



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \Rightarrow xy \cdot yz \cdot zx = x^2 y^2 z^2 = (-2z + z^2)(-2x + x^2)(-2y + y^2) = 2(-2 + z) \cdot x(-2 + x) \cdot y(-2 + y) = xy z (-2 + x)(-2 + y)(-2 + z).$$

Поскольку, $x^2 y^2 z^2 = xy z (-2 + x)(-2 + y)(-2 + z)$, то $(-2 + x)(-2 + y)(-2 + z) = xyz$. Тогда:

$$\begin{aligned} (-2 + x)(-2 + y)(-2 + z) &= xyz \\ (4 - 2x - 2y + xy)(-2 + z) &= xyz \\ (-8 + 4z + 4x - 2xz + 4y - 2yz - 2xy + xyz) &= xyz \\ 4x + 4y + 4z &= 8 + 2xz + 2yz + 2zx \\ x + y + z &= 2 + \frac{1}{2}(xz + yz + zx). \end{aligned}$$

Преобразуем выражение $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 =$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 - 2y - 2y + 4 + z^2 - 2z - 2z + 4 = (-2x + x^2) + (-2y + y^2) + (-2z + z^2) - \\ &- 2(x + y + z) + 12 = yz + zx + xy - 2\left(2 + \frac{1}{2}(xz + yz + zx)\right) + 12 = yz + zx + xy - \\ &- 4 - xy - yz - zx + 12 = 8. \end{aligned}$$

Ответ: $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

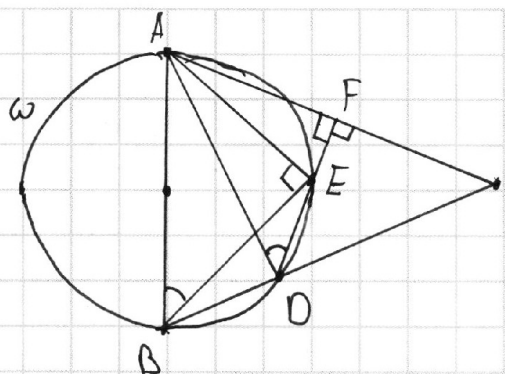
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

Решение:

$\triangle ABC$ - остр./уг.

Проведем AE и AD . Т.к.

Окр ω .

$\angle AEB$ и $\angle ADB$ опираются на

AB -диам.; $BC \cap \omega = D$. диаметр AB , то $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$.

$DF \perp AC$; $DF \cap \omega = E$. $\angle AOB + \angle AOC = 180^\circ$ (как смежные) $\Rightarrow$

$AC = 10$; $AB = 8$; $BE = 6$. $\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$

AF - ?

$\Rightarrow \triangle ADC$ - пр./уг $\Rightarrow$ по метрическим

соотношениям в пр./уг $\triangle ADC$: $AD^2 = AC \cdot AF = 10 \cdot AF \Rightarrow AD = \sqrt{10 \cdot AF}$ (ведь $DF \perp AC$,

значит, DF - выс. в пр./уг $\triangle ADC \Rightarrow AF$ - проекция AD на гипотенузу AC).

Поскольку $\angle AEB = 90^\circ$, то $\triangle AEB$ - пр./уг $\Rightarrow$ по теореме Пифагора: $AB^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

$\angle ABE = \angle ADE$ (потому что они опираются на дугу AE и равны ее половине) и $\angle AEB = \angle AFD = 90^\circ \Rightarrow$ по I признаку подобия треугольников:

$$\triangle ABE \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{8}{2\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \Rightarrow 7AD = 4\sqrt{7}AF.$$

$$\text{Но известно, что } AD = \sqrt{10 \cdot AF} \Rightarrow 7 \cdot \sqrt{10 \cdot AF} = 4\sqrt{7}AF = \sqrt{7} \cdot \sqrt{10 \cdot AF} = 4AF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{70} \cdot \sqrt{AF} = 4 \cdot \sqrt{AF} \Rightarrow \frac{\sqrt{70}}{4} = \frac{AF}{\sqrt{AF}} = \sqrt{AF} \Rightarrow \sqrt{AF} = \frac{\sqrt{70}}{4} = \sqrt{\frac{70}{16}} = \sqrt{\frac{35}{8}} \Rightarrow$$

$$= AF = \frac{35}{8} = 4 \frac{3}{8} = 4,375.$$

Ответ: $AF = 4,375$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок n шт., где $n > 7$, тогда вероятность того, что из 5 коробок в 3-х будет лежать шарик равна:

$$P = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

Но быль подруги учёный лишь один случай, которых столько же, сколько и способов перес-

тавить ~~местами~~ две неудачи, то есть тогда, когда коробки ока-

жутся пустыми. Значит, $P_5 = C_2^5 \cdot P = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot P = 10P$. Аналогич-

$$\text{но, } P_7 = C_4^7 \cdot P = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot P = 35P. \text{ Таким образом: } \frac{P_7}{P_5} = \frac{35P}{10P} =$$

$= 3,5$ раза вероятность выигрыша трока увеличилась.

Ответ: вероятность выигрыша трока увеличилась в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0.$$

Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, а d — её разность. Тогда сумма $x_1 + x_2$ корней первого уравнения равна: $a_1 + 5d + a_1 + 6d = 2a_1 + 11d$. А сумма $x_3 + x_4$ корней второго уравнения равна: $a_1 + 3d + a_1 + 8d = 2a_1 + 11d$. Следовательно, сумма корней первого и второго уравнений равна. В свою очередь по теореме Виета: $x_1 + x_2 = a^2 - 2a$; $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$. Значит, $a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$. Тогда:

$$a^2 - 2a = \frac{1}{3}a \cdot (a^2 - 2a)$$

$$a(a-2) - \frac{1}{3}a \cdot a(a-2) = 0$$

$$a(a-2)\left(1 - \frac{1}{3}a\right) = 0$$

$$a(a-2) \cdot \frac{1}{3}(3-a) = 0$$

$$a(a-2)(3-a) = 0. \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 2 \text{ или } a = 3.$$

Но если $a = 0$: $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$

$$x^2 - 7 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$3x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = -2 \quad \phi.$$

Если $a = 2$: $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$

$$x^2 - (4-4)x + 4-2-7 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$3x^2 - (8-8)x + 6-32 = 0$$

$$3x^2 - 26 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{26}{3}}$$

В таком случае $a_1 = -\sqrt{\frac{26}{3}}$; $a_2 = -\sqrt{5}$; $a_3 = \sqrt{5}$; $a_4 = \sqrt{\frac{26}{3}}$. Но эти числа не будут являться членами одной арифметической прогрессии, ведь: $d = a_2 - a_1 = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ и $d = \frac{a_3 - a_2}{2} = \frac{-5 + \sqrt{\frac{26}{3}}}{2} = -2,5 + \sqrt{\frac{13}{6}}$. В первом случае $d > 0$, а во втором $d < 0$.

Если $a = 3$; то:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$x^2 - (9 - 6)x + 9 - 3 - 7 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = 1,5 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$d = x_2 - x_1 = 1,5 + \frac{\sqrt{13}}{2} - 1,5 + \frac{\sqrt{13}}{2} =$$

$$= \sqrt{13}$$

Ответ: $a = 3$.

$$3x^2 - (27 - 18)x + 6 - 243 = 0$$

$$3x^2 - 9x - 237 = 0$$

$$x^2 - 3x - 79 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 316}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{325}}{2} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2} =$$

$$= 1,5 \pm 2,5\sqrt{13}$$

$$d = \frac{x_1 - x_3}{2} = \frac{1,5 - \frac{\sqrt{13}}{2} - 1,5 + \frac{5\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{4\sqrt{13}}{2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{13}}{4} = \sqrt{13}$$

$$d = \frac{x_4 - x_3}{5} = \frac{1,5 + 2,5\sqrt{13} - 1,5 + 2,5\sqrt{13}}{5} =$$

$$= \frac{5\sqrt{13}}{5} = \sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

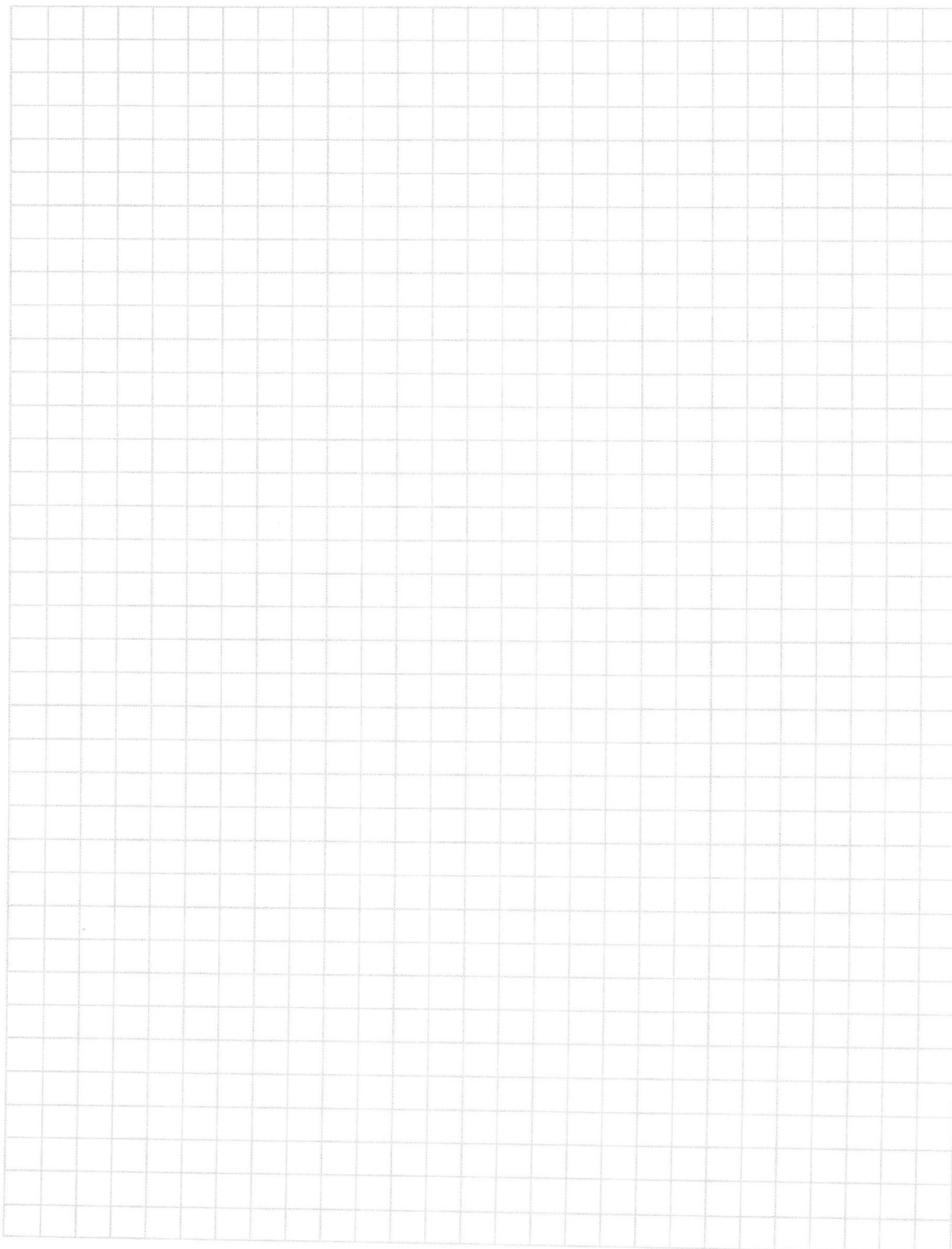
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



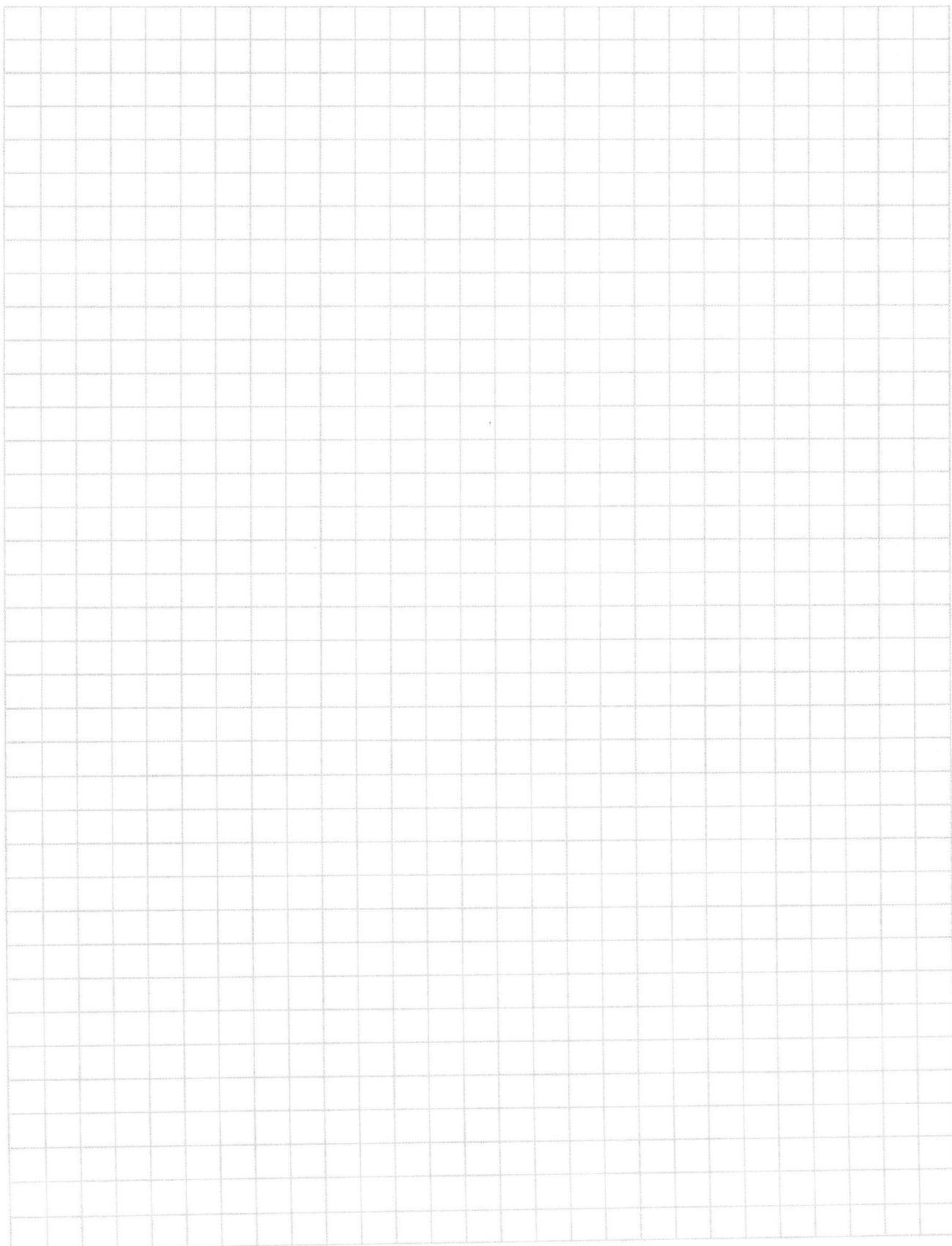


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

