



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0 (*) \\ xy = -2z + z^2 (1) \\ yz = -2x + x^2 (2) \\ xz = -2y + y^2 (3) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-2z + z^2}{x}; \text{ тогда}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2z^2 + z^3}{x} = -2x + x^2 (1) \\ xz = \frac{z^2(-2z + z^2)}{x^2} + \frac{4z - 2z^2}{x} (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -2z^2 + z^3 = -2x^2 + x^3$$

$$x^3 - z^3 = 2x^2 - 2z^2 (1.1)$$

$$(x-z)(x^2 + xz + z^2) = (x-z)(2x + 2z)$$

1 случай: $x = z$, тогда

$$\begin{cases} x^2 = -2y + y^2 \\ xy = -2x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = -2y + y^2 \\ y = -2 + x \end{cases} \begin{matrix} \text{(по второму уравнению)} \\ \text{(по (1))} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2x - 4 \\ y = -2 + x \end{cases}$$

$$x^2 = -2(x-2) + (x-2)^2$$

$$x^2 = -2x + 4 + x^2 - 4x + 4$$

$$6x = 8$$

$$x = \frac{4}{3} \Rightarrow z = x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = x - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3} \text{ тогда } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} =$$

$$= \frac{72}{9} = 8$$

2 случай: $x \neq z \Rightarrow x - z \neq 0$, тогда

$$x^2 + xz + z^2 = 2x + 2z (3); (2.1) \Rightarrow x^3 - z^3 - 4z^2 + 4z + 4xz - 2xz =$$

$$\begin{matrix} x^2 & & & & \\ x^2 - 2x + xz + z^2 - 2z = 0 \\ \underbrace{x^2 - 2x}_{yz} & & \underbrace{xz + z^2 - 2z}_{xy} & & \end{matrix}$$

$$xz + xy + yz = 0;$$

$$xz = -xy - yz$$

$$(3) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z); (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x + y + z) = (x + y + z)^2 + 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}; \text{ тогда } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 =$$

$$= x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + 2(x + y + z) + 12 = x^2 + y^2 + z^2 - 12 - 2x - 2y - 2z + 12 =$$

$$= 12 - 0 - 0 - 0 = 12 \text{ Ответ: } 8, 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n+1 = \cancel{10000} 10^{30002}$$

$$\cancel{n^3 = (n+1)^3 - 3n^3 - 3n^2 - 1; (n+1)^3 = \cancel{3n^3}}$$

$$n^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1; (n+1)^3 - 3(n+1)^2 = \underbrace{1000\dots 0}_{30006} - \underbrace{300\dots 0}_{60004} =$$
$$= \underbrace{99\dots 9}_{30001} \underbrace{700\dots 0}_{60004}; (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1 = \underbrace{99\dots 9}_{30001} \underbrace{700\dots 0}_{60004} + \underbrace{300\dots 0}_{30002} - 1 =$$

$$= \underbrace{99\dots 9}_{30001} \underbrace{700\dots 0}_{30001} \underbrace{300\dots 0}_{30002} - 1 = \underbrace{99\dots 9}_{30001} \underbrace{700\dots 0}_{3001} \underbrace{299\dots 9}_{30002} = n^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в } n^3 \text{ будет } 30001 + 30002 = 60003$$

Ответ: 60003

Ergebnis: $x = \frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во коробок, тогда вероятность выигрыша изначально =
$$= \frac{\text{кол-во выигр. исх.}}{\text{все исх.}} = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{выбрали 3 коробки с шариками, 2 другие} \\ \text{и 2 другие из оставшихся} \end{array} \right)$$

а вероятность выигрыша при 7 дугах $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} \rightarrow \left(\begin{array}{l} 3 \text{ коробки с шариками} \\ 4 шарика из остатка} \end{array} \right)$

тогда вероятности сложились в $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} =$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 7! \cdot 2!}{(n-3)(n-4) \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{7! \cdot 2!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{4!} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

арифм. прогрессия $a_n = a_0 + n \cdot p$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

по теореме Виета $x_1 + x_2 = a^2 - 2a = a_0 + 6p + a_0 + 7p = 2a_0 + 13p$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

по теореме Виета $x_1' + x_2' = \frac{a^3 - 2a^2}{3} = a_0 + 4p + a_0 + 3p = 2a_0 + 13p = a^2 - 2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow a(a-2)\left(\frac{a}{3} - 1\right) = 0$$

$$a(a-2)(a-3) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 & (1) \\ a=2 & (2) \\ a=3 & (3) \end{cases}$$

$$(2) a=2 \Rightarrow x^2 - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \Rightarrow p = a_0 + 7p -$$

$$x^2 - a_0 + 6p = \pm 2\sqrt{5};$$

$$x^2 - 28 = 0$$

$$x_{3,4} = \pm 2\sqrt{7} \Rightarrow p = \frac{a_0 + 9p - (a_0 + 4p)}{5} =$$

$$= \frac{\pm 4\sqrt{7}}{5} \neq \pm 2\sqrt{5} \text{ (противоречие)}$$

$$\text{(нет такой пары значений)}$$

$$\Rightarrow \text{противоречие } (7)$$

$$(1) x^2 - 7 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow p = a_0 + 7p - (a_0 + 6p) = \pm 2\sqrt{7}$$

$$x^2 - 28 = 0$$

$$(1) 3x^2 + 6 = 0 \quad (2) \text{ (нет корней)}$$

$$x^2 = -2 \quad (3)$$

$$(2) a=2$$

$$3x^2 - 28 = 0$$

$$x^2 = \frac{28}{3} \text{ (нет корней)}$$

$$(3) x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$3x^2 - 9x^2 - 23 = 0$$

$$x^2 - 3x - 23 = 0$$

$$D = 9 + 92 = 101 = 2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{101}}{2}; \text{ если}$$

$$\text{если } a_0 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; p = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow a_4 = a_0 + 4p = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2} = x_3 \quad (4)$$

$$a_6 = a_0 + 6p = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = x_1 \quad (5)$$

$$a_7 = a_0 + 7p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 2x_2 \quad (6)$$

$$a_9 = a_0 + 9p = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2} \quad (7)$$

$$\Rightarrow a=3 - \text{наблюдаем}$$

$$\text{Ответ: } a=3$$

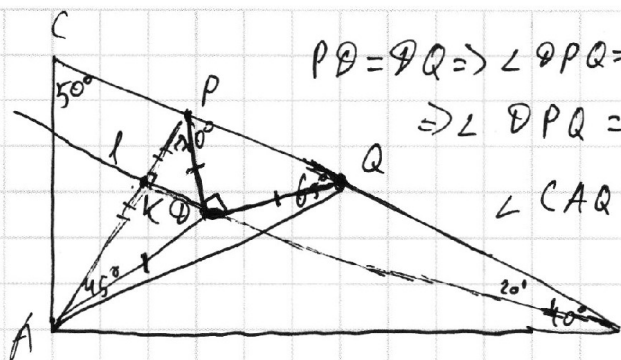


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$PB = PQ \Rightarrow \angle BPQ = \angle QPB \text{ (по св-ву равносторон. \Delta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BPQ = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\angle CAQ = \angle CQA, \angle BAP = \angle BPA \text{ (по св-ву равносторон. \Delta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAQ = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ; \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\angle BPA = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta) \Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\angle PAQ = \angle CAQ + \angle PAB - \angle BAC = 65^\circ + 70^\circ - 90^\circ = 45^\circ; \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\Rightarrow \angle PAQ = 45^\circ; \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

$$\Rightarrow A \in \omega \Rightarrow \text{окружность } \omega (D; DP) \Rightarrow Q \in \omega \text{ (м.к. } R = DP = DQ); \text{ впис. угол } \angle PAQ$$

$$\text{на хорду } PQ \text{ будет равен } \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (по т. о центр. углу); } 45^\circ = \angle PAQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \in \omega \Rightarrow \text{окружность } \omega \text{ - сеп. пер. к } AP \Rightarrow D \in l \text{ (м.к. } AD = DP = DR \text{ по } \text{горк-му) и } B \in l \text{ (м.к. } BP = AB \text{ по т. о } \angle \text{ в } \Delta) \Rightarrow (BD) \text{ - это и есть сеп. пер. к } AP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle (DB) \cap (AP) = K \Rightarrow \angle BKP = 90^\circ; \angle BPK = \angle BPA = 70^\circ \text{ (по горк-му) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DBC = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ \Rightarrow \angle DBC = \angle DBP = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ \text{ (по т. о } \angle \text{ в } \Delta)$$

Ответ: 20°

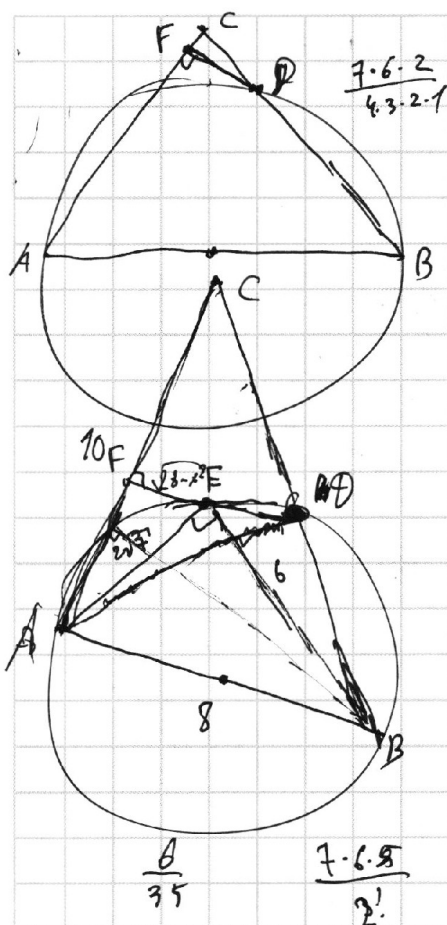


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a^7 - 2a = a^3 - 2a^2$$

$$a(a-2)(a-1) = 0$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{24} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$$

$$64 - 36 = 28$$

$$32 - 6 = 26$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{y}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{4} + 1 + \frac{4y^2}{x^2} = \frac{x^4 + 4x^2 + 4y^2}{4x^2} = \frac{(x^2 + 2y)^2}{4x^2}$$

$$AC = 10; AB = 8; BE = 8$$

$$AF = ?$$

$$2 - 81 = 79$$

$$AF = x \Rightarrow CF = 10 - x$$

$$CF \cdot 10 = CP \cdot \dots$$

$$y^2 = (x-2)(7-2)$$

$$xyz = (x-2)(y-2)(7-2)$$

$$CF^2 + EF^2 = \dots$$

$$\frac{x \cdot 7}{8} = 7 - 2$$

$$CF^2 = CF^2 + F\phi^2 = CF^2 + AD^2 - AF^2 =$$

$$= 10 \cdot (CF - AF) + AD^2 =$$

$$10(10 - 2x)$$

$$64 - BD^2$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

$$\sqrt{10x - x^2} - \sqrt{28x - x^2}$$

$$C_h^2 = 6$$

$$AD^2 = 28 +$$

$$\frac{6}{2 \cdot 7} = 2 \cdot AD^2 = (10 - x) \cdot x + x^2 = 10x$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 2(x + y + z)$$

$$\frac{C_{n-3}^4 \cdot C_{n-3}^2}{C_n^7} = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot 2! \cdot 7!}{n(n-1) \dots (n-6) \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot 4! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{(n-5)(n-6) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7(n-5)(n-6)}{2(n-5)(n-6)} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(h+1)^3 = 10^{30002}$$

$$x^2(x-2) = z^2(z-2)$$

$$(x-z)(x+z) + 4z^2 + 4(x+z) - 2xz = 0$$

$$2x^2 + 2z^2 + 4(x+z) - 2xz = 0$$

$$h^3 = (h+1)^3 - 3h^2 - 3h - 1 = 10^{90002}$$

$$h^3 + 3h^2 + 3h + 1$$

$$xz = \frac{2^4 - 4z^3 + 4z^2}{x^2} + \frac{4xz}{x}$$

$$x^3 = \frac{2^3 - 4z^2 + 4z + 4x - 2xz}{x^2}$$

$$-3(h+1)^2 =$$

$$-3(h^2 + 2h + 1) = -3h^2 - 6h - 3$$

$$+3(h+1) = +$$

$$h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 3h^2 - 6h - 3 + 3h + 3 - 1$$

$$12 - 2(x+y+z)$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 + \dots = xy - 2x + xg + xz + yz - 2(x+y+z) + 12$$

$$xy = -2z + z^2$$

$$y = \frac{-2z + z^2}{x}$$

$$x^2 - x(z-2) + z^2 - 2z = 0$$

$$y = x - 2$$

$$D = 3x(z-2)^2 + 4z(z-2) =$$

$$= (z-2)(z-2-4z) =$$

$$= (z-2)(3z-2)$$

$$xy^2 - 2y = x^2$$

$$(x-2)^2 - 2(x-2) = x^2$$

$$yz + xy + xz = 0$$

$$-6x + 10 = 0$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow (x-z)^3 = 2x^2 - 2z^2$$

$$\frac{-2z^2 + z^3}{x} = -2x + x^2$$

$$-2z^2 + z^3 = -2x^2 + x^3$$

$$(x-z)(x^2 - xz + z^2) = (x-z)(2x + 2z) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

