



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+xy = (z-1)^2 \\ 1+yz = (x-1)^2 \\ 1+zx = (y-1)^2 \end{cases}$$

$$1+xy - 1-yz = (z-1)^2(x-1)^2 = (z-x)(z-1+x-1)$$

$$y(x-z) = (z-x)(z-1+x-1)$$

1 сл. $x=z$.

~~$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ xz = -2y + y^2 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} xy = -2x + x^2 \\ x^2 = -2y + y^2 \end{cases}$$

т.к. $x \neq 0$, сократим
1-ое ур-ие на x .

$$\begin{cases} y = x-2 \\ x^2 = -2(x-2) + x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} y = x-2 \\ -4x + 4 - 2x + 4 = 0 \end{cases} ; 6x = 8, x = \frac{4}{3} = 2.$$

$$y = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

В этом случае $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{4+4+64}{9} = \frac{72}{9} = 8$. Аналогично, если $x=y$ или

$$y=z.$$

2 сл. $y = \cancel{x+2} 2-x-z$

~~Заметим, что в этом случае никакие 2 числа не могут быть равны, т.к. для таких наборов чисел решение единственно $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, и равенство $y = x+z-2$ не может не выполняться $\Rightarrow$ все три числа различны. Если $x=z$ и $y = -\frac{2}{3}$ случай 1.~~

Запишем также те ур-ие для групп чисел, т.к. $x \neq z$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Предположение со страницей~~

Раз все числа различны, то запишем такую систему для всех чисел

$$\begin{cases} y = x + z - 2 \\ -x = y + z - 2 \\ -z = x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + z - 2 \\ x = y + z - 2 \\ (x + y + z) = 2(x + y + z) - 6 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y = x + z - 2 \\ x = y + z - 2 \\ z = x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -y - 2 \\ x = -x - 2 \\ z = -z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$$

~~$x, y, z = 0$~~

Но тогда ~~$x^2 - 2x = yz$~~ неверно, т.к.
 $0 \neq 4$.

$\Rightarrow$ Единственное значение, которое может принимать выражение $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

2 задачи!

Представим $n = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} = 10^{30001} - 1$.

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1 =$$

$$= 10^{30001} (10^{60002} - 3 \cdot 10^{30001} + 3) - 1 = 702 \cdot 10^{30001} - 1 =$$

$$= \underbrace{702999 \dots 9}_{30001}$$

~~Ответ: 30001~~

$$= 10^{30001} (10^{60002} - 3 \cdot 10^{30001} + 3) - 1 = 10^{30001} (10^{30001} (10^{30001} - 3) + 3) - 1$$

$$= 10^{30001} \cdot \underbrace{9999 \dots 9}_{30000} \underbrace{70 \dots 0}_{30000} 3 - 1 =$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_{30000} \underbrace{70 \dots 0}_{30000} \underbrace{03 \dots 0}_{30001} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{30000} \underbrace{70 \dots 0}_{30000} 2$$

$$\underbrace{99 \dots 9}_{30001}$$

Всего 9-моек $30000 + 30001 = \boxed{60001}$ ← Ответ

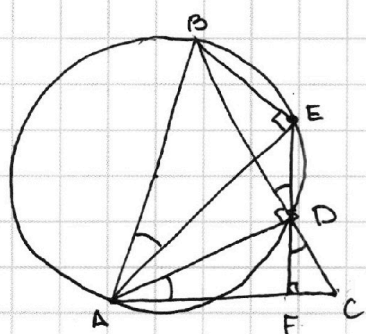


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=10, AB=8, BE=6. \quad AF=?$$

Решение

③. Обозначим $\angle BDE = \alpha$. Т.к. $BEDA$ — впис., то $\angle BDE = \angle BAE = \alpha$. Также $\angle BDE = \angle FDC$ как вертикальные углы. $\angle FCD = 180^\circ - \angle DFC - \angle FDC = 90^\circ - \alpha$. $\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$.

②. $\triangle BEA \sim \triangle CFD \sim \triangle DFA \sim \triangle CDA$ по 2 углам. Т.к. $\angle BEA = 90^\circ = \angle ADC = \angle AFD = \angle DFC$; $\angle BAE = \angle CDF = \angle DAF = \alpha$. ($\angle BEA = 90^\circ$, т.к. AB — диаметр, а $\angle BEA$ — впис. и опир. на diam.)

③ Из подобия $\triangle BAE$ и $\triangle ADF$: $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DF} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (1)

Из подобия $\triangle BAE$ и $\triangle DFC$: $\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{FC} = \frac{CD}{AC - AF} = \frac{4}{3}$ (2)

Из подобия $\triangle BAE$ и $\triangle ADC$: $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DC} = \frac{4}{3} = \frac{10}{DC}$ (3)

$$\Rightarrow DC = \frac{30}{4} = 7,5 \quad (3)$$

$$(2) : \frac{CD}{FC} = \frac{4}{3} = \frac{7,5}{FC} \Rightarrow FC = \frac{7,5 \cdot 3}{4} = \frac{22,5}{4} = 5,625$$

$$AF = AC - FC = 11 - 5,625 = 5,375$$

Ответ: $AF = 5,375$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим шанс игрока на выигрыш при открытии 5 коробок. Пусть x - кол-во всех коробок у девушки.

Вариантов выбрать какие-то 5 коробок = C_x^5

Вариантов выбрать 5 коробок и выиграть = C_{x-3}^2 , т.к. 3 коробки с шариками игрок уже заведомо выбрал, ему осталось выбрать любые 2 коробки из оставшихся $x-3$ коробок.

$$P_{\text{выигрыш}} = \frac{\frac{(x-3)(x-4)}{2}}{\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}} = \frac{5!}{2 \cdot x(x-1)(x-2)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{x(x-1)(x-2)}$$

Теперь рассмотрим шанс на выигрыш при открытии 7 коробок.

Вариантов выбрать любые 7 коробок = C_x^7

Вариантов выбрать 7 коробок и выиграть = C_{x-3}^4 , т.к. 3 коробки с шариками игрок уже выбрал, ему осталось выбрать любые 4 коробки из оставшихся $x-3$ коробок.

$$P_{\text{выигрыш}} = \frac{\frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{4!}}{\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{7!}} = \frac{7!}{4! \cdot x(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{P_{\text{7кор.}}}{P_{\text{5кор.}}} = \frac{\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{x(x-1)(x-2)}}{\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{x(x-1)(x-2)}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \quad (2)$$

Пусть b — 1-ый член арифм. прогрессии, а d — разность прогрессии. Т.к. (1) и (2) имеют 2 решения, то где них верна т.н. Вуэма. Запишем ее где суммы корней.

$$\text{т.н. Вуэма (1): } b + 5d + b + 6d = \frac{a^2 - 2a}{1} = a^2 - 2a$$

$$\text{т.н. Вуэма (2): } b + 3d + b + 8d = \frac{a^3 - 2a^2}{3} = \frac{a(a^2 - 2a)}{3}$$

$$b + 5d + b + 6d = 2b + 11d = b + 3d + b + 8d$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3}(a^2 - 2a) - (a^2 - 2a) = 0$$

$$\left(\frac{a}{3} - 1\right)a(a - 2) = 0.$$

$$(a - 3)(a - 2)a = 0.$$

$\Rightarrow a = 0/2/3$. Проверим эти 3 варианта.

1сл. $a = 0$.

$$2b + 11d = 0$$

$$b = -\frac{11}{2}d$$

т.н. Вуэма (1):

$$\begin{aligned} (b + 5d)(b + 6d) &= b^2 + 11bd + 30d^2 = \\ &= \frac{121}{4}d^2 - \frac{121}{2}d^2 + 30d^2 = \\ &= \frac{121 - 242 + 120}{4}d^2 = -\frac{1}{4}d^2 = a^2 - a - 7 \\ &= -7. \end{aligned}$$

$$d = \pm\sqrt{28}.$$

$$b = \mp 5.5\sqrt{28}.$$

т.н. Вуэма (2)

$$(b + 3d)(b + 8d) = b^2 + 11bd + 24d^2 = \frac{6 - a^5}{3} = \frac{6 - 0}{3} = 2.$$

$$\text{Возьмем } (b + \frac{3}{2}d)(b + 8d) \text{ и } (b + 5d)(b + 6d)$$

$$= 6d^2 = -7 - 2 = -9.$$

$$\text{т.н. } d \neq \pm\sqrt{28}.$$

$\Rightarrow a = 0$ не подходит.

2сл. $a = 2$

$$2b + 11d = 0$$

... аналогично 1сл.

$$-\frac{1}{4}d^2 = 4 - 2 - 7 = -5$$

$$d = \pm\sqrt{20}$$

$$b = \mp 5.5\sqrt{20}.$$

аналог. 1сл

$$6d^2 = -5 + \frac{26}{3} = \frac{11}{3}$$

$$d^2 = \frac{11}{18}. \text{ т.н. } d \neq \pm\sqrt{20}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 сл. $a=3$.

$$b^2 + 11bd + 30d^2 = 9 - 6 = 3.$$

$$b = \frac{-11d + 3}{2}$$

th. Булема (1):

$$(b+5d)(b+6d) = b^2 + 11bd + 30d^2 = \frac{121d^2 - 66d + 9}{4} + \frac{-121d^2 + 33d}{2} + \frac{120}{9}d^2 = \frac{121d^2 - 66d + 9 - 242d^2 + 132d + 120d^2}{4} = \frac{-d^2 + 66d + 9}{4}$$

$$= a^2 - a - 7 = 9 - 3 - 7 = -1.$$

$$-d^2 + 66d + 9 = -4.$$

$$-d^2 + 66d + 13 = 0.$$

$$d = \frac{-66 \pm \sqrt{66^2 - 4 \cdot 13}}{-2} = \frac{-66 \pm \sqrt{4356 - 52}}{-2} = \frac{-66 \pm \sqrt{269}}{-2} = 33 \mp 2\sqrt{269}.$$

th. Булема (2)

$$b^2 + 11bd + 24d^2 = \frac{6 - a^5}{3} = \frac{6 - 3^5}{3} = 2 - 3^4 = 2 - 81 = -79.$$

$$b^2 + 11bd + 30d^2 - b^2 - 11bd - 24d^2 = -1 + 79 = 78.$$

$$6d^2 = 78$$

$$d^2 = 13$$

Будем рассматривать в наихудшем случае разность $(b+5d)(b+6d) - (b+3d)(b+8d) = 6d^2 = a^2 - a - 7$

$$\left(\frac{6 - a^5}{3} \right)$$

1 сл. $a=0$

$$6d^2 = -7 - 2 = -9.$$

$$d^2 \geq 0 \Rightarrow W,$$

не подходит.

2 сл. $a=2$.

$$6d^2 = 4 - 2 - 7 - \left(\frac{6 - 32}{3} \right)$$

$$= -5 + \frac{26}{3} = \frac{11}{3}$$

$$d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$$

$$b = -\frac{11}{2}d = \mp 5,5 \sqrt{\frac{11}{18}}$$

$$\left(-5,5 \sqrt{\frac{11}{18}} + 5 \sqrt{\frac{11}{18}} \right) \left(-5,5 \sqrt{\frac{11}{18}} + 6 \sqrt{\frac{11}{18}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{11}{18}} \right)^2 =$$

$$= -\frac{11}{4 \cdot 18} = a^2 - a - 7$$

не подходит
если знак другой
аналогично



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
34 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 задачи

или 2 числа $\in (0; 2)$

Заметим, что числа $x, y, z \notin [0; 2]$. Докажем от противного. Пусть $x \in [0; 2]$. Тогда $x^2 - 2x \leq 0$ (т.к. $x(x-2) \leq 0$ при $x \in [0; 2]$). Тогда $yz \leq 0$, т.к. $y, z \neq 0$, то $yz \leq 0 \Rightarrow$ следовательно, одно из чисел отрицательно. Пусть это будет $y < 0$. Тогда yx также отрицательно $\Rightarrow z^2 - 2z < 0 \Rightarrow z \in (0; 2)$

3 сл. $a=3$

$$6d^2 = 9 - 3 - 7 - \frac{6 + 3^5}{3} = 9 - 3 - 7 - 2 + 3^4 = 81 + 9 - 3 - 7 - 2 = 80 - 12 = 78.$$

$$d^2 = 13$$

$$d = \pm \sqrt{13}$$

$$2b + 11d = a^2 - 2a = 3.$$

$$b = \frac{3 \mp 11\sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{3 - 11\sqrt{13}}{2} + 5\sqrt{13}\right) \left(\frac{3 - 11\sqrt{13}}{2} + 6\sqrt{13}\right) = \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) =$$

$$= \frac{9 - 13}{4} = -1 = a^2 - a - 7 = 9 - 3 - 7 = -1$$

$\Rightarrow a=3$ подходит. (аналог в другое ур.не)

Ответ: $a=3$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ~~из~~ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4.$$

1a). Все модули раскрываются со знаком "+".

$$\begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ 2x - 20 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x \leq 12 \end{cases}$$



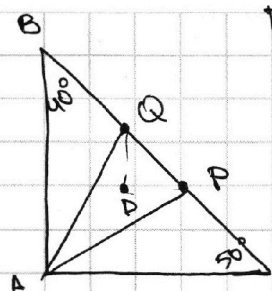
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒

СТРАНИЦА

10 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$DP = PQ, \angle PRQ = 90^\circ.$$

Будем доказывать, что D — центр описанной окружности $\triangle AQP$, т.е. точка пересечения сер. пер. к его сторонам.

①. Помемно, что D — сер. пер. к QP, т.к. $QD = PD$ ($\triangle QDP$ — р/б). $\Rightarrow$ Дравн. пер. от P и Q и пер. на сер. пер. к PQ

②. ~~Рассчитаем~~ $\angle BCA = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \angle BCA = 40^\circ$. $\triangle BPA$ — р/б. $\Rightarrow \angle BPA = \angle BAP = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$. $\triangle AQC$ — р/б $\Rightarrow \angle AQC = \angle QAC = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$. $\Rightarrow \angle QAP = 180^\circ - 65^\circ - 70^\circ = 45^\circ$.

③. Рассмотрим абстрактный (не отн. к задаче) ^{условно}

$\triangle A, B, C$ с O_1 — центром опис. окружности ($B, O_1 = O_1, A, C, O_1$). Пусть $\angle A, B, O_1 = \alpha$, $\angle O_1, B, C = \beta$, $\angle O_1, C, A = \gamma$. Тогда, т.к. $\triangle B, O_1, C$; $\triangle B, O_1, A$; $\triangle A, O_1, C$ — р/б, то $\angle O_1, A, B_1 = \angle A, B_1, O_1 = \alpha$; $\angle O_1, B, C_1 = \angle B, C_1, O_1 = \beta$; $\angle O_1, C, A_1 = \angle O_1, A, C_1 = \gamma$. $\angle A, O_1, C_1 = 180^\circ - 2\gamma = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\gamma = 2\alpha + 2\beta$, т.е. он в 2 раза больше $\angle B_1$ (центральный угол в два раза больше вписанного)

④. Заметим, что если D лежит на сер. пер. к QP, то, если мы будем двигать D по сер. пер., то $\angle QDP$ все время будет изменен, т.е. на сер. пер. не слу. D' такой, что $\angle QD'P = \angle QDP$. Значит, если $\angle QDP = 2 \cdot \angle QAP$, то D однозначно определяется и является центром опис. окружности $\triangle AQP$. $\angle AQP \cdot 2 = 45^\circ \cdot 2 = \angle QDP = 90^\circ$ ($\angle QDP = 90^\circ$, т.к. $\triangle QDP$ — прямоугольный и $QP = PD$) $\Rightarrow$

D — центр опис. окр. $\triangle AQP$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑤. Пусть D — центр опис. окр. $\triangle AQR$, то D лежит на дуге AP . Заметим, что и т. $B \in$ дуге AP , т.к. $AB = BP$. $\Rightarrow$ ~~BP — дуга AP~~ . BD — дуга AP . В этом случае BD — биссектриса, медиана и высота в $\triangle ABP$, т.е. $\angle DBP = \angle DBC = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

Ответ: $\angle DBC = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~

Черновик

$$\begin{aligned} xy+1 &= (z-1)^2 \\ 2x+1 &= (x-1)^2 \\ yz+1 &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

$$(x-1-y+1)(x-1+y-1) = z(x-y) \quad z(y-x)$$

$$(x-y)(x+y-2) = y-x$$

$$x+y-2 = z$$

$$x+z-2 = y$$

$$y+z-2 = x$$

$$2(x+y+z) = 6 = x+y+z$$

$$x+y+z = 6$$

$$z = 6 - x - y \quad x+y = 6-2$$

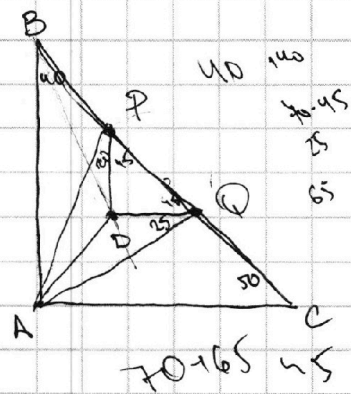
$$6-2-2 = z$$

$$y = 2 \quad z = 2$$

$$\frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \quad -\frac{2}{3}$$

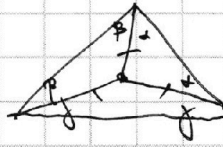
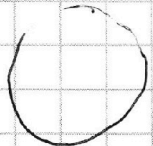
$$\frac{16}{9} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

$$-\frac{8}{9} = \frac{46}{9} - \frac{8}{3} - \frac{16}{9} - \frac{24}{9} \quad \checkmark$$



$$180^\circ - 2\gamma = \beta = -30^\circ \rightarrow \gamma = 15^\circ$$

$$180^\circ - \gamma + \beta = 90^\circ \rightarrow \gamma = 15^\circ$$



$$180^\circ - 2\gamma =$$

$$= 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta$$



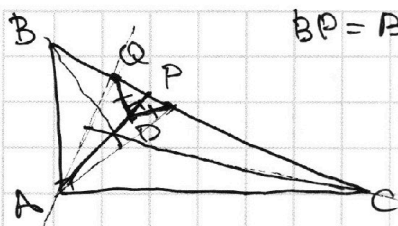
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 44 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$BP = BA; CQ = AC$$

$$\angle PBC = ? \quad \angle BCA = 50^\circ$$

$$x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z + 12$$

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{12}{y} = \frac{4}{z}$$

$$120 - 50 = 70^\circ$$

$$40^\circ \quad 70^\circ \quad 85^\circ$$

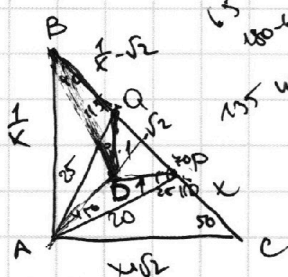
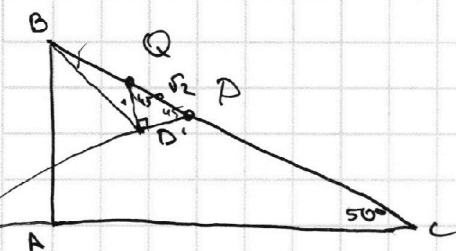
$$-xy$$

$$z^2 - 4z - 2x - 2y - xy + 12$$

$$x -$$

$$(xy + \sqrt{2})^2 =$$

$$2xy$$



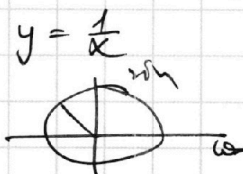
$$70^\circ + 65^\circ = 135^\circ$$

$$45^\circ$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = x^2 + y^2 + 2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y$$

$$2xy = 2$$

$$xy = 1$$



$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 = 0$$

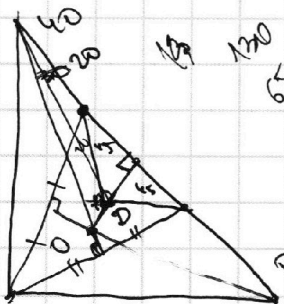
$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-1}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{2}$$

$$BD^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1^2 - 2 \cos 135^\circ \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 2 + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 3 + \frac{\sqrt{2}}{x} - 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{2}}{x} + 1$$

$$1^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{2}}{x} + 1 = 2 \cos \angle BDX \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{2}}{x} + 1\right)$$

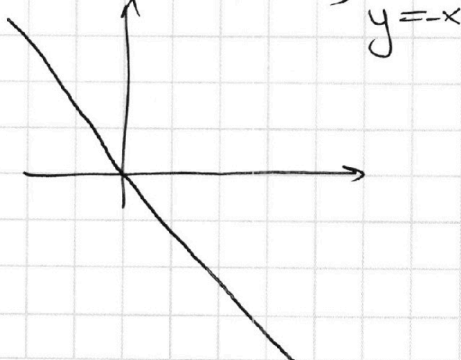


$$x^3 - 2x^2 = y^3 - 2y^2$$

$$x^3 - y^3 = 2x^2 - 2y^2$$

$$x^2 + xy + y^2 = 2x + 2y$$

$$(x-y)^2 + (x-y-2) = xy$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$z^3 - 2z^2 = y^3 - 2y^2$$

$$xy = z^2 - 2z$$

$$z^3 - 2z^2 - y^3 + 2y^2 = 0$$

$$(z-y)(z^2 + 2zy + y^2) - 2(z^2 - y^2) = 0$$

$$(z-y)(z^2 + 2zy + y^2 - 2z - 2y) = 0$$

$$2a + 5d + 6d = a^2 - 2a$$

$$(a+5d)(a+6d)$$

$$2b + 11d = a^2 - 2a$$

$$(b+5d)(b+6d) = b^2 + 11bd + 30d^2 = a^2 - a - 7$$

$$(b+3d)(b+8d) = \frac{6-a^2}{3}$$

$$2b + 11d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$6b + 33d = a(a^2 - 2a)$$

$$2b + 11d = a^2 - 2a$$

$$3 = a$$

$$a=0 \text{ } | \text{ } a=2$$

$$241 - 242$$

$$d^2 = 28/20$$

$$4356 - 52$$

$$d = \sqrt{28}, d = \sqrt{20}$$

$$4304 = 4 \cdot 1076 \cdot 4 \cdot 269$$

$$5,625 \cdot 2 = 10 + 1,25$$

$$(x-1) = a$$

$$(y-1) = b$$

$$(z-1) = c$$

$$\begin{array}{r} 4304 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1076 \cdot 4 \cdot 269 \\ 1076 \cdot 4 \cdot 269 \\ 1076 \cdot 1076 \cdot 269 \\ 1076 \cdot 269 \\ 1076 \cdot 269 \\ 1076 \cdot 269 \end{array}$$

$$13 \cdot 13 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 39 \\ 13 \\ 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 96 \\ 16 \\ 256 \end{array}$$

$$225 \cdot 256$$

$$17 \cdot 283$$

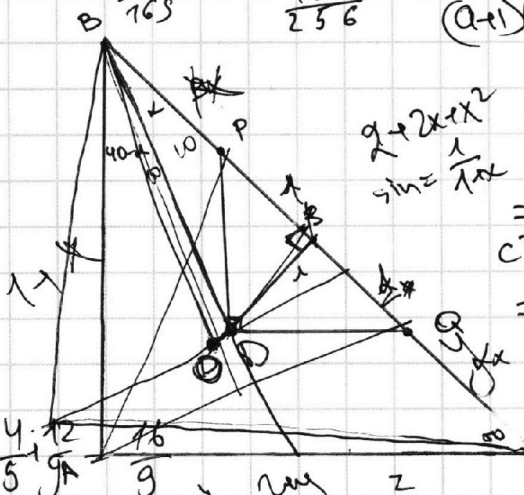
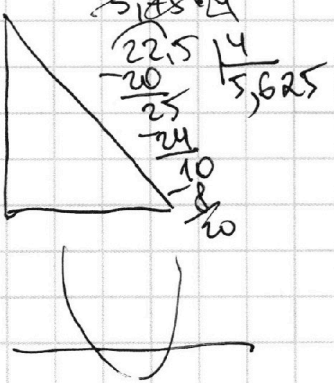
$$\begin{array}{r} 5625 \\ 2 \\ 11250 \end{array}$$

$$(a+1)(b+1) = c^2 - 1$$

$$11,25 \cdot 2 = 22,5$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 66 \\ 166 \\ 1396 \\ 336 \\ 4356 \\ 11000 \\ 51625 \\ 5345 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 575 \cdot 4 \\ 22,5 \cdot 4 \\ 20 \cdot 4 \\ 24 \cdot 4 \\ 10 \cdot 4 \\ 20 \end{array}$$



$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$\angle BCA = 50^\circ$$

$$(c^2 - 1)(c + 1) =$$

$$= c^3 - c + c^2 - 1$$

$$c^3 + c^2 - c - 1 = b^3 - b^2 + b - 1$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2) + (c-b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$= (c-b)(c^2 + cb + b^2 + c - b)$$

$$\frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 12}{9} + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$z^3 - 2z^2 = y^3 - 2y^2$$

$$y = \frac{-4 \pm 8}{-6} = 2 - \frac{2}{3}$$

$$y^2 = D = 16 + 3 \cdot 4 \cdot 4$$

$$x^2 + x(y-2) + (y-2)y =$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 8y =$$

$$= -3y^2 + 4y + 4$$

$$= -3y^2 + 4y + 4$$

$$= -3y^2 + 4y + 4$$

$$= -3y^2 + 4y + 4$$

$$= -3y^2 + 4y + 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ~~11~~ ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$xy - yz = (z-1-x+1)(z-1+x-1) = (z-x)(z+x-2) : y$$

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = x^2 - 2x \\ zx = y^2 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1+xy &= (z-1)^2 \\ 1+yz &= (x-1)^2 \\ 1+zx &= (y-1)^2 \\ xy &= z(z-2) \end{aligned}$$

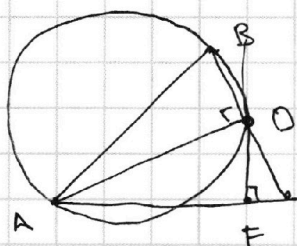
$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a^2-2ab+b^2)(a-b) \\ &= a^3 - 2a^2b + b^2a - ba^2 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

30001 делится на 3?

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 9$$

$$(9 \dots 9)^3 = \left(\frac{10000}{30002} - 1 \right)^3 = 10^{30003} - 3 \cdot 10^{30002} + 3 \cdot 10^{60002} - 1$$

$$10^{30002} (10^3 - 3 + 3 \cdot 10^2) + 1 = 10^{30002} (1000 + 300 - 3) + 1 = 1297 \dots$$

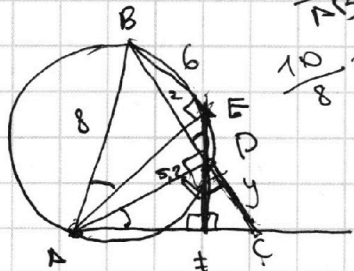


AF = ? AC = 10, AB = 8, BE = 6.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BE} \quad \frac{10}{8} = \frac{DC}{6} \quad DC = \frac{60}{8} = 7,5$$

$$64 - 36 = 28 \quad 2\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ \times 4,8 \\ 19,8 \\ 138,4 \\ 192 \\ \hline 23,04 \end{array}$$



$$\begin{aligned} AC &= 10 \quad AF = x \\ (10-x)x &= y(y+z) \\ \triangle DFC &\sim \triangle BEA \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 49 - 23,04 = \\ 49,00 \\ - 23,04 \\ \hline 26,96 \end{array}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BE}{DC}$$

$$\triangle ADC \sim \triangle BEA \quad \frac{AC}{8} = \frac{10}{8} = \frac{6}{DC}$$

$$4,8 = DC \quad 2696 = 4 \cdot 262$$

$$\begin{array}{r} 15 \div 7,5 \\ 22,5 \mid 4 \\ - 20 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 10 \\ - 10 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{5,2}{8} = \frac{x}{6}$$

$$\frac{5,2 \cdot 6}{84} = x \quad x = 1,3$$

$$\begin{array}{r} 2696 \div 4 \\ 24 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3' \\ 26 \\ \times 26 \\ 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (5,2)^2 - (1,3)^2 &= \\ 11,25 - 1,69 &= \\ 9,56 &= \end{aligned}$$

