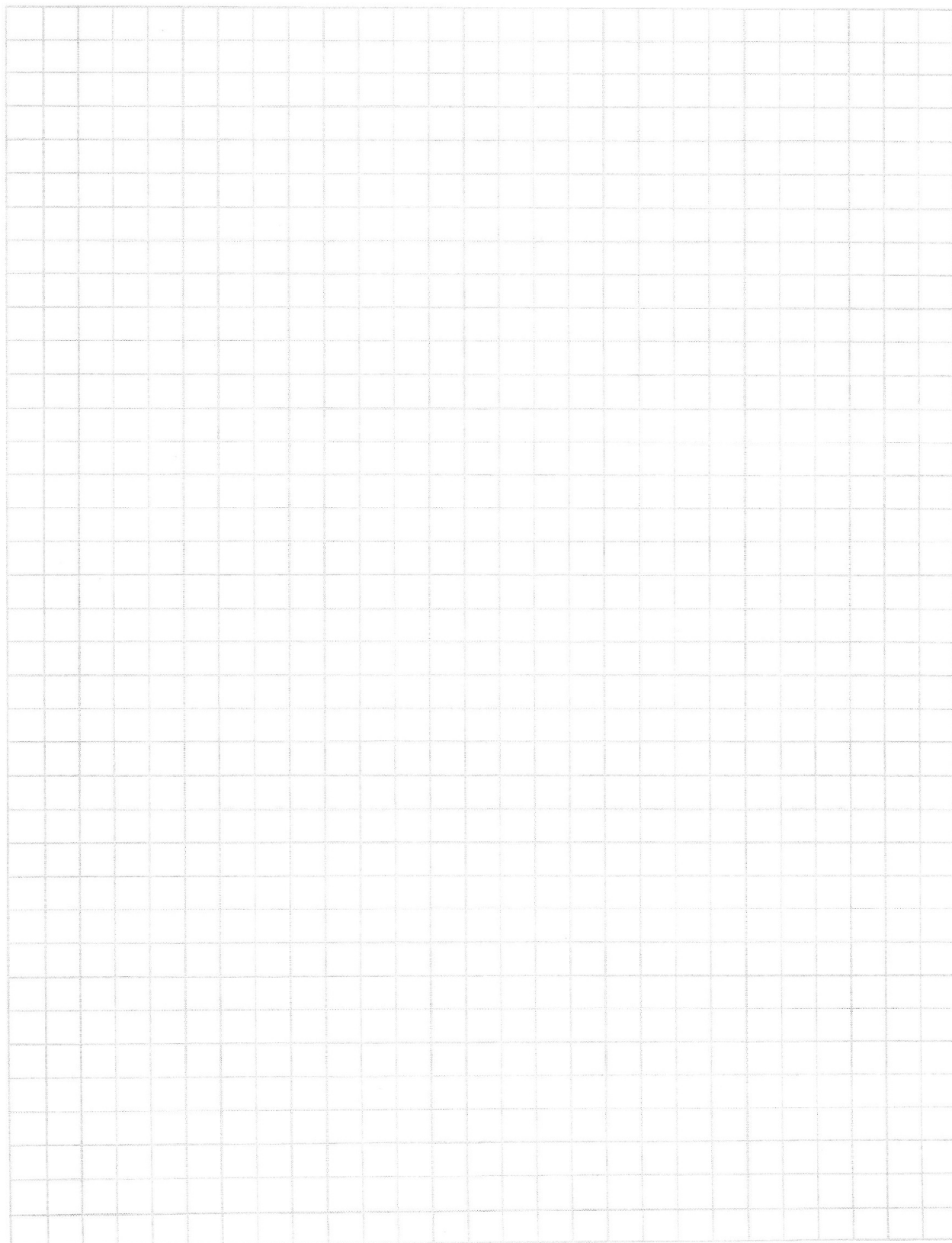


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$xy = -6z + z^2$$

$$yz = -6x + x^2$$

$$zx = -6y + y^2$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 \geq 0$$

$$yz + xy + zx - 6z - 6y - 6x \approx 36 \cdot 3$$

$$999 \dots 999$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 821 - 59 \times \\ \hline 251 \end{array}$$

$$z-6 = \frac{xy}{z}$$

$$125 - 4 \cdot 25$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = n$$

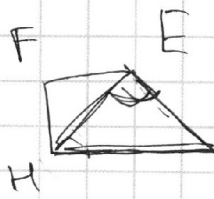
$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = n^2 + 2$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx =$$

$$\begin{array}{r} 48 \Sigma \\ 821 + \\ \hline 952 \end{array} \quad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12z - 12y - 12x$$

$$25 - 20$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 4y - 4x$$



$$\frac{AC}{PC}$$

$$\sqrt{33}; \sqrt{34}$$

$$\frac{DH}{AB} = 0,9$$

$$DH = 9$$

$$\sin \angle FAD = 0,9$$

$$= (2 \cdot 9) \cdot \frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{DF}{AD} = \sin \alpha$$

$$\triangle CDH \sim \triangle CAB$$

$$2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2$$

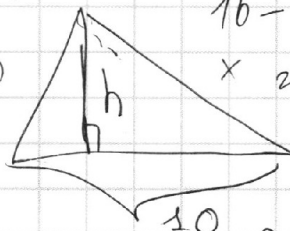
$$(a-1)^3 =$$

$$128 + 24 + 15 =$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CH}$$

$$16 - 24 + 4 =$$



$$\begin{array}{r} 02 \Sigma 20 \\ 821 + \\ \hline 251 \end{array}$$

$$2 \cdot 64 + 64$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 149 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$AF = 7$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 400 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59.55 \\ 59.55 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\frac{DF}{AD} = \frac{DH}{AB}$$

$$250 + 6 \cdot 25 + 15 = 295$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0$$

$$x_6 + x_7 = a^2 - 4a$$

$$x_6 \cdot x_7 = a^2 - 6a + 4$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) =$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

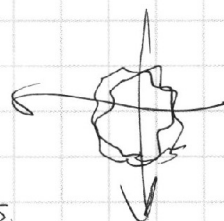
$$a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 =$$

$$16 - 64 + 48 + 48 - 16 > 0$$

$$16 + 64 + 48 - 48 - 16 > 0$$

$$x_5 + x_8 = (a^3 - 4a^2)$$

симметричные корни
и корень 1



$$x_5$$

$$x_6 = x_5 + x$$

$$x_7 = x_5 + 2x$$

$$x_8 = x_5 + 3x$$

$$x_6 + x_7 = x_5 + x_8$$

$$x_8 - x_7 = x_8 - x_6 = x_6 - x_5$$

$$14; 15$$

$$5; 6$$

$$10; 12$$

$$a^2 - 4a + a^3 - 4a^2 =$$

$$(a^2 - 4a)(a + 1) = 4 \frac{(x_5 + x_8) \cdot 4}{2} \approx 14$$

$$15; 18$$

$$a^3 - 4a^2 - a^2 + 4a = x_8 + x_5 - x_6 - x_7 = 0$$

$$a(a - 4)(a - 1) = 0$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{205} - \sqrt{29} &= \\ \frac{176}{\sqrt{205} + \sqrt{29}} &= 2\sqrt{29} \\ \begin{array}{r} 205 \\ -29 \\ \hline 176 \end{array} & \quad \begin{array}{r} 205 \\ 20 \\ \hline 176 \end{array} \end{aligned}$$

$$5(36 \pm 5)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

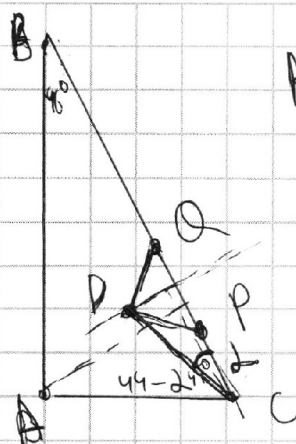
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB=BP$$

$$AC=CQ$$

(акр-мн...)
р/осв м. А

АМ-расс. Осв

$$\frac{yz}{x} - \frac{xz}{y} = \sqrt{z^2 - 6xz}$$

$$\frac{y^2 z - x^2 z}{xy} =$$

$$xy + 6z \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 \\ xz = -6x + x^2 \end{cases} \quad x = \sqrt{z^2 - 6z}$$

$$z\sqrt{z^2 - 6z} = -6\sqrt{z^2 - 6z} + z^2 - 6z$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = (z+6)\sqrt{z^2-6z}$$

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 - 2(xy + yz + zx) - 12(x + y + z)$$



$$xy \geq -6z \quad xy + 6z \geq 0 \quad \frac{z(-x-y)}{xy} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{xy}{z} \geq -6 \quad yz + 6x \geq 0$$

$$\frac{z(y^2 - x^2)}{xy} = x - y$$

$$(x - y - z)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - z^2 = -2x - 2y = xy$$

$$(x - y - z)(x - y - z) = x^2 - xy - xz + y^2 - xy - yz + z^2 - zx + zy$$