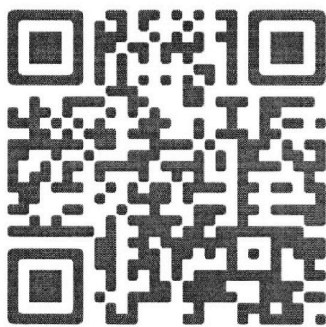
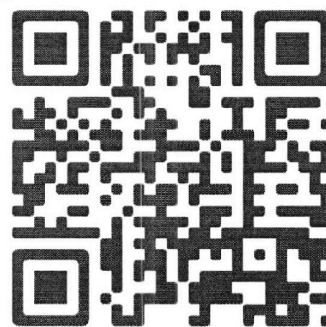




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy - z^2}{z} = 3 \quad (1) \\ \frac{yz - x^2}{x} = 3 \quad (2) \\ \frac{zx - y^2}{y} = 3 \quad (3) \end{cases} \quad (т.к. x, y, z \neq 0)$$

рав-во
Рассм. (1) и (2):

$$\frac{xy - z^2}{z} = \frac{yz - x^2}{x}$$

$$x^2y - z^2x = yz^2 - zx^2$$

$$y(x - z)(x + y)$$

$$y(x - z)(z + x) + zx(x - z) = 0$$

$$(x - z)(yz + xy + zx) = 0$$

$$т.е. \begin{cases} x = z \\ yz + xy + zx = 0 \end{cases}$$

Рассм. рав-во (2) и (3):

$$\frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y}$$

$$y^2z - yx^2 = zx^2 - xy^2$$

$$z(y - x)(x + y) + xy(y - x) = 0$$

$$(y - x)(zx + zy + xy) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{т.е. } \begin{cases} x=y \\ xz+yz+xy=0 \end{cases}$$

Предположим, что $xy+xz+yz \neq 0$.

Тогда т.к. (1), (2) и (3) вын. одновременно, то вын. $x=z$ и $x=y$ одновременно. Т.е. $x=y=z$.

Пусть $x=y=z=k$, причём из усл. следует, что $k \neq 0$.

Перемесём усл. на (1):
получим:

$$\frac{k \cdot k - k^2}{k} = 3$$

$$\frac{0}{k} = 3$$

$0=3$ - неверно

Получаем противоречие, тогда $xy+yz+zx=0$.

Тогда по системе из усл. * $z^2+3z+x^2+3x+y^2+3y=xy+yz+zx=0$

т.е.

$$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)=0$$

$$(x+y+z)^2 - \underbrace{2(xy+yz+zx)}_{=0} + 3(x+y+z) = 0$$

$$(x+y+z)(x+y+z+3)=0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

получили:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=-3 \end{cases}$$

Потому:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3z + 3y + \\ &+ 3x + 3y + 3z + 27 = (x^2 + 3x) + (y^2 + 3y) + (z^2 + 3z) + \\ &+ 3(x+y+z) + 27 \stackrel{\text{по системе из укл.}}{=} xy + yz + zx + 3(x+y+z) + 27 = \\ &= 3(x+y+z) + 27 \quad (\text{т.к. } xy + yz + zx = 0) \end{aligned}$$

Получили:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 3 \cdot 0 + 27 = 27 \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 3 \cdot (-3) + 27 = 18 \end{cases}$$

Ответ: 18; 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. n = \underbrace{99 \dots 9}_{40000 \text{ цифр}} = 10^{40000} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } n^3 &= (10^{40000} - 1)^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + \\ &+ 3 \cdot 10^{40000} - 1 = 10^{120000} + \underbrace{3 \cdot 10^{40000}}_{80000 \text{ цифр}} - \underbrace{3 \cdot 10^{80000}}_{80000 \text{ цифр}} - 1 = \\ &= \underbrace{100 \dots 0}_{80000 \text{ цифр}} \underbrace{300 \dots 0}_{40001 \text{ цифр}} - \underbrace{3000 \dots 001}_{80001 \text{ цифр}} \end{aligned}$$

посчитаем в столбик:

$$\begin{array}{r} \underbrace{1000 \dots 0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{000000 \dots 0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{3000 \dots 00}_{40001 \text{ цифр}} \\ - \underbrace{300000 \dots 0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{00000 \dots 01}_{40001 \text{ цифр}} \\ \hline 1111 \quad 11 \quad 1111 \quad 11 \\ \hline \underbrace{999 \dots 9}_{39999 \text{ цифр}} \underbrace{70000 \dots 0}_{40001 \text{ цифр}} \underbrace{2999 \quad 99}_{40000 \text{ цифр}} \end{array}$$

Получим, что n^3 содержит $39999 + 40000 = 79999$ девяток.

ответ: 79999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть всего n коробок. Тогда выбрать 5 из них можно C_n^5 способами. Если, сколько-нибудь способами можно открыть 5 коробок и выиграть. Для того, чтобы выиграть нужно открыть 3 коробки с шариками и ещё какие-то две из оставшихся, т.е. C_{n-3}^2 вариантов.

$$\text{Тогда вероятность выигрыша равна } \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-3-2)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot (n-5)!}{n! \cdot 2! \cdot (n-5)!} = \frac{60 (n-3)!}{n!}$$

Аналогичные рассуждения проведём для открытия шести коробок.

$$\text{Получим, что вероятность выигрыша тогда равна } \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-3-3)! \cdot 3!}}{\frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}} = \frac{(n-3)! \cdot 6! \cdot (n-6)!}{n! \cdot 3! \cdot (n-6)!} = \frac{120 (n-3)!}{n!}$$

$$\text{Тогда вероятность увеличится в } \frac{\left(\frac{120 (n-3)!}{n!} \right)}{\left(\frac{60 (n-3)!}{n!} \right)} = \frac{120}{60} = 2 \text{ раз.}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть корни ур-ий $x^2 - (d^2 - d)x + d - 5 = 0$ и $4x^2 - (d^3 - d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$ принадлежат

арифм. прогр. (C_n) . Тогда по формуле

C_5 и C_6 корни ур-я $x^2 - (d^2 - d)x + d - 5 = 0$,

а C_3 и C_8 корни ур-я $4x^2 - (d^3 - d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$.

По т. Виета получим:

$$C_5 + C_6 = d^2 - d$$

$$C_3 + C_8 = \frac{d^3 - d^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } d^2 - d = C_5 + C_6 &= C_1 + 4d + C_1 + 5d = \\ &= C_1 + 2d + C_1 + 7d = C_3 + C_8 = \frac{d^3 - d^2}{4}. \end{aligned}$$

Получим:

$$d^2 - d = \frac{d^3 - d^2}{4}$$

$$4d^2 - 4d = d^3 - d^2$$

$$4d^2 - 4d = d^3 - d^2$$

$$d^3 - 5d^2 + 4d = 0$$

$$d(d-1)(d-4) = 0$$

$$\begin{cases} d=0 \\ d=1 \\ d=4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐
☐
☐
☐
☒
☐
☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $d=0$:

Ур-я принимает вид:

$$x^2 - (0^2 - 0)x + 0 - 5 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$x = -\sqrt{5}$$

$$4x^2 - (0^3 - 0^2)x + 2 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 - 0^6 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -1$$

Пусть $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$ могут быть пятым и

шестым членами ^{форм.} прогр. (C_n) , а 1 и -1 третий

и восьмой члены (C_n) .

Рассм. 2 случая:

$$1) C_5 = \sqrt{5}, C_6 = -\sqrt{5}$$

$$\text{тогда } d = C_6 - C_5 = -\sqrt{5} - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

тогда получим:

$$C_3 = C_1 + 2d = C_1 + 4d - 2d = C_5 - 2d = \sqrt{5} - 2(-2\sqrt{5}) =$$

$$= 5\sqrt{5}$$

получаем противоречие, т.к. $C_3 \neq 5\sqrt{5}$

из второго ур-я. ~~не так~~

$$\begin{cases} C_3 = 1 \\ C_3 = 4 - 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) C_5 = -\sqrt{5}, C_6 = \sqrt{5}$$

тогда:

$$d = C_6 - C_5 = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

тогда получим:

$$C_3 = C_1 + 2d = C_1 + 4d - 2d = C_5 - 2d = \cancel{+\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 2 \cdot 2\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

получаем противоречие, т.к. $\begin{cases} C_3 = 1 \\ C_3 = -1 \end{cases}$
т.е. $d=0$ не подходит

② $d=1$:

уравнения принимают вид:

$$x^2 - (1^2 - 1)x + 1 - 5 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$4x^2 - (1^3 - 1^2)x + 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 - 1^6 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть -2 и 2 могут быть пятым и шестым членами арифм. прогр. (c_n) , а $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ третий и восьмой член (c_n) .

Рассм. 2 случая:

1) $c_5 = -2, c_6 = 2$

тогда $d = c_6 - c_5 = 2 - (-2) = 4$

тогда получим:

$$c_3 = c_1 + 2d = c_1 + 4d - 2d = c_5 - 2d = -2 - 2 \cdot 4 = -10$$

получаем противоречие, т.к. $\begin{cases} c_3 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2) $c_5 = 2, c_6 = -2$

тогда $d = c_6 - c_5 = -2 - 2 = -4$

тогда получим:

$$c_3 = c_1 + 2d = c_1 + 4d - 2d = c_5 - 2d = 2 - 2 \cdot (-4) = 10$$

получаем противоречие, т.к. $\begin{cases} c_3 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

т.е. $d = 1$ не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ $q=4$:

уравнения принимают вид:

$$x^2 - (4^2 - 4)x + 4 - 5 = 0$$

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

~~$$x = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$$~~

~~$$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{10} \\ x = 3 + \sqrt{10} \end{cases}$$~~

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{6 - \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

$$4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - (4^2 - 4)x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 136 - 1025 = 0$$

$$x^2 - 12x - 889 = 0$$

$$D = 36 + 889 = 925 = 37 \cdot 25$$

$$x = \frac{6 \pm 5\sqrt{37}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 5\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{6 - 5\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что $\frac{6-\sqrt{37}}{2}$, $\frac{6+\sqrt{37}}{2}$ могут быть
пятым и шестым членами арифм. прогр.
(c_n), а $\frac{6-5\sqrt{37}}{2}$, $\frac{6+5\sqrt{37}}{2}$ третьим и восьмым
членами прогр. (c_n).

$$\text{пусть } c_1 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2}, \text{ и } d = \sqrt{37}.$$

Получим:

$$c_3 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 2 \cdot \sqrt{37} = \frac{6-5\sqrt{37}}{2}$$

$$c_5 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 4 \cdot \sqrt{37} = \frac{6-\sqrt{37}}{2}$$

$$c_6 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 5 \cdot \sqrt{37} = \frac{6+\sqrt{37}}{2}$$

$$c_8 = \frac{6-9\sqrt{37}}{2} + 7 \cdot \sqrt{37} = \frac{6+5\sqrt{37}}{2}$$

т.е. $4=4$ подходит

ответ: 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

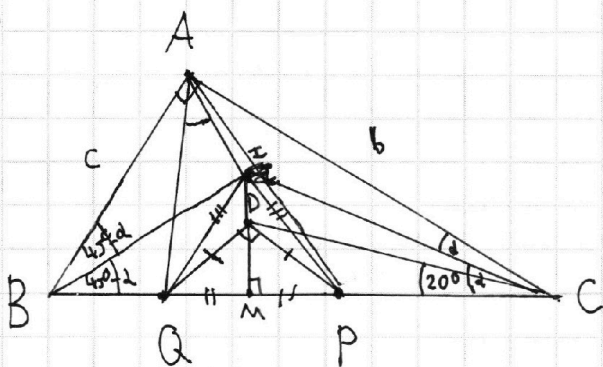
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



1) пусть $AB = c$,
 $AC = b$, $BC = a$

2) D - лежит на
сер. перп. на
серединам
перпендикуляре к
PQ, т.к. $DQ = DP$
пусть этот середин-
ный перпендикуляр
будет DM, где M тогда
середина PQ

$$3) BC = BP + CQ - CQ = \\ = AB + AC - CQ$$

т.е.

$$CQ = BC - AB + AC = a - c + b = \frac{c+b-a}{2}$$

тогда:

$$QM = PM = \frac{PQ}{2} = \frac{c+b-a}{2}$$

$$4) BM = BP - PM = AB - \frac{c+b-a}{2} = c - \frac{c+b-a}{2} = \\ = \frac{4+c-b}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p - b, \text{ где } p - \text{полупери-}$$

метр
5) т.к. $BM = p - b$, то M - точка касания
вписанной окр-ти, а DM - перпендику-
ляр к касательной (т.к. к стороне BC), тогда
на прямой DM лежит центр впис. окр-ти



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) предположим, что D не ммцеттр,
пусть I - ммцеттр, причём I лежит
на DM

7) ~~докажем~~ докажем, что ^{тогда} $\angle PIQ = 90^\circ$

8) $PI = IQ$, т.к. лежит на сер. перекр.
 PQ , тогда $\angle QIM = \angle PIM$, т.к. $\triangle PIQ$
пртб, ведь $PI = IQ$, а в пртб $\triangle$ высота
равна бис-се

9) а пусть $\angle B \overset{CI}{\cancel{I}I} = 2$, тогда $\angle A \overset{CI}{\cancel{I}I} = 2$
т.к. CI - бис-са

10) т.к. AI - бис-са, то $\angle BAI = \angle CAI = \cancel{90}$
 $= \frac{\angle BAC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

11) $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$ (по сумме угл - в $\triangle ABC$)

12) $\angle ABI = \angle CBI = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{90^\circ - 2\alpha}{2} = 45^\circ - \alpha$, т.к. BI
бис-са

13) $\triangle CAQ$ - пртб $\triangle$, т.к. $CA = CQ$
тогда $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = 90^\circ - \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) $\angle QAI = \angle CAQ - \angle CAI = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$

15) тогда AIQ в - вписанный ~~дуг~~.

(т.к. $\angle CBI = 45^\circ - \alpha = \angle QAI$ (сторона
вдуга под одним углом из двух вершин))

16) тогда $\angle PQI = \angle BAI = 45^\circ$

17) $\angle QIM = 45^\circ$ по сумме углов в
 $\triangle QIM$, тогда $\angle PIQ = \angle PIM + \angle QIM =$
 $= \angle QIM + \angle QIM = 90^\circ$

18) заметим, что если D и I не совпадают
т, то сумма углов в $\triangle QIP$ и
 $\triangle QDP$ будут не равны, т.к.
 $\angle QDP = 90^\circ = \angle PIQ$, т.е. $D \equiv I$

19) тогда по усл. $20^\circ = \angle PDP$ и
 $\angle PDP = \alpha$, т.к. $D \equiv I$, т.е. $\alpha = 20^\circ$

20) тогда:

$$\angle DBC = 45^\circ - \alpha = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ, \text{ т.к.}$$

$$D \equiv I, \angle CBI = 45^\circ - \alpha$$

ответ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. n = \underbrace{9 \dots 9}_{40000 \text{ цифра}} = 10^{40001} - 1$$

$$\text{тогда } n^3 = (10^{40001} - 1)^3 = \cancel{10^{120003}} - 3 \cdot 10^{80002} + 3 \cdot 10^{40001} - 1 =$$

$$= 10^{120003} - 3 \cdot 10^{80002} + 3 \cdot 10^{40001} - 1 =$$

$$= \underbrace{100 \ 0 \dots 0}_{80002 \text{ цифры}} \underbrace{300 \dots 00}_{40001 \text{ цифра}}$$

$$10^2 - 1 = 99$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

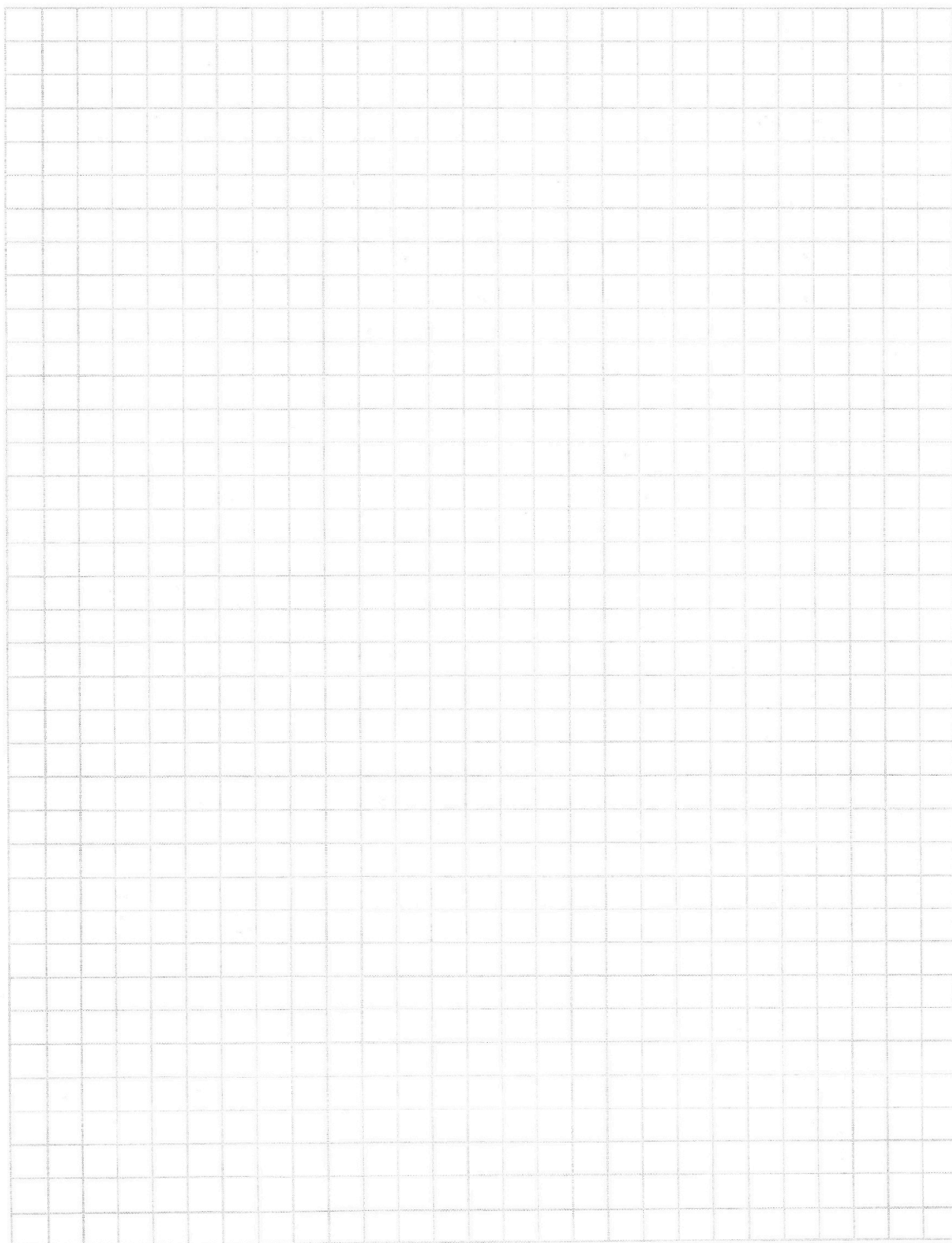
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

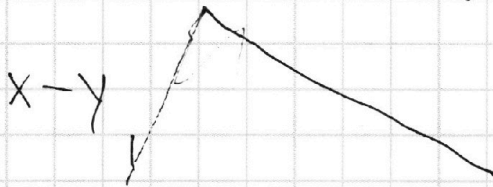
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 10000 \dots 01000 \\ - 10000 \dots 0000 \\ \hline 11100001111 \\ 0999900000099 \end{array}$$

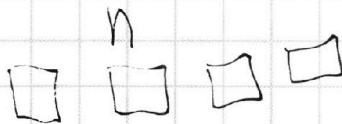
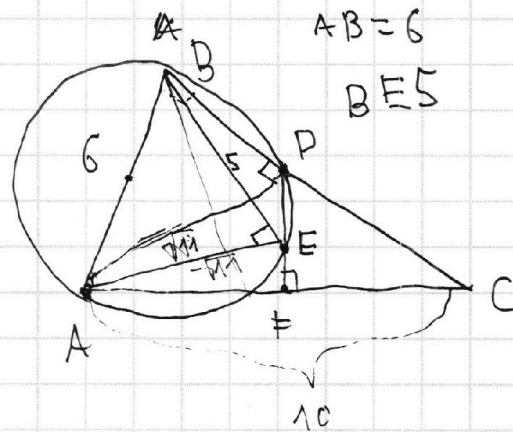
$$\sqrt{36-25} = \sqrt{11}$$

$$AC=10$$

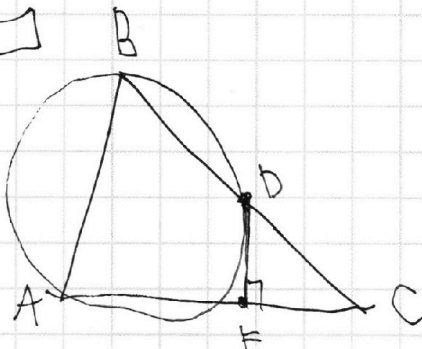
$$\frac{3x^2 + x^2}{x} = \frac{3x + x^2}{x}$$



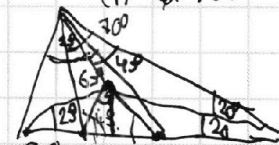
M



$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^{85}} =$$



$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-6)! \cdot 6!}{(n-3)! \cdot 3!}$$



$$= \frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-5)! \cdot 2!} =$$

$$\frac{120}{60} = 2$$

5 * 4 * 3

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} =$$

$$\frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!} =$$

$$\frac{60(n-3)!}{n!}$$

$$\frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-5)! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

$$\frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{(n-6)! \cdot 6! \cdot (n-2)! \cdot 2!}{(n-5)! \cdot 5! \cdot (n-3)! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{(n-6) \cdot 6 \cdot (n-3) \cdot 3}{(n-3) \cdot 3} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 = X(X+3) \\ 2x = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$z^2 + 3z - xy = 0$$

$$X+3 = \frac{yz}{x} \quad z = -3 \pm \sqrt{D} = 9 + 4xy$$

$$z+3 = \frac{xy}{2} \quad xy + yz + 2x + (x+y+z) + 27$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + \frac{yz + 3yz}{x} \quad -2yz = yzx$$

$$x = -2$$

$$z+3 = \frac{xy}{2} \quad xy + 3x + 9 \quad xy + yz + 2x + 3(x+3)$$

$$yz \quad 3(x+3) \quad 3(y+3)$$

$$x+3 =$$

$$\frac{yz}{x} = yz + \frac{3yz}{x} \quad yz = yzx + 3yz$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = yz + \frac{3yz}{x} \quad \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 \gg$$

$$(z+3)(x+3)(y+3) = xyz$$

$$xyz + 3xy + 3xz + 3yz + 27 = \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}$$

$$\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}$$

$$100 \dots 1000$$

$$10000000000$$

$$10000000000$$

$$2x - \frac{45}{2} = \frac{1}{2} \quad 2x = \frac{45}{2} + \frac{1}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 9$$

$$(a-b)$$

$$100000 = 100000$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = (x+y+z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx = \\ &= (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) = (x+y+z)(x+y+z+3) \end{aligned}$$

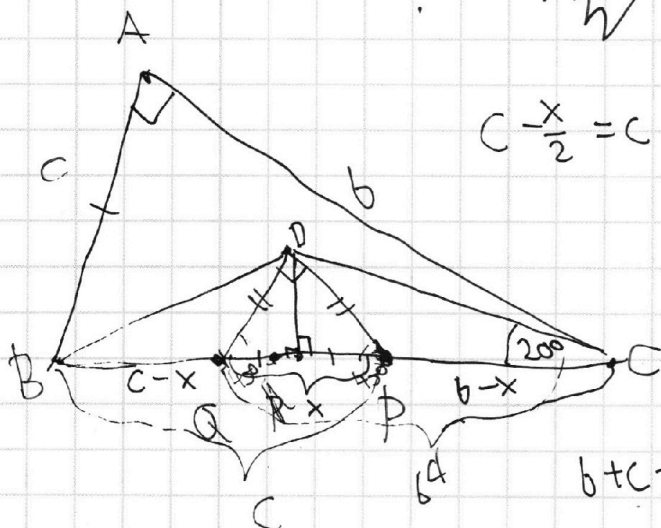
$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{27}{18}$$

$$x+y+z=0$$

$$x+y+z=-3$$

$$-2 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$k=0 \quad x^2 = (x+3)^2 + 3(x+3) = \frac{2}{5}$

$y = 3+x \quad k^2 = \frac{3x+k^2}{2} + 3 = \frac{y^2}{x} \quad 9x + 18 = 0 \quad 4 \cdot (18-13) \quad 5 \cdot 5 \quad x = -2$

$(x+3)^2 = 3 \cdot (x+3) + (x+3)^2 \quad 45 \quad 48 \quad 46$

$(1-4)(1-1) = 0 \quad -75 \quad -1 \quad 1 \quad 15$

$x^2 \quad yz - x^2 = 3 \quad 70-20 \quad 43 = -1$

$x^2 - 5x = 0 \quad 15 \quad (x+3) = 0$

$4x^2 - 4 = 0 \quad -75 \quad x = -3$

$z = \frac{2x-y^2}{y} = y = 1 \quad -1 \quad 2x + 2y + xy = 0$

$x = -2$

$x^2 - (d^2 - d)x + d - 5 = 0$

$4x^2 - (d^3 - d^2)x + 2d^4 + 2d^2 - d^6 - 4 = 0$

$(2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 1) \cdot 1 \quad d^2 - d = \frac{d^3 - d^2}{2}$

$\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{25 + 10\sqrt{21} + 21}{4} = \frac{46 + 10\sqrt{21}}{4} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}$

$4d^2 - d = d^3 - d^2$

$25 + 21 \quad d^3 - 5d^2 + d = 0$

$d^2(2d^2 + 2 - d^4) =$

$= d^2(-(d^2 - 1)^2 + 3) \quad 4^2 - 5d + 1 = 0$

$2^2 + x^2 + y^2 + 3x + 3z + 3y = 0$

$\frac{23 + \sqrt{21}}{2} - \frac{5 + \sqrt{21}}{d^2}$

$\left(\frac{41 - \sqrt{21}}{2}\right) \cdot x +$

$3x + 3z + 3y + 27$

$\frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$(z-x)(x^2 + xz + z^2 + 3z + 3y) = 0$

$(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 + 3z + 3y) = 0$