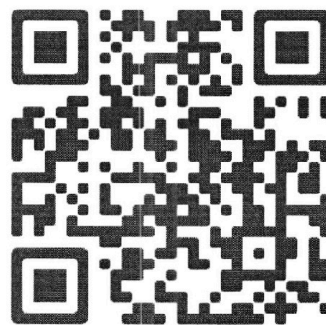




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

1) Если хотя бы одна переменная равна 0: заметим, что y -ная симметричная относительно переменных, поэтому пусть $x=0$ (таким образом рассматриваем все случаи, т.к. для $y=0$ и $z=0$ всё будет аналогично)

$$x=0 \Rightarrow xy=0 \Rightarrow 4z+z^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow zx=0 \Rightarrow 4y+y^2=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$$

Если $x=z=y=0$ то $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 48$
($x=y=z=0$ — корень системы)

Если одна из переменных равна -4 (например $x=y=0, z=-4$ — корень системы), то $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$

Если две переменных равны -4 : ~~(например $x=0, y=z=-4$ — корень системы)~~

Одно из выраж. xy, yz, zx будет равно 16, а в правой части будет $4x+x^2, x=0$, т.е. 0, — равенство не выполняется $\Rightarrow$ не явл. реш. системы $\Rightarrow$ две переменных не могут быть равны -4 .

2) Если ни одна из переменных не равна 0 (а по усл. такая тройка чисел x, y, z найдётся), то:

Сложим все 3 уравнения системы:

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x + y + z) \quad (1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим все 3 уравнения системы:

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+4)(x+4)(y+4) \quad | : xyz \neq 0$$

$$xyz = (z+4)(x+4)(y+4)$$

$$xyz = xyz + 4(xz + zy + xz) + 16(x+y+z) + 64 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{xyz} + xz + zy + xz + 4(x+y+z) + 16 = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 3 \cdot 16 =$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z)) + 4(x+y+z) + 16 + 32 \quad \begin{matrix} = \\ \text{(из (1))} \\ \text{подставим} \end{matrix}$$

$$= (xz + zy + xz + 4(x+y+z) + 16) + 32 = 32 \quad \begin{matrix} \text{(из (2))} \\ \text{подставим} \end{matrix}$$

Значит выражение $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$

может быть равно либо 48, либо 32.

Ответ: 32; 48

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. число n состоит из 25000 девяток,
то $n = 10^{25000} - 1$

$$\text{Тогда } n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

Запишем по действиям:

$$\begin{array}{r} 1) \quad \overbrace{1 \underbrace{99 \dots 99}_{(25000-1) \text{ нулей}} \underbrace{00 \dots 00}_{25000 \text{ нулей}}}_{75000 \text{ цифр}} \\ - \underbrace{3 \underbrace{00 \dots 00}_{25000 \text{ нулей}}}_{25000 \text{ цифр}} \\ \hline 99 \dots 97 \underbrace{00 \dots 00}_{50000 \text{ нулей}} \\ \hline 2) \quad + \underbrace{99 \dots 97 \underbrace{00 \dots 00}_{25000 \text{ нулей}}}_{(25000-1) \text{ цифр}} \\ \hline 99 \dots 97 \underbrace{00 \dots 00}_{(25000-1) \text{ нулей}} \underbrace{03 \underbrace{00 \dots 00}_{25000 \text{ нулей}}}_{25000 \text{ цифр}} \\ \hline 3) \quad \overbrace{99 \dots 97 \underbrace{00 \dots 00}_{(25000-1) \text{ нулей}} \underbrace{02 \underbrace{99 \dots 99}_{25000 \text{ цифр}}}}_{(25000-1) \text{ цифр}} = n^3 \end{array}$$

Итого в дес. записи числа n^3 получаем

$$25000 - 1 + 25000 = 50000 - 1 = 49999 \text{ девяток}$$

Ответ: 49999 девяток

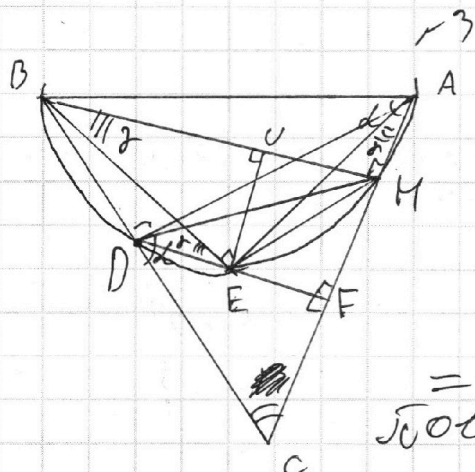


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Построим BM где
M - т. пересечения
ω и AC
BM ⊥ AC (т.к. AB -diam.),
DE ⊥ AC (по у.к.) ⇒

⇒ BM ∥ DE
Построим ME

{B, D, E, M} ⊂ ω, DE ∥ BM ⇒ BDEM - трапеция,
впис. в окр. ⇒ BDEM - равнобедр. трапеция
(по теореме).

Построим DM
BDEM - равнобедр. ⇒ DM = BE = 10
BDMA - впис. четырехуг. ⇒ ∠BAM + ∠BDM =
= 180°. Пусть ∠BAM = α ⇒ ∠BDM = 180° - α ⇒
⇒ ∠MDC = 180° - (180° - α) = α (как смежные)

∠BCA - общий, ∠BAC = ∠MDC ⇒ ΔBCA ∼ ΔMCD
(по двум уг. кат.) ⇒ ~~BD/AC = CD/BC~~ ~~CD/AC = AB/BC~~

$$\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{DM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow CD = \frac{2}{3} AC = \frac{40}{3}$$

Пусть ∠BCA = β, тогда из ΔDFC:

$$\sin \beta = \frac{DF}{CD} \quad \Delta BCA \sim \Delta MCD \Rightarrow \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{MD} = \frac{15}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{3}{2} MC$$

$$\text{По т. Талеса} \quad \frac{MF}{CF} = \frac{BD}{DC} = \frac{BC-DC}{DC} = \frac{BC}{DC} - 1 =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} MC}{\frac{40}{3}} - 1 = \frac{9MC}{80} - 1$$

Построим AE, AE ⊥ BE (т.к. AB - диаметр)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

погда по т. Пифагора: (из $\triangle ABE$)

$$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}$$

Из $\triangle AEF$ $\angle EAF = \gamma$, тогда $AF = 5\sqrt{5} \cos \gamma$,
 $\angle AEF = 90^\circ - \gamma \Rightarrow \angle BED = \gamma$
по т. синусов из $\triangle BED$:

$$AB = \frac{BD}{\sin \gamma} \Rightarrow BD = AB \cdot \sin \gamma = 15 \sin \gamma = 15 \cdot \frac{BD}{15} \Rightarrow \frac{BD}{15} = \sin \gamma$$

Построим AD , $AD \perp BD$ (т.к. AB - диаметр) $\Rightarrow$ по т. Пифагора из $\triangle ADC$:

$$AD^2 = AC^2 - DC^2$$

по т. Пифагора в $\triangle ADB$:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - AC^2 + DC^2} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2 + DC^2}}{15}$$

~~по т. синусов~~ $EU \perp BM$

$$\begin{aligned} EU &= AF = AE \cdot \cos \gamma = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \\ &= 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{15^2 - 20^2 + (\frac{40}{3})^2}{15^2}} = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{20^2 - (\frac{40}{3})^2}{15^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{(20 - \frac{40}{3})(20 + \frac{40}{3})} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{\frac{20}{3} \cdot \frac{60}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 20 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{20\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{15}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{20\sqrt{15}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Есть всего n коробок, 3 шарика, а игрок может открыть m из них.

Тогда есть C_n^3 способов разложить шарики по коробкам.

Всего есть C_m^3 способов разложить шарики по тем m коробкам, которые выберет игрок.

Тогда вероятность выигрыша составит:

$$P(m) = \frac{C_m^3}{C_n^3}$$

Тогда вероятность выигрыша уже мы -

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{C_8^3}{C_5^3} = \frac{C_8^3 \cdot C_5^3}{C_5^3 \cdot C_5^3} = \frac{8! \cdot 5! \cdot 2!}{3! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{2! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{28}{5} = 5,6 \text{ раз}$$

Значит ответ: в 5,6 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 5

Пусть b - первый член прогрессии, t - шаг прогрессии
 Тогда уравнение $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ имеет корни $b+3t$, $b+4t$
 А уравнение $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ имеет корни $b+t$ и $b+6t$

По теореме Виета для обоих уравнений:

$$\begin{cases} 2b + 7t = a^2 - a \\ 2b + 7t = \frac{1}{2}(a^3 - a^2) \end{cases} \Rightarrow a^2 - a = \frac{1}{2}(a^3 - a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Если $a = 0$:

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} = 0 \text{ - корней нет } \Rightarrow a \neq 0$$

Если $a = 1$:

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ - корней нет } \Rightarrow a \neq 1$$

Если $a = 2$:

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$D_1 = 1^2 + 2 = 3$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 74 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5\sqrt{3} \\ x = 1 - 5\sqrt{3} \end{cases}$$

$$D_1 = 1^2 + 74 = (5\sqrt{3})^2$$

Заметим, что если $b = 1 - 7\sqrt{3}$, $t = 2\sqrt{3}$ то
 $x = 1 - 5\sqrt{3}$ - второй член, $x = 1 + 5\sqrt{3}$ - седьмой член,
 $x = 1 - \sqrt{3}$ - четвёртый член, $x = 1 + \sqrt{3}$ - пятый член -
 условие выполняется $\Rightarrow a = 2$

Значит условие удовлетворяет только $a = 2$

Ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

1) Е.М.М. $y < 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$ ~~$y < 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$~~ , $y < 15 + \frac{1}{6\sqrt{3}}x$:

$$-y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$-2y + 30 \leq 6 \Rightarrow -y + 15 \leq 3 \Rightarrow y \geq 12$$

2) Е.М.М. $y < 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$, $y \geq 15 + \frac{1}{6\sqrt{3}}x$:

$$-y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$-\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \geq -18\sqrt{3}$$

3) Е.М.М. $y \geq 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$, $y < 15 + \frac{1}{6\sqrt{3}}x$:

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \leq 18\sqrt{3}$$

4) Е.М.М. $y \geq 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$, $y \geq 15 + \frac{1}{6\sqrt{3}}x$:

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

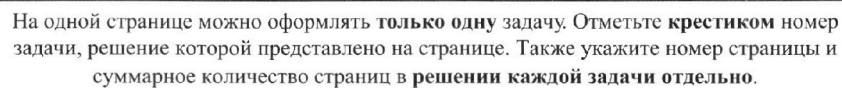
$$2y - 30 \leq 6$$

$$y - 15 \leq 3 \Rightarrow y \leq 18$$

Изобразим результаты графически в координатах $y(x)$:

$y = 15 - \frac{1}{6\sqrt{3}}x$ и $y = 15 + \frac{1}{6\sqrt{3}}x$ — параллельные прямые

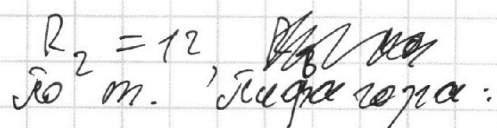
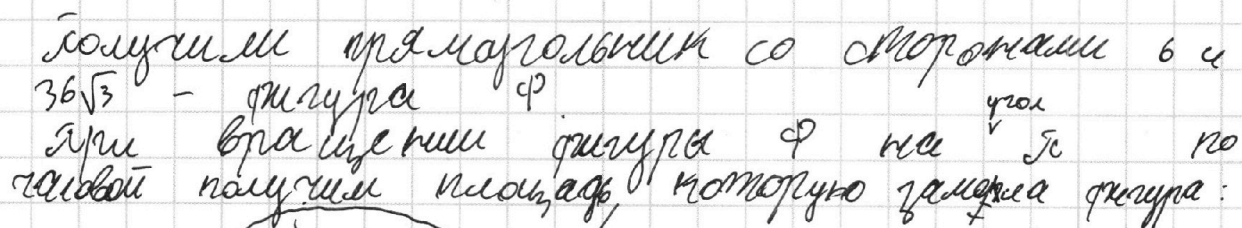
Берём ещё две точки построим по точкам $(0; 15)$, $(18\sqrt{3}; 12)$,



7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \Rightarrow 18\sqrt{3} \approx 31,14$$


$$R_3 = \sqrt{8^2 + (18\sqrt{3})^2} = 18 \cdot \sqrt{1+3} =$$

Площадь фигуры справа
от оси y составляет:

$$S_1 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2) = \pi(36^2 - 12^2) = \pi \cdot 48 \cdot 24 = 1152\pi$$

(рисунки условные)



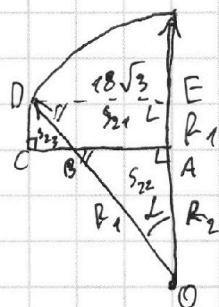
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим оставшуюся часть фигуры выше от n :



из $\triangle OED$:

$\sin L = \frac{18\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 60^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ площадь сектора с радиусом L равен:

$$S_{21} = \frac{L}{360^\circ} \cdot \pi R_1^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 36^2 = \frac{36^2}{6} \cdot \pi = 216\pi$$

$$\Rightarrow \triangle OBA \sim \triangle ODE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{OA}{OE} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{1}{3} DE = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow CB = DE - AB = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{22} = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$S_{23} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}$$

Тогда площадь рассматриваемой фигуры будет равна:

$$S_2 = S_{21} - S_{22} + S_{23} = 216\pi - 36\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 216\pi$$

В силу симметрии оставшаяся часть фигуры также от n будет равна $S_3 = S_2 = 216\pi$

Тогда при движении фигуры F на угол π по часовой стрелке, она займет площадь:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1152\pi + 2 \cdot (216\pi - 36\sqrt{3}) =$$

$$= 1152\pi + 432\pi - 72\sqrt{3} = 1584\pi - 72\sqrt{3}$$

Ответ: $1584\pi - 72\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x^1

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + 4 = \frac{x^2}{y} \\ x + 4 = \frac{y^2}{z} \\ y + 4 = \frac{z^2}{x} \end{cases}$$

$$xyz = (z+4)(y+4)(x+4) \Rightarrow xyz = xyz + 4yz + 4xz + 4xy + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$xy + yz + xz + 4(x+y+z) + 16 = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 3 \cdot 16 = \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = \frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$$

x^2

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ + 8820 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$9^3 = 729$$

$$(10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$(a+b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$

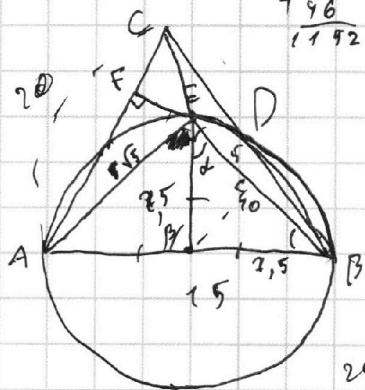
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ + 8820 \\ \hline 8901 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ + 30000 \\ + 300 \\ + 1 \\ \hline 1000301 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 998001 \\ \hline 8982009 \\ + 8982009 \\ \hline 9982009 \\ + 9982009 \\ \hline 9982009 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 48 \\ \hline 24 \\ + 144 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\cos \angle = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \angle = \frac{4}{5}, \sin \angle = \frac{3}{5}$$

$$\cos(180^\circ - 2\angle) = \cos^2(90^\circ - \angle) - \sin^2(90^\circ - \angle) =$$

$$= \sin^2 \angle - \cos^2 \angle = \frac{1}{9} - \frac{16}{9} = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

$$24^2 = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}$$

$$= 400 + 1600 + 100 = 586 \Rightarrow 224 \cdot 48 = 10752$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

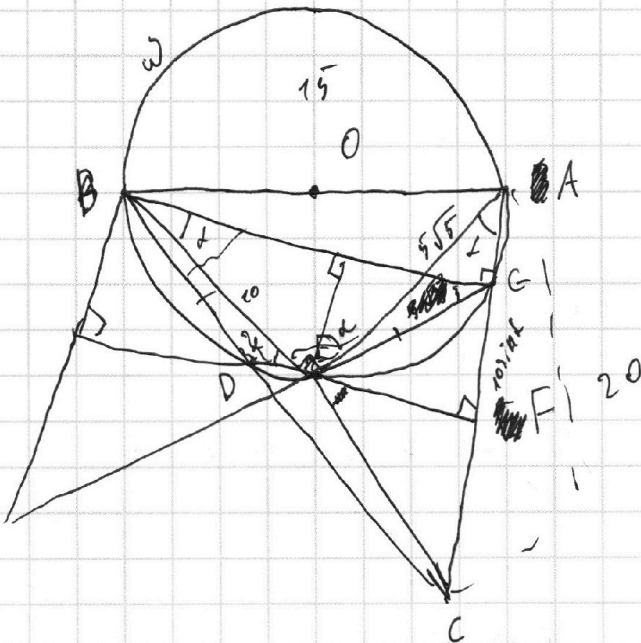


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$5\sqrt{5} \sin \alpha - 10 \cos \alpha = 5(\sqrt{5} - 2) \sin \alpha$$

$$10 \sin \alpha - 5\sqrt{5} \cos \alpha$$

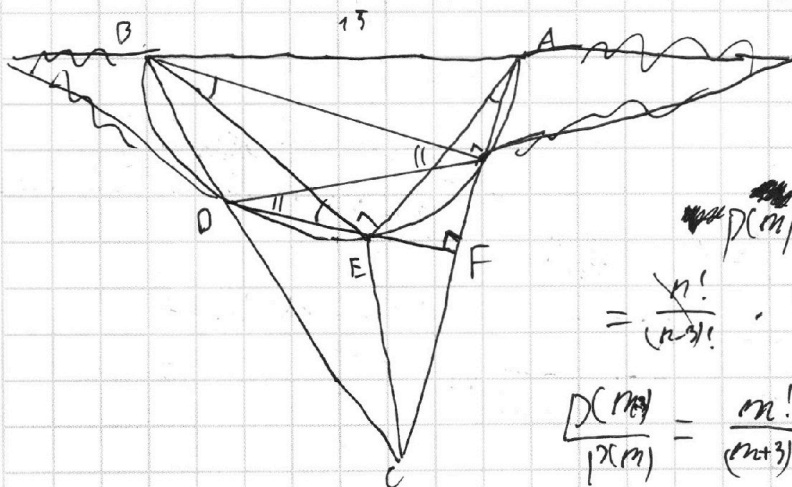
$$BG = \sqrt{15^2 - (10 \sin \alpha - 5\sqrt{5} \cos \alpha)^2}$$

$$BG - 10 \cos \alpha = 5\sqrt{5} \sin \alpha$$

$$15^2 - (10 \sin \alpha - 5\sqrt{5} \cos \alpha)^2 = (5\sqrt{5} \sin \alpha + 10 \cos \alpha)^2$$

$$225 - 100 \sin^2 \alpha + 100 \sqrt{5} \sin \alpha \cos \alpha - 175 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 5,23 \\ \times 1,23 \\ \hline 18 \\ 1384 \\ + 1823 \\ \hline 3114 \end{array}$$



$$\frac{C_n^3}{C_{n+m}^3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-3)!} \cdot \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$\frac{D(n)}{P(n)} = \frac{n!}{(n+3)!} \cdot \frac{(n-3)!}{n!} =$$

$$a^2 - a = \frac{a^2 a^2}{2} \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 18 \\ \times 1,23 \\ \hline 18 \\ 1384 \\ + 1823 \\ \hline 3114 \end{array}$$

$$1) 6 + 2t, 6 + 3t$$

$$2) 6, 6 + 5t$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 4 = \\ = 128 + 16 = 144 \\ x^2 + \frac{2}{3} = 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow D_1 = 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$4x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow D_1 = 1 + 24 = (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = \frac{1 + 5\sqrt{3}}{1 + 5\sqrt{3}}$$

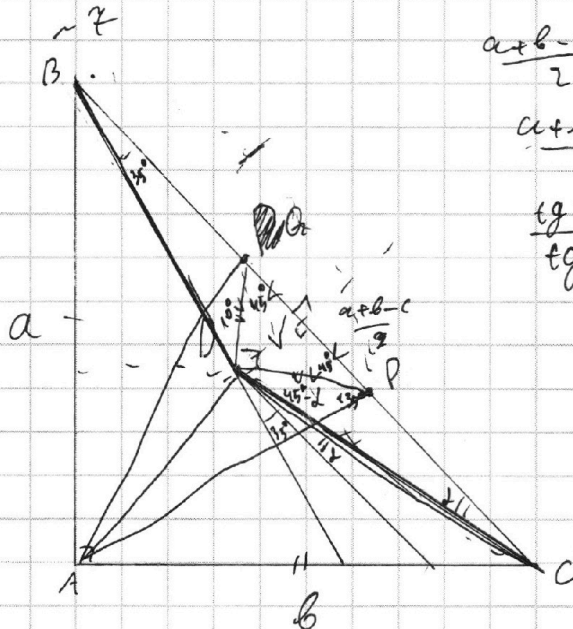


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b-c}{2} + (c-b) = \frac{a+c-b}{2}$$

$$\frac{a+b-c}{2} + (c-a) = \frac{b+c-a}{2}$$

$$\frac{\lg 350}{\lg 2} = \frac{a+c-b}{b+c-a}$$

$$\frac{b+c-a}{2} \sin \beta - \frac{a+b-c}{2} \sin \beta = (c-a) \sin \beta = b-a$$

$$\frac{b+c-a}{2} \sin \beta - \frac{a+b-c}{2} \cos \beta =$$

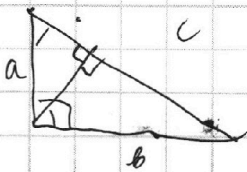
$$= \frac{1}{2} (a(-\cos \beta) + b(\cos \beta) + (c \sin \beta))$$

$$\frac{a+c-b}{2} \cos \beta - \frac{a+b-c}{2} \sin \beta = \frac{1}{2} (a)$$

$$\sqrt{a^2 - 2a^2 \cos \beta} = \sqrt{2a^2 (1 - \cos \beta)} = 2a^2 (1 - \cos \beta)$$

$$\sqrt{2b^2 (1 - \cos \beta)} = 2b^2 (1 - \cos \beta)$$

$$\cos \beta = \frac{2a^2 (1 - \cos \beta) + 2b^2 (1 - \cos \beta)}{a^2 + b^2 + c^2}$$



$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow cb = \frac{b^2}{c}$$

$$\frac{b+c-a}{2} - \frac{b^2}{c} = \frac{-2b^2 + b^2 + c^2 - ac}{2c} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2 + (b-a)c}{2c} = \frac{(b-a)(a+b) + c(b-a)}{2c} =$$

$$= \frac{(b-a)(c-(a+b))}{2c} \quad \text{ВМЕСТО} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{2c}$$

$$A \quad 5\sqrt{5} \cos 2 - 70 \sin 2$$