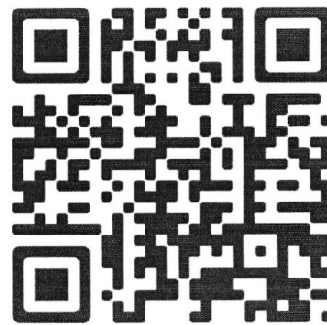




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$\cancel{x^2 y^2 z^2} = 24xyz + 9(xy z^2 + xy^2 z + x^2 yz) + 3(x^2 y^2 z + x^2 y z^2 + \cancel{x y^2 z^2} + \cancel{x y^2 z^2}) + \cancel{x^2 y^2 z^2} \quad |:3xyz \ (x, y, z \neq 0 \text{ по усл.})$$

$$9 + 3(x + y + z) + xy + yz + xz = 0$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = \\ &= x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z + 3(x + y + z) + 9 + 18 = xy + yz + xz + \\ &+ 3(x + y + z) + 9 + 18 = 18 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11}$$

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ \frac{AD^2}{AF^2} = \frac{36}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{AD^2} + \cancel{DC^2} = (AC - AF)^2 + FD^2 \\ AD^2 + (AC - AF)^2 + FD^2 = AC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 + \cancel{100} - 20AF + AF^2 + \cancel{FD^2} = \cancel{100} \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2AD^2 = 20AF \\ AD^2 = \frac{36}{11} AF^2 \end{cases}$$

$$\frac{36}{11} AF^2 = \frac{10}{2} AF$$

$$AF = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

Дано:

ω -окр.
AB-диаметр ω

$$AB=6$$

$$BC \cap \omega = \{D\}$$

$$AC=10$$

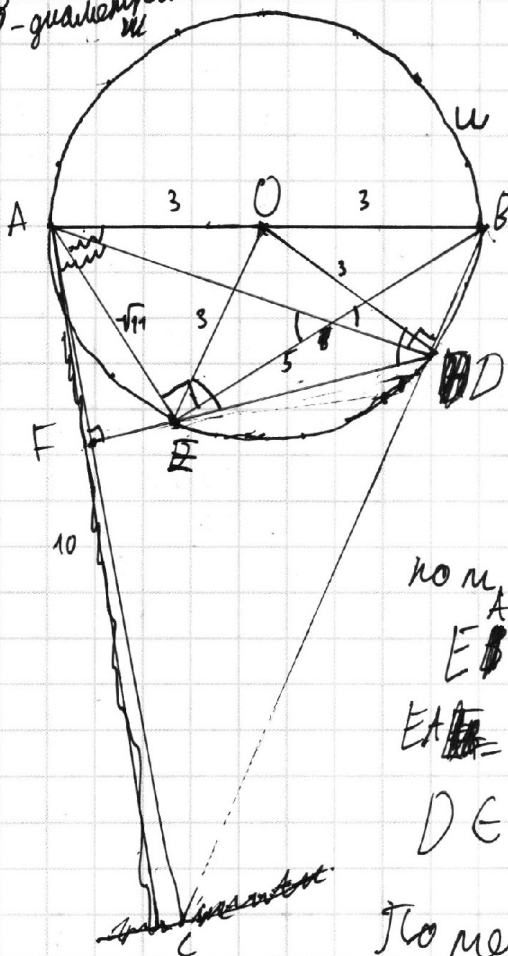
O-центр ω

$$F \in AC$$

$$FD \cap \omega = \{E\}$$

$$FD \perp AC$$

$$BE=5$$



Найти:

$$AF=?$$

Решение:

$$AB\text{-диаметр } \omega, E \in \omega \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$$

$$\text{по п. Пифагора } AE^2 + BE^2 = AB^2$$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$D \in \omega, AB\text{-диаметр } \omega \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$$

По теореме Пифагора

$$\begin{cases} AD^2 + DC^2 = AC^2 \\ FC^2 + FD^2 = DC^2 \\ AF^2 + FD^2 = AD^2 \end{cases}$$

$$\text{Также } \angle BAE = \angle BAC$$

$$AO = OE \text{ как радиусы} \Rightarrow \angle AOE = \angle BOE$$

$$\Rightarrow \angle AOE = 90^\circ - \angle AOE \text{ или } \angle ADE = \angle AOE \text{ как опирающиеся на одну дугу. } \angle FAD = 90^\circ - \angle FDA = 90^\circ - \frac{\angle AOE}{2} =$$

$$= \angle OAE \Rightarrow \angle FAE = \angle FAD - \angle EAD = \angle EAO - \angle EAD = \angle BAD \Rightarrow$$

$$\text{прямоугольные треугольники } ADB \text{ и } AFE \text{ подобны} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть n -к-во коробок всего
 изначально нам необходимо выбрать 5 коробок. У нас
 есть C_n^5 вариантов это сделать. Правильными
 будут C_{n-3}^2 вариантов, т.к. 3 коробки из них
 выбранных должны быть сюрпризом, т.е. мы
 можем выбрать любые 2 коробки из оставшихся
 $n-3$ коробок, т.е. вероятность выиграть $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$.
 Аналогично вероятность выиграть выбрав
 4 коробки = $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)!}}{\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{5! \cdot (n-5)!}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (n-3)(n-4)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изменим систему координат на $(x-a; \frac{y}{a})$, тогда
центр квадрата перейдет в $(a; 0)$, а $a \neq$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Рассмотрим $|x+y| + |x-y| \leq a$

При $x \geq y$ и $x > -y$ (I часть плоскости на рис.)

$$x+y+x-y \leq a$$

$$x \leq \frac{a}{2}$$

При $x \leq y$ и $x > -y$ (II часть плоскости на рис.)

$$x+y-x+y \leq a$$

$$y \leq a$$

При $x \geq y$ и $x \leq -y$ (III часть плоскости на рис.)

$$-x-y-x+y \leq a$$

$$-2x \leq a$$

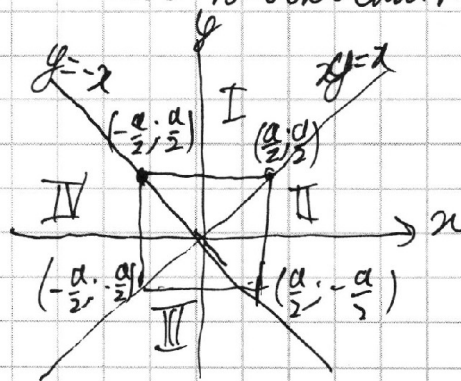
$$x \geq -\frac{a}{2}$$

При $x > y$ и $x \leq -y$ (IV часть плоскости на рис.)

$$-x-y+x-y \leq a$$

$$y \geq -\frac{a}{2}$$

Итого фигура - квадрат со стороной a и центром в центре координат





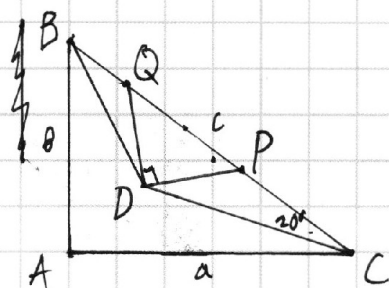
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



Дано:

$\angle BAC = 90^\circ$ $Q, P \in BC$ $BP = BA$
 $QC = CA$ $DP = DQ$ $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle DCB = 20^\circ$

Найти:

$\angle DBQ$

Решение:

Пусть $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$

$DP = DQ \Rightarrow \triangle DPQ - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle DQP = \angle DPQ = 90^\circ - \frac{\angle QDP}{2}$

$= 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow DQ = DP = \frac{QP}{\sqrt{2}}$ и $\angle DPC = 180^\circ - \angle DPQ =$
 $= 180^\circ - \angle DQP = \angle DQB = 130^\circ$

$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Докажем, что

$$\frac{DP}{PC} = \frac{BQ}{QD}$$

$$\frac{QP}{PC} = \frac{BQ}{QD}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = (c - a)(c - b)$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} + ab - ac - bc$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad \text{н.м.г.} \Rightarrow \frac{BQ}{QD} = \frac{DP}{PC}$$

$$\angle BQD = \angle DPC \Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle DPC \Rightarrow \angle QBD = \angle PDC = 180^\circ - \angle DPC - \angle PCQ = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = xy + yz + xz + 3x + 3y + 3z + 27$$

124

C_n^5

$\frac{C_n^2}{C_n^5}$

$\frac{C_n^3}{C_n^6}$

$999 \cdot 999 = 998001$

111 · 111 = 12321

$11^3 = 1331$

$111^3 =$

$(x+y)(x+z)(y+z)$

124

$$(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + xz)$$

$+ 2xy + 2$

$16 \cdot 3 = 54$

$$(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) + 24$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + yz + xz$$

$$x^2 y^2 z^2 = x^2 y^2 z^2 + 3x^2 y^2 z + 3x^2 y z^2 +$$

$$+ 3x y^2 z^2 + 9x y z^2 + 9x y z^2 + 4x^2 y z +$$

$$+ 24 x y z$$

$$\angle AOE = 180^\circ - \angle AOB$$

$$\angle OAE = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$$

$$3xy + 3xz + 3yz + 9(x+y+z) = 24$$

$$24 = 0$$

AF FD AD
BD DE

$$xy + xz + yz + 3(x+y+z) = 0$$

$$DC^2 + AD^2 = 100$$

$$AD^2 + BD^2 = 36$$

$$AD^2 = AF^2 + FD^2$$

$$AF^2 + BD^2 + 2FD \cdot DE + DE^2 = 11$$

$\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}$

$\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3}$

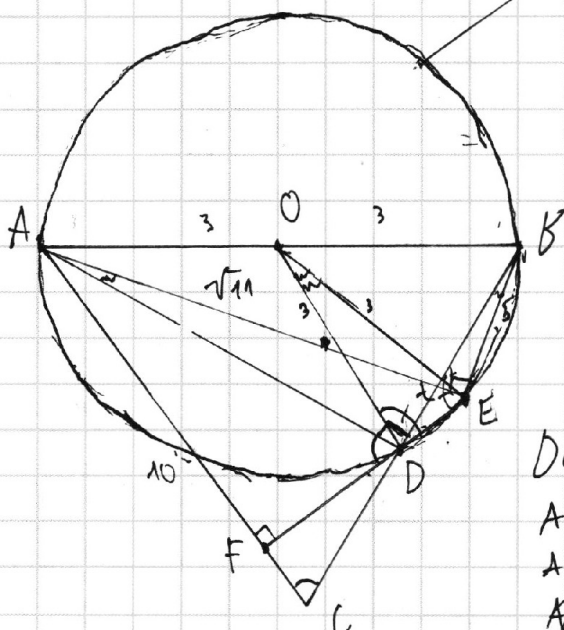
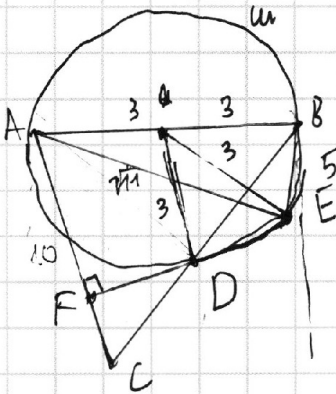
$\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2}$

$\frac{11}{11} \cdot \frac{11}{11} \cdot \frac{11}{11}$

$\frac{136}{136} \cdot \frac{136}{136} \cdot \frac{136}{136}$

$\frac{111}{111} \cdot \frac{111}{111} \cdot \frac{111}{111}$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{B}{\sqrt{11}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2d + B + 45^\circ \cdot 2 + 90^\circ \cdot 2 = 360^\circ$
 $B + 2d = 90^\circ$

$\frac{b+a-c}{\sqrt{2}} = \frac{c-a}{\frac{b+a-c}{\sqrt{2}}}$

$\frac{b+a-c}{2} = \frac{a-b+c}{2}$

$\frac{b-a+c}{2}$

$\frac{(b+a-c)^2}{2} = c^2 - cb - ca + ab$

$\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2} + ab - ac - bc = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} -$

$\frac{BQ}{QD} = \frac{c-a}{a+b-c} \cdot \sqrt{2} = \frac{2c-2a}{a+b-c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

13
19/31