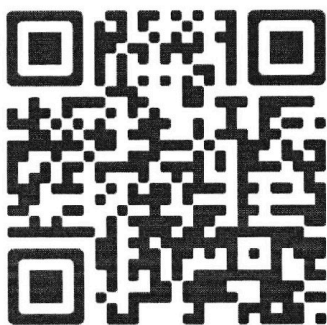




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части:

$$\cancel{xyz} \cdot x^2 y^2 z^2 = xyz(3+z)(3+x)(3+y)$$

$$\cancel{xyz} \cdot xyz = (3+z)(3+x)(3+y)$$

$$xyz = 27 + 9(x+y+z) + 3(xz + yz + xz) + xyz \quad | -xyz$$

~~Сам сложим~~ заменим xz, yz, xz на значения из системы:

$$27 + 9(x+y+z) + 3(3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2) = 0$$

$$27 + 18(x+y+z) + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$9 + 6(x+y+z) + (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = 18$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18$$

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число n можно представить в виде $10^{4000} - 1$, тогда:

$$\begin{aligned} n^3 &= (10^{4000} - 1)^3 = 10^{12000} - 3 \cdot 10^{8000} + 3 \cdot 10^{4000} - 1 = 10^{8000} (10^{4000} - 3) + \\ &+ 3 \cdot 10^{4000} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{3999} \underbrace{7000 \dots 0}_{9000} + \underbrace{299 \dots 9}_{4000} = \underbrace{99 \dots 9}_{3999} \underbrace{70}_{4000} \underbrace{299 \dots 9}_{4000}. \end{aligned}$$

Итого: $39999 + 40000 = 79999$ девяток

Ответ: 79999



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Каждём вероятность выигрыша при 5 возможностях чёткости
в выборе в размере 5 коробок (n-кол-во коробок):

$$P_5 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5!(n-3)!}{2!n!} = \frac{5!}{2!n(n-1)(n-2)}$$

Теперь при 6:

$$P_6 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3!(n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-6)!}} = \frac{6!(n-3)!}{3!n!}$$

Каждём до сколько раз увеличился шанс выигрыша:

$$\frac{P_6}{P_5} = \frac{\frac{6! \cdot (n-3)!}{3! \cdot n!}}{\frac{5! \cdot (n-3)!}{2! \cdot n!}} = \frac{6! \cdot 2!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 2}{6} = 2$$

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нельзя ^{положить} рассмотреть ^и от a_6 до a_8 так, иначе:

$$2\sqrt{5} \neq (1+\sqrt{5})\frac{1}{2}; \quad 2\sqrt{5} \neq (\sqrt{5}-1)\frac{1}{2}$$

Следовательно при $a=0$ — не арифметическая прогрессия.

При $a=1$: $\begin{cases} a_5 = \pm 2 \\ a_6 = \mp 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_3 = \pm \frac{1}{2} \\ a_8 = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$

то $|a_5 - a_6| = \frac{1}{2}|a_6 - a_8|$ — при ариф. прогрессии

$$4 \neq \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) ; \quad 4 \neq \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2})$$

Следовательно при $a=1$ тоже не ариф. прогрессия

При $a=4$: $\begin{cases} a_5 = 6 \pm \sqrt{35} \\ a_6 = 6 \mp \sqrt{35} \end{cases}$ и $\begin{cases} a_3 = 6 \pm \sqrt{36+889} = 6 \pm 5\sqrt{27} \\ a_8 = 6 \mp \sqrt{36+889} = 6 \mp 5\sqrt{27} \end{cases}$

$$12 + 2\sqrt{35} \neq \frac{1}{2}(6 + \sqrt{35} + 6 + 5\sqrt{27}) \quad \text{Кое можно}$$

$$12 + 2\sqrt{35} \neq \frac{1}{2}(6 + \sqrt{35} + 6 + 5\sqrt{27}) \quad \text{нельзя так}$$

Следовательно ~~также~~ a ~~не~~ арифметическая прогрессия

Ответ: 0. существовать может. Пример:

$$a_3 = 6 - 5\sqrt{27}, \quad a_5 = 6 - \sqrt{35}, \quad a_6 = 6 + \sqrt{35}, \quad a_8 = 6 + 5\sqrt{27}, \quad b = 2\sqrt{35}$$

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

По обратной теореме Виета (a_n - n -ый член арифм. прогрессии)

$$a_5 + a_6 = a^2 - a \quad (1)$$

$$a_5 a_6 = a - 5$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

По обратной теореме Виета:

$$a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a_3 a_8 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

Заметим, что $a_5 + a_6 = a_3 + a_8 = 2a_4 + 9b$ (6-й член арифм. прогрессии)

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a^2(a-1) - 4a(a-1) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 4$$

Проверим, что эти a подходят:

При $a = 0$: $\begin{cases} a_5 = \pm\sqrt{5} \\ a_6 = \mp\sqrt{5} \end{cases}$ и $\begin{cases} a_3 = \pm 1 \\ a_8 = \mp 1 \end{cases}$

Заметим, что расстояние от a_5 до a_6 должно равняться

смотриме
затёркнутов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём линии уменьшил знака двух модулей:

$$1) x - \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$2) x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

Найдём левую часть неравенства при разных знаках по модулям:

$$1) (1\text{-ый пол. и } 2\text{-ой пол.}): \cancel{2x - 15 + \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3}$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$\cancel{x \leq 6} \quad 2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

$$\cancel{y + 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} \leq 9\sqrt{3}}$$

$$\cancel{y \leq -6\sqrt{3}x + 54\sqrt{3}}$$

$$2) (1\text{-ый пол. и } 2\text{-ой отриц.}): \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

$$3) (1\text{-ый отриц. и } 2\text{-ой пол.}): -\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \geq -9\sqrt{3}$$

$$4) (оба отриц.): -2x + 15 \leq 3$$

$$2x \geq 12$$

$$x \geq 6$$

По имеющимся данным можно построить график функции φ :

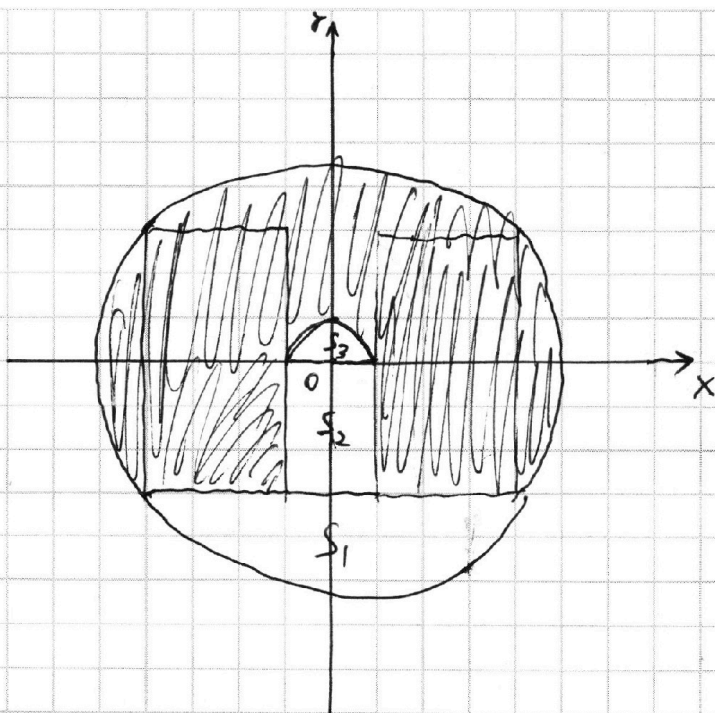


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} S &= S_{\text{кр}} - S_1 - S_2 - S_3 & R &= \sqrt{9^2 + (9\sqrt{3})^2} = 18 \\ & & \alpha &= 60^\circ = \frac{\pi}{3} \\ S &= \pi R^2 - \left(R^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} h \cdot a \right) - S_2 - \frac{\pi r^2}{2} \\ S &= \pi \cdot 18^2 - \left(18^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 18 \right) - 12 \cdot 9\sqrt{3} - \pi \frac{6^2}{2} = \\ &= \frac{5}{6} \pi \cdot 18^2 + 81\sqrt{3} - 12 \cdot 9\sqrt{3} - 18\pi = \pi \left(\frac{5}{6} \cdot 18^2 - 18 \right) + 9\sqrt{3} (9 - 12) = \\ &= 252\pi - 27\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $252\pi - 27\sqrt{3}$.

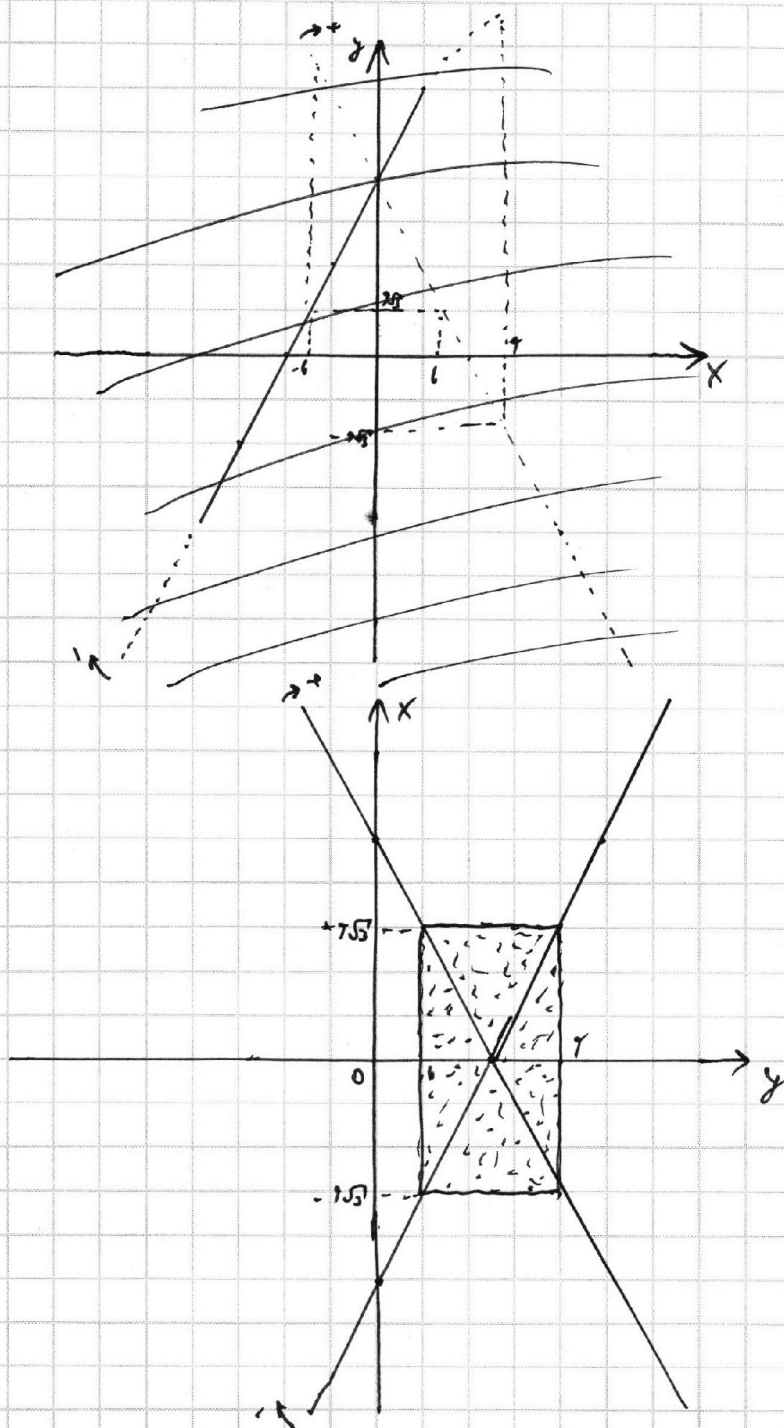


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Данный прямоугольник и будет являться фигурой 9'.
Найдём площадь фигуры при повороте его на 180° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{xy}{2}$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = (x^2 + y^2 + z^2) + 6(x + y + z) + 27$$

$$x + y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12x + 4x^2}}{2}$$

$$18 + z^2 + x^2 + y^2 + 6z + 6x + 6y = \underbrace{xy + yz + zx + 3x + 3y + 3z + 18}$$

$$x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) + 18$$

$$\frac{2x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + 18$$

$$3x + yz + 6x + yz + 6x + 2x + 3(x + y + z) + 18$$

$$xy + yz + 2x = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$(2xy)^2 = xy^2(3 + z)(1 + x)(3 + y) = 27 + 9(x + y + z) + 3(xy + yz + xz + xyz)$$

$$27 + 9(x + y + z) + 3(xy + yz + xz) = 0$$

$$27 + 9(x + y + z) + 3(3z + z^2 + 3x + x^2 + 3y + y^2) = 0$$

$$27 + 9(x + y + z) + 9(x + y + z) + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$9 + 18(x + y + z) + (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

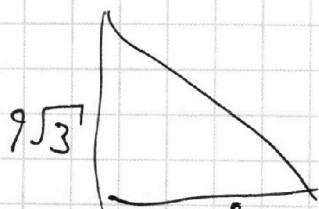
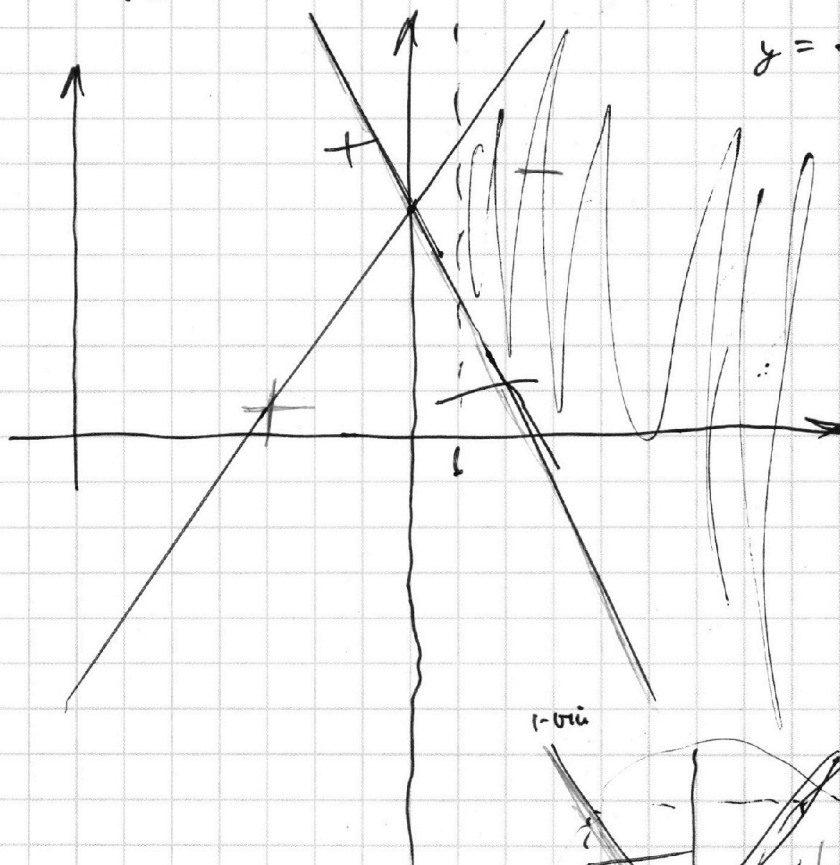
$$x = \frac{15}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$x - \frac{5}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

$$y = \frac{15\sqrt{3}}{2} - x \cdot \sqrt{3}$$

$$y = -x \cdot \sqrt{3} + 15\sqrt{3}$$



$$\tan \alpha = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5 \cdot 18 \cdot 18}{6} = 15 \cdot 18$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 18 \\ \times 15 \\ \hline 270 \\ + 180 \\ \hline 270 \end{array} \quad \frac{1}{2} = 51 = 9$$

$$270 - 18 = 252$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(x+3) - 3 = \sqrt{9+4yz}$$
$$4(x+3)^2 - 12(x+3) + 9 = 9+4yz$$
$$9^3 = 81 \cdot 9 = 729 \quad (x+3) \cdot 4x + 12 - 12 = 4yz$$
$$(9 \cdot 10 + 9)^3 = (9 \cdot 10 + 9)(81 \cdot 100 + 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10 + 81) = 920299$$
$$\begin{pmatrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 3 \end{pmatrix}$$
$$8000 - 8 = 7992$$
$$yz = x(x+3)$$
$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$
$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$
$$\begin{cases} \frac{xz}{2} = 2+3 \\ \frac{yz}{x} = 3+x \\ \frac{zx}{y} = 3+y \end{cases}$$
$$x^2 + 3x - yz = 0$$
$$y^2 + 3y - zx = 0$$
$$z^2 + 3z - xy = 0$$
$$\frac{zx^2}{y^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} =$$
$$2(3z+z^2) = y(3y+y^2)$$
$$3z^2+z^3 = (3+y)z^2 =$$
$$y = 3z+z^2$$
$$(3z+z^2)z = (3x+x^2)x$$
$$6z+3z^2 = 3x+x^3$$
$$\frac{-6}{6} = -1 \quad -6+3 = -3$$
$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9+4yz}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9+4yz}}{2}$$
$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{9+4xz}}{2}$$
$$y_2 = \frac{-3 - \sqrt{9+4xz}}{2}$$
$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4xy}}{2}$$
$$(10^{10001} - 1)^3 = 10^{120003} - 3 \cdot 10^{80002} + 3 \cdot 10^{40001} - 1$$
$$x_1 x_2 = -yz$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$3 + x_1 = x_2$$
$$3 + z_1 = z_2$$
$$3 + y_1 = y_2$$
$$3 + \sqrt{9+4yz}$$
$$40002 - 1$$

