



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27 Рассмотрим $\begin{cases} y = x \\ x^2 - y - 2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 4$

$2x^2 - x - 4;$ $x = \frac{-x}{2} - 2$

$y = \frac{-x}{2} - 2$

$\Rightarrow 2x = 2 \left(\frac{-x}{2} - 2 \right) = 4 \left(\frac{-x}{2} - 2 \right) + \left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2$

$-\frac{x^2}{2} - 2x - 2 = 2x - 8 + \frac{x^2}{4} + x + 4$

$-2x^2 - 8x = -8x - 16 + x^2 + 4x$

$3x^2 + 4x - 16 = 0$

$D = 16 + 16 \cdot 4 \cdot 3 = 16 \cdot 13$

$x_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{13}}{6} = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3}$

$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{3};$

$(x+y)^2 = \left(\frac{-x}{2} - 2 + 4 \right)^2 = \left(\frac{-x}{2} + 2 \right)^2 = \left(\frac{-x+4}{2} \right)^2 = (y+4)^2$

Если $x = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3}$, то $(x+4)^2 = \left(\frac{12 - 2 + 2\sqrt{13}}{3} \right)^2 =$

$= \frac{(10 + 2\sqrt{13})^2}{9} = \frac{100 + 40\sqrt{13} + 52}{9} = \frac{152 + 40\sqrt{13}}{9}$

$(x+y)^2 = \left(\frac{12 - 2 - 2\sqrt{13}}{3} \right)^2 = \left(\frac{10 - 2\sqrt{13}}{3} \right)^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$x + y = \frac{yz}{x}$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = ?$$

$$\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2}$$

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2$$

$$f(x) = 4x + x^2$$

$$xy = f(x)$$

$$\begin{cases} yz = f(x) \\ zx = f(y) \end{cases}$$

$$f(x) - f(y) = 4x + x^2 - 4y - y^2 =$$

$$= 4(x-y) + (x-y)(x+y) = (x-y)(x+y+4)$$

$$f(x) - f(y) = 2y - 2x = 2(y-x)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 2(y-x) = (x-y)(x+y+4);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x - y - 4; \end{cases}$$

аналогично

$$\begin{cases} y = z \\ x = -y - z - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = -x - z - 4 \end{cases}$$

Если $y = x = z$, то

$$xy = 4z + z^2$$

$$x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

противоречие условию

$$\Rightarrow x \neq y \neq z$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = -x - y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - y - 4 \\ x = -y - z - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -x - z - 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аналогично, если $\begin{cases} y = z \\ z = -x - y \end{cases}$

если $\begin{cases} z = -x - y - 4 \\ x = -y - z - 4 \\ x = z \end{cases}$, то аналогично тоже самое

если $\begin{cases} z = -x - y - 4 \\ x = -y - z - 4 \\ y = -x - z - 4 \end{cases}$, то $\begin{aligned} z &= -y - z - 4 - y - 4 = \\ &= -2y - z - 8 \\ \Rightarrow 2z &= -2y - 8 \\ z &= -y - 4 \end{aligned}$

$$\Rightarrow -x - y - 4 = -y - 4$$

$$\Rightarrow x = 0; \quad x = 0. \text{ Проверим.}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \frac{92 + 4\sqrt{13}}{3}; \quad \frac{92 - 4\sqrt{13}}{3};$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= \frac{196 - 56\sqrt{13} + 52}{9} = (y+4)^2 \\ \Rightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 &= \frac{152 + 40\sqrt{13} + 392}{9} \\ &= \frac{102\sqrt{13} + 104}{9} = \frac{648 - 62\sqrt{13}}{9} \end{aligned}$$

$$(x+4)^2 = \left(-\frac{z}{2} + 2\right)^2 = \frac{z^2 - 8z + 16}{4} = (y+4)^2$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 = \frac{z^2 - 8z + 16}{2}$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \frac{z^2 - 8z + 16}{2} + z^2 + 8z + 16 =$$

$$= \frac{3z^2 + 8z + 48}{2} = \frac{3z^2 + 4z - 16}{2} + \frac{4z + 64}{2} =$$

$$= 2z + 32$$

$$\Rightarrow \text{Если } z = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3}, \text{ то } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 =$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{13} + 32}{3} = \frac{30 + 2\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{Если } z = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{3}, \text{ то } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 =$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{13} + 32}{3} = \frac{30 - 2\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{Если } z = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{3}, \text{ то } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \frac{92 - 4\sqrt{13}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☒

3 ☐

4 ☐

5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \frac{99 \dots 99}{25000} \sim 9 \cdot \frac{11 \dots 11}{25000} \sim 9 \cdot (11 + 1100 + \frac{11000 \dots 0}{25000})$$

$$n \sim \cancel{9 \cdot 11 + 9 \cdot 1100 + 9 \cdot \frac{11000 \dots 0}{25000}} \sim 0$$

$$n^3 \sim 9^3 \cdot \left(\frac{11 \dots 11}{25000} \right)^3 \sim 279 \cdot \left(\frac{11 \dots 11}{25000} \right)^3$$

$$279 \cdot 11^3 \rightarrow \begin{array}{r} 279 \\ \times 11 \\ \hline 2790 \\ 3069 \\ \hline 3069 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3069 \\ \times 11 \\ \hline 30690 \\ 30690 \\ \hline 33759 \end{array} \quad \begin{array}{r} 33759 \\ \times 11 \\ \hline 33759 \\ 371349 \\ \hline 371349 \end{array}$$

$$\cancel{279 \cdot 111^3} \rightarrow \cancel{279 \cdot (1100 + 11)^3} \sim \cancel{279 \cdot (11^3 + 11^2)}$$

$$1111^3 \sim (101 \cdot 11)^3$$

$$279 \cdot 1111^3 \sim 279 \cdot 11^3 \cdot (101)^3 = 361349 \cdot 101^3 \sim$$

$$\sim \cancel{36134900} \cdot 361349 (100^3 + 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 + 1) \sim$$

$$\sim 361349000000 + 3 \cdot 36134900^2 + 3 \cdot 361349 \cdot 100 + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 40 = 9x; \quad x = \frac{40}{9} \Rightarrow 2x = \frac{80}{9}$$

$$\Rightarrow CF = \frac{80}{9} \Rightarrow AF = AC - CF =$$

$$= 20 - \frac{80}{9} = \frac{180 - 80}{9} = \frac{100}{9}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{100}{9}$$

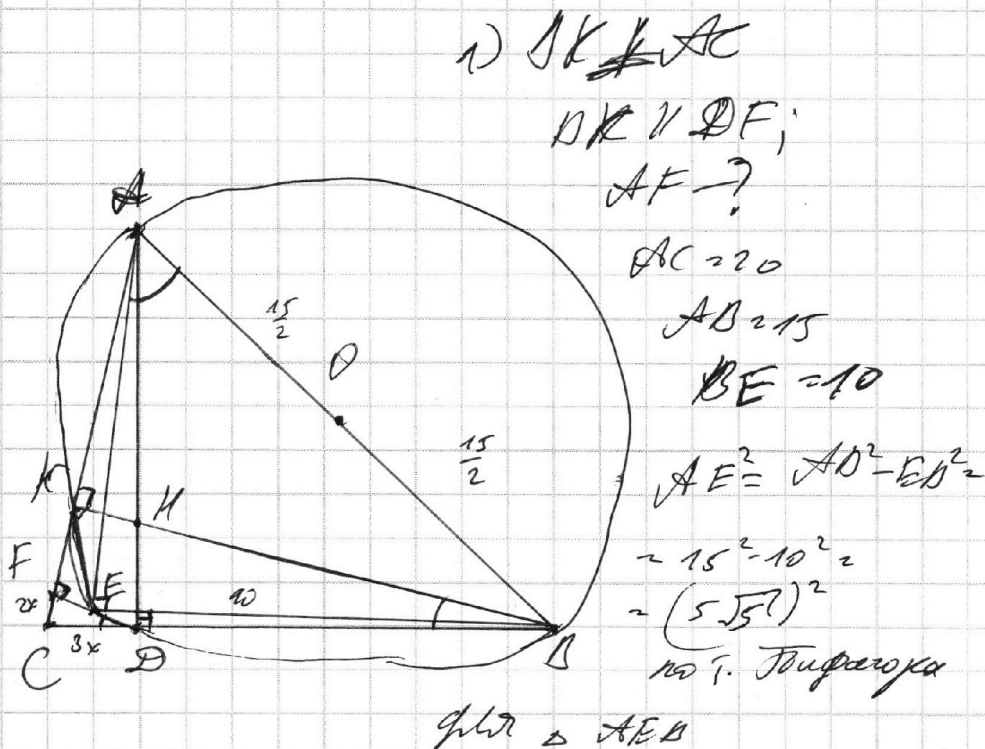


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AE = 5\sqrt{5}$$

$$CK \cdot CA = CD \cdot CB; \quad K \in AD, DK$$

$$\frac{CF}{CK} = \frac{CD}{CB} = \frac{FD}{DK} \quad \text{т.к. } \angle CDF \sim \angle CKD$$

$$DE \parallel KB \Rightarrow \angle CDE = \angle EKB$$

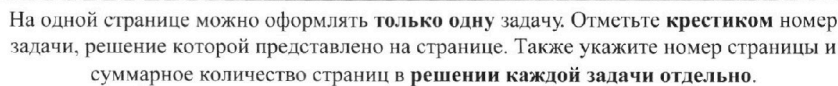
$$\Rightarrow \angle CDF = \angle CAK = \angle DAE$$

$$\sin \angle DAE = \frac{DE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \angle CDF = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{2x}{3x}$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CK}{CB} = \frac{2}{3}; \quad CK \cdot CA = CD \cdot CA$$

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CK}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CK}{20} = \frac{2}{3} \Rightarrow CK = \frac{40}{3}$$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пороча OR-кода недопустима!

~~Зна~~ Подсчитаем угол или выдвигает
 три правильные и две неправильные
 хорды $\Rightarrow$ кол-во подсчетов выдвигает $\Rightarrow$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} \Rightarrow P(5) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot (n-5)!}{2! \cdot n! \cdot (n-5)!}$$

$$= \frac{(n-3)! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{n!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{n!}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{n!}}$$

$P(k)$ - вероятность подслушивания ~~вита~~ когда
~~достигает~~ выданных k кодов

$$p(8) = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot (n-8)!}{8! \cdot 1! \cdot (n-8)!}$$

$$2 \quad \frac{(n-3)! \cdot 5!}{8! \cdot n!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}{5! \cdot (n-8)! \cdot 8!} = \frac{(n-3)! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}{(n-8)! \cdot 8!}$$

$$P(8) = \frac{(n-1)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{8!(n-8)!} = \frac{(n-1)! \cdot n!}{5!8!(n-8)!^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \Rightarrow \frac{P(8)}{P(5)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $6\frac{28}{5}$ раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a=0$, то $x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = 0$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}; \text{ но } x^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ при $a=0$ у первого уравнения нет корней, но условие, они есть. Противоречие $\Rightarrow a \neq 0$;

Если $a=1$, то $x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{1}{3} = 0$

$x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ при $a=1$ у первого уравнения нет корней, но условие, они есть. Противоречие. $\Rightarrow a \neq 1$.

Если $a=2$, то $x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = x^2 - x \cdot 2 + 2 = 0$

$x^2 - 2x - 2 = 0$; $D_1 > 0 \Rightarrow$ корни есть.

$2x^2 - x(a^3 - a^2) - 2a^6 - 8a - 4 = 2x^2 - x \cdot 4 - 148 = 0$

$D_2 > 0 \Rightarrow$ корни есть.

$x^2 - 2x - 2 = 0$; $D_1 = 4 + 8 = 12 = 4 \cdot 3$

$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$x_2 = 1 + \sqrt{3}$

$2x^2 - 4x - 148 = 0$

$x^2 - 2x - 74 = 0$; $D_2 = 4 + 4 \cdot 74 = 4(74+1) = 4 \cdot 75 = 4 \cdot 5^2 \cdot 3$

~~х~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = 0; \text{ Пусть } x_1, x_2 \text{ - корни этого уравнения}$$

$$2x^2 - x(a^2 - a^2) - 2a^6 - 8a - 4 = 0; \text{ Пусть } x_3, x_4 \text{ - корни этого уравнения}$$

1) Допустим, мы нашли такое a , что без
ограничения общности x_1 - 4-ый член арифметической
процессии, x_2 - 5-ый, x_3 - 2-ой, x_4 - 7-ой;

$$\text{Тогда } x_1 = a_1 + 3d, x_2 = a_1 + 4d, x_3 = a_1 + d;$$

$$x_4 = a_1 + 6d; a_1 \text{ - первый член арифметической} \\ \text{процессии; } d \text{ - разность процессии} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = 2a_1 + 7d = x_3 + x_4;$$

$$\text{по т. Виета } \begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - a; \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2};$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2; a^3 - 3a^2 + 2a = 0; a(a^2 - 3a + 2) = 0;$$

$$a(a^2 - a - 2a + 2) = 0; a(a(a-1) - 2(a-1)) = 0;$$

$$a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D_2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \Rightarrow x_3 = \frac{2 - 25\sqrt{3}}{2} \sim 1 - 5\sqrt{3};$$

$$x_4 = 1 + 5\sqrt{3};$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 - 5\sqrt{3}; \quad x_1 = 1 - \sqrt{3}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}; \quad x_4 = 1 + 5\sqrt{3}$$

образуют арифметическую прогрессию

$$c \quad a_1 = 1 - 7\sqrt{3}; \quad d = 2\sqrt{3}$$

$$x_3 = a_2; \quad x_1 = a_4; \quad x_2 = a_5; \quad x_4 = a_7;$$

$$\Rightarrow a \sim 2 - \text{короче б.}$$

и только эти четыре значения могут принадлежать к.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

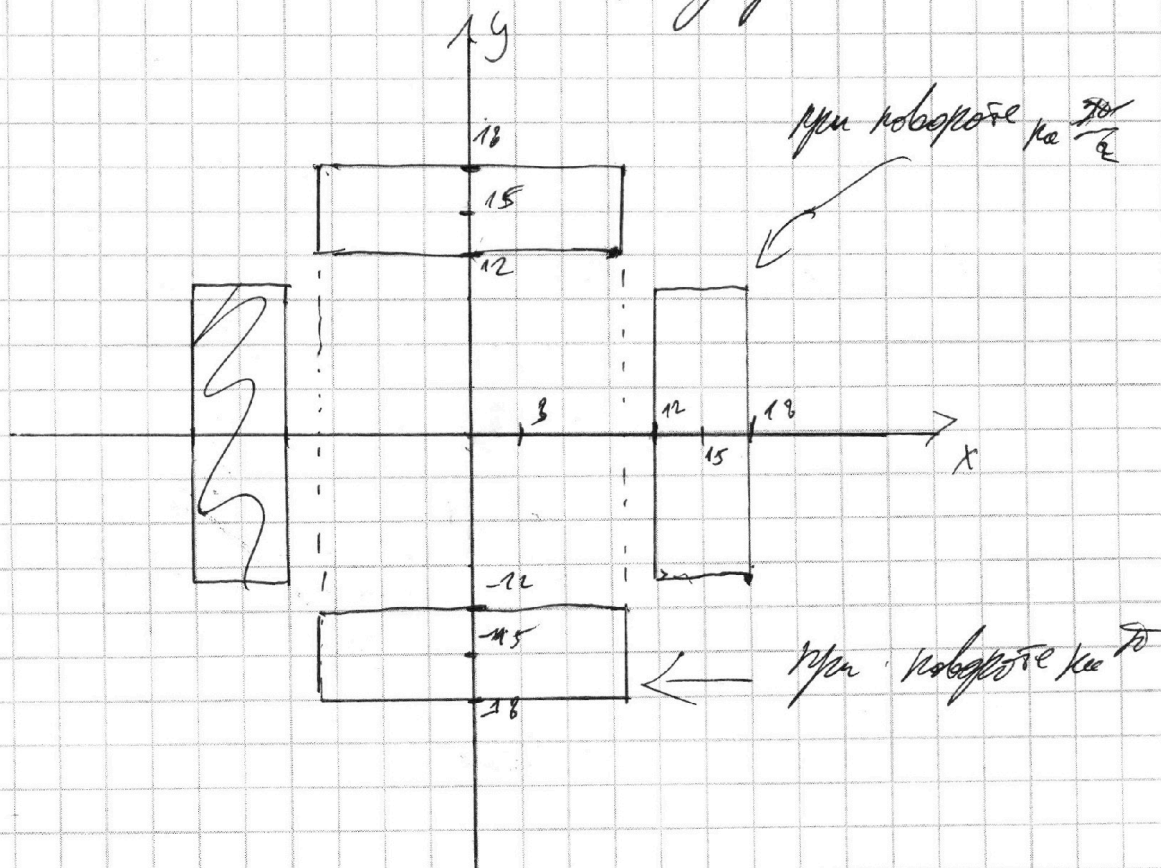
СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ левая сторона фигуры Φ лежит
на прямой $y = 12$; аналогично вершина

~~$\Rightarrow$ левая сторона фигуры Φ лежит~~
на прямой $y = 18$;

$\Rightarrow$ при повороте по часовой стрелке
на 45° , то есть при симметрии
относительно прямой $y = x$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

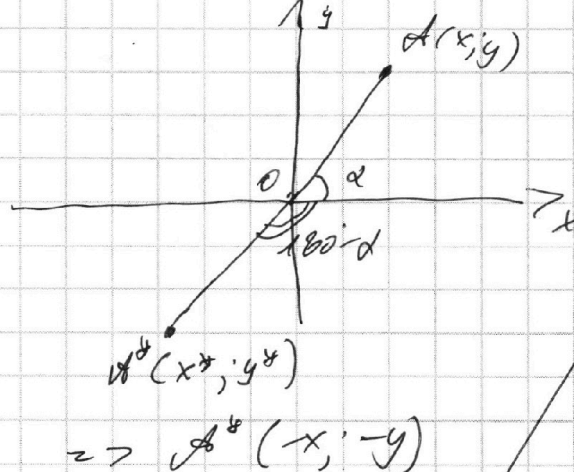
26

1) Поворот вокруг начала координат на угол α по часовой стрелке это симметрия относительно начала координат.

координат.
 $OA \sim r$

$$\begin{cases} x \sim r \cdot \cos \alpha \\ y \sim r \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \sim r \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \sim -r \cdot \cos \alpha \sim -x \\ y' \sim r \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \sim r \cdot \sin \alpha \sim y \end{cases}$$



2) $|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$

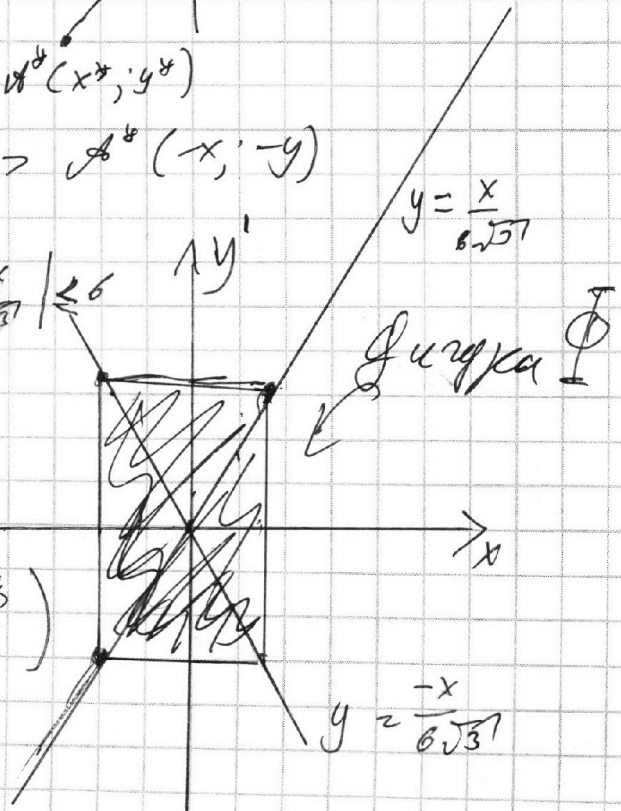
Положим $y' = y - 15$, тогда

$$|y' + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y' - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

(таким образом ~~весь график~~ ~~всю фигуру~~ ~~на 15 единиц~~)

Можно же

сказать, что схематически всё



$$-9 + 15 \leq 3, \quad y \geq 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = 0; \quad x_1, x_2 \text{ корни}$$
$$2x^2 - x(a^3 - a^2) - 2a^6 - 8a - 4 = 0, \quad x_3, x_4 \text{ корни}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ || & || & || & || \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$x^2 - x(a^2 - a) + \frac{2-a^3}{3} = 0$$
$$x_1 + x_2 = \frac{a^2 - a}{1} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow a^3 - a^2 = a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$x^2 = 0$$

$$\text{Если } a=0, \text{ то}$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 - \text{не}$$

$$\text{Если } a=1, \text{ то}$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0;$$

$$\text{Если } a=2, \text{ то}$$

$$2x^2 - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$x^2 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z(2+4)}{x(x+4)} \Rightarrow (x+4)x^2 = z^2(2+4)$$

$$x^2(x+4) = y^2(y+4) = z^2(2+4)$$

Если $x=y=z$, то $x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow 4x=0, x=0$
 иначе $x \neq y$

$$\frac{z^2(2+4)}{(x+4)} = \left(\frac{yz}{x}\right)^2$$

$$\frac{z^4(2+4)^2}{x^4} = \frac{y^4(2+4)^2}{y^4} \Rightarrow \frac{z^4(2+4)^2}{x^4} = 5$$

$$(2+4)^2 + (x+4)^2 + (y+4)^2 = (2+4)^2 \left(1 + \frac{z^4}{x^4} + \frac{y^4}{y^4}\right) =$$

$$= (2+4)^2 \left(\frac{x^4 + y^4 + z^4 y^4 + z^4 x^4}{x^4 y^4}\right) = a^2(a-1) =$$

$$= 2^7 - 2^4 - 2^2 = 2^2(2^5 - 2^2 - 1) = 2^2 \cdot 4 = 16$$



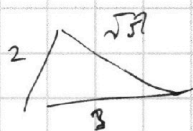
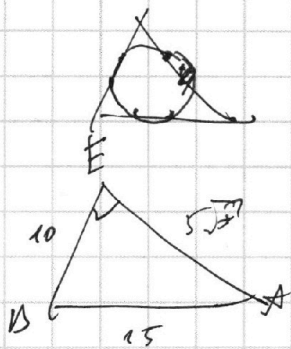
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

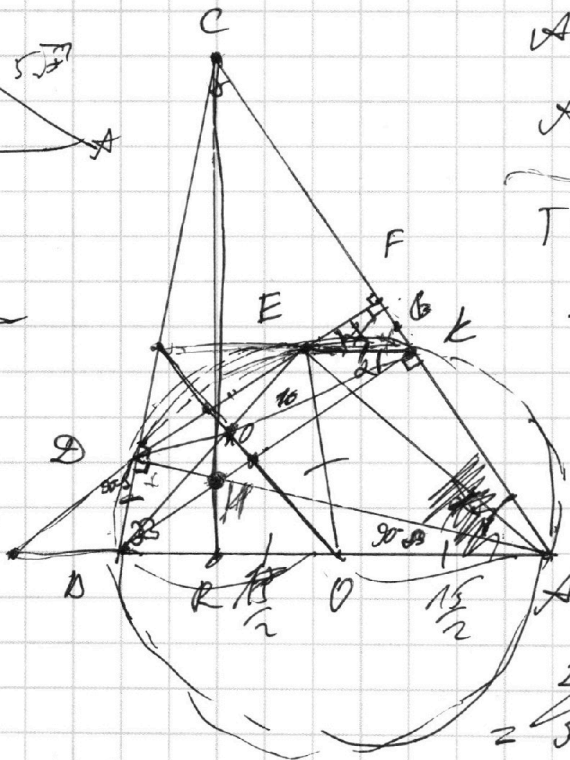
~3



$$\sin(\angle BAE) = \frac{2}{3}$$

$$\cos(\angle BAE) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\angle K = 10$$



$$BE = 10$$

$$AC = 20$$

$$AP = 15$$

$$AF = ?$$

$$T = DE \cap AB$$

$$\angle BEK = 2\alpha = 2\angle K$$



$$DE \parallel BK$$

$$\angle FEK = 2\alpha$$

$$\angle EKO = 2\alpha$$

$$\angle DTB = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle DTB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$\angle FEK = 2\alpha = 2\angle FAD = 90^\circ$$

$$\angle DAC = 2\alpha; \angle DAD = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle DAF = 2\alpha - 90^\circ + \alpha; \angle FEK = 2\alpha + \alpha - 90^\circ$$

$$\angle DTB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$$

$$CK \cdot CA = CD \cdot CB$$

$$AK \cdot AC = AR \cdot AB$$

$$AE = 5\sqrt{3}$$

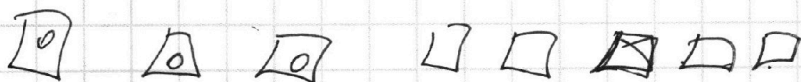
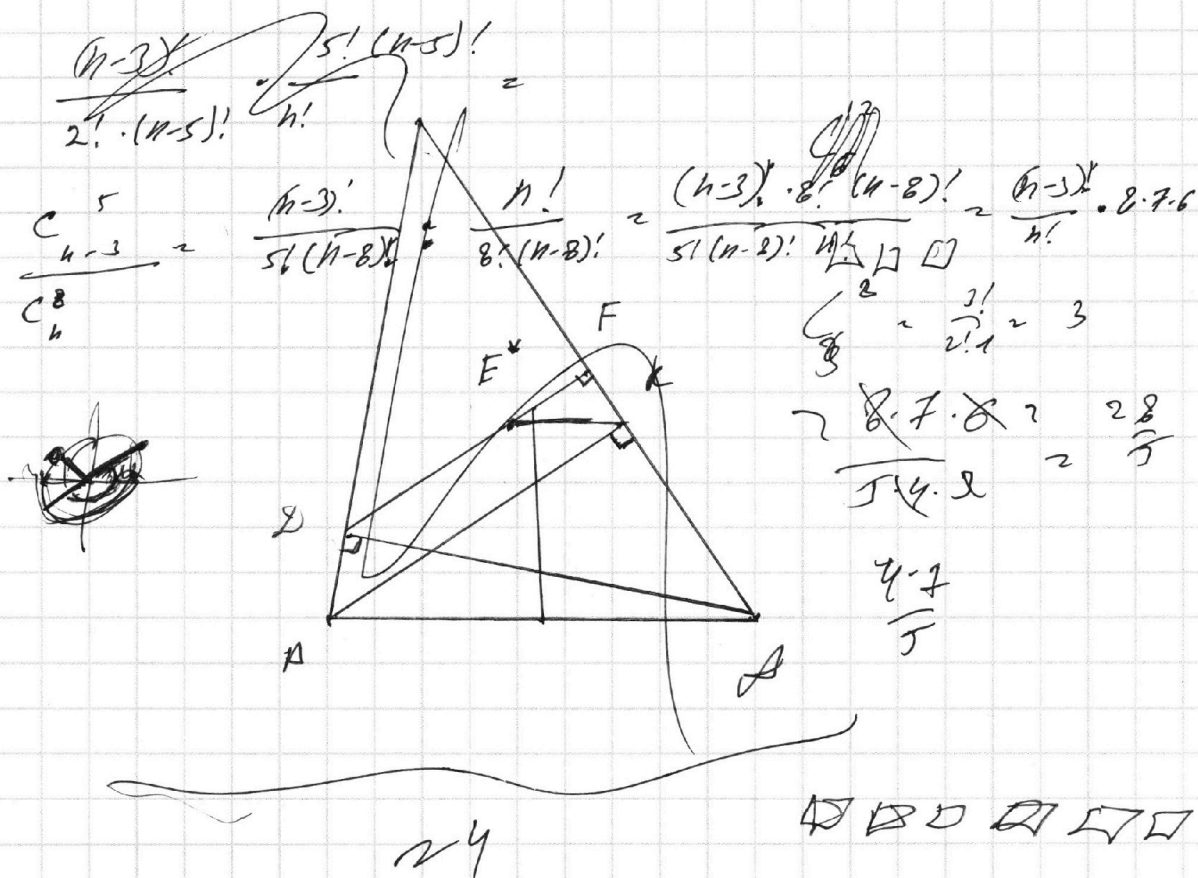


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение и комбинаторика. Тогда ~~всего~~
всего вычислений вычислений с комбинаторикой C_n^5
 $\sim \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$ ~~вычислений~~ ~~вычислений~~ ~~вычислений~~
вычислений $d. C_{n-3}^2 \sim \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!}$
 ~ 7 вероятности



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2(y+4) = x^2(x+4) = 2^2/2+4 = 3$$

Если $x > y$, то решение

есть

$$\begin{aligned} \rightarrow x^2 &= 4x + x^2 \\ \rightarrow x &= 20 \end{aligned}$$

проблема

условия

$$\begin{aligned} \rightarrow x &\neq y \\ x &\neq 20 \end{aligned}$$

Если $x > y$, то

$$x^2(x+4) \geq y^2(y+4)$$

$x > y \Rightarrow x+4 > y+4$; Если $x, y > 0$, то

$$x^2 \cdot y^2 \geq x^2(x+4) > y^2(y+4) = 3$$

$$\frac{10}{\sin \angle DAE} = 15 \Rightarrow y < 10;$$

$$\sin \angle DAE = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

AF-?

$$AC = 20, AB = 15;$$

$$DE = 10$$

$$a) DT \perp AC;$$

$$b) FT \cdot FA = FE \cdot FD$$

$$CT \cdot CA = CD \cdot CB$$

$$DF \parallel DT$$

$$\angle ETB = 180^\circ - \angle DET =$$

$$\angle DAT;$$

$$42$$

$$\begin{array}{r} 80190 \\ \times 3 \\ \hline 240570 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72929 \\ + 240570 \\ \hline 729729 \end{array}$$

$$n = 99 \dots 99$$

$$25000$$

$$n^3 = \dots ?$$

$$81.9 = 729$$

$$9; 9^3 = 729$$

$$99; 99^3 = 9(9 \cdot 11)^3 = 9^3 \cdot 11^3 = 729 \cdot 11^3$$

$$729 \cdot 11^3 = 729 \cdot (10+1)^3 = 729 \cdot 10^3 + 729 \cdot$$

$$10^2 \cdot 3 + 729 \cdot 10 + 729 = 729000 + 72900 \cdot 3 + 72900 \cdot 729 =$$

$$= 729 \cdot 729 + 3(72900 + 7290) = 729 \cdot 729 + 3(80190) = 729 \cdot 729 + 240570 =$$

$$= 869949$$

$$32^2 + 42 - 16 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 16 = 16(12+1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \neq 0;$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2; \\ yz = 4x + x^2; \\ xz = 4y + y^2. \end{cases}$$

$$xy = \frac{4}{z}(z + 4) \Rightarrow (z + 4)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2$$

$$\text{аналогично } (x + 4)^2 = \frac{y^2 z^2}{x^2}, (y + 4)^2 = \frac{x^2 z^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2}$$

$$x = \frac{4z + z^2}{y}, \Rightarrow yz = 4\left(\frac{4z + z^2}{y}\right) + \left(\frac{4z + z^2}{y}\right)^2$$

$$yz = \left(\frac{4z + z^2}{y}\right)\left(4 + \frac{4z + z^2}{y}\right) = z\left(\frac{4 + z}{y}\right)\left(\frac{4y + 4z + z^2}{y}\right)$$

$$y = \left(\frac{4 + z}{y}\right)\left(\frac{4y + 4z + z^2}{y}\right);$$

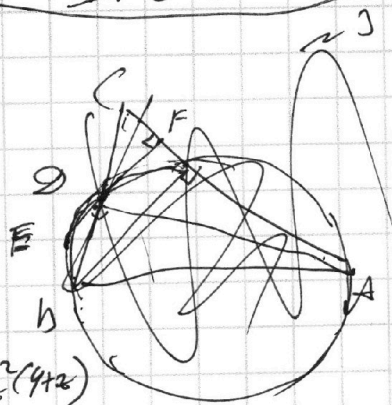
$$= (4 + z) \cdot 4y + (4 + z)^2 \cdot z$$

$$6.25 = 2 \cdot 1.5 = 3$$

$$y(4 + y)$$

N

$$x^2(4 + x) = z^2(4 + z)$$



$$f(a) = 4a + a^2 = a(4 + a)$$

$$f(x) = yz$$

$$f(y) = xz$$

$$f(z) = xy$$

$$\frac{f(x)}{z} = \frac{f(z)}{x} \Rightarrow f(x) \times z = f(z) \times x$$

$$y = \frac{f(x)}{z}$$

$$y = \frac{f(z)}{x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

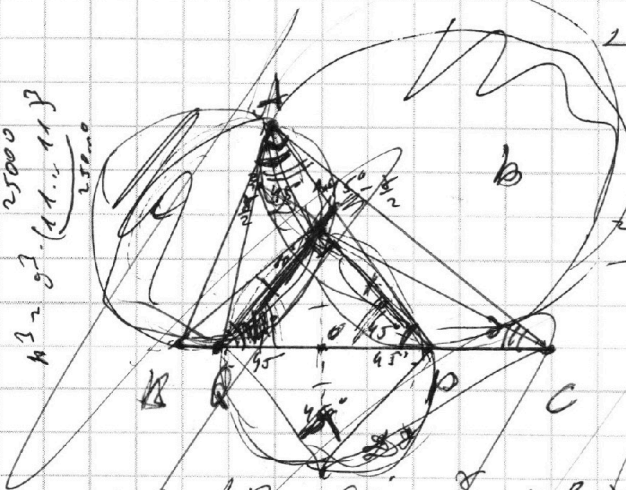
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 \cdot 8 = 30 + 28 = 58 \sim 27$$

$$48 + 16 = 64$$

$$8 \cdot 4 = 16 + 16$$



$$\angle DCB = ?$$

$$\angle DAC = 35^\circ$$

$$\angle QAD = 185^\circ$$

$$\angle AQA = 10^\circ$$

$$\angle QAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} =$$

$$\sim 2 \angle BAC = \frac{\alpha}{2};$$

$$101$$

$$\angle QAP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$$

1) O-центр QP; D^{*}-сим. O относительно O.

QO = QO = OP = O^{*}O = D, Q, P, D^{*} на одной окружности.

1) KODG y = xy + x \leq 1

$$y \leq \frac{1}{2}$$

$$\angle QAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 2 \angle BAC = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle PAC = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$1) \angle AQP = 45^\circ$$

$$\angle APB = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\sim \angle QAP =$$

$$\sim 180^\circ - 180^\circ$$

$$y \leq \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot 2 + 2 = 16$$

$$2 \cdot 3 = 26 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle QAP = \frac{180^\circ - 90^\circ + \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\sim \angle QAP = 45^\circ$$

$$\angle QAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle ARC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$|y - x| + |y + x| \leq 4$$

$$x - y - x - y \leq 1 / 2y \leq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

