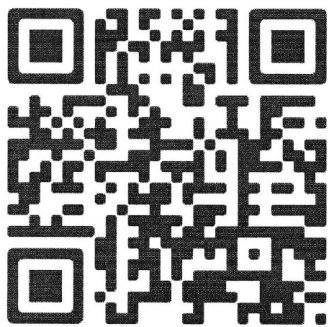
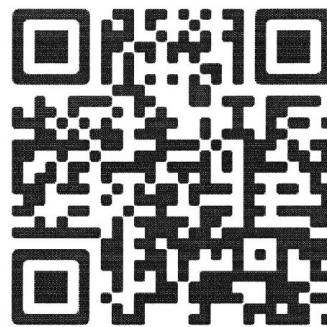




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 : z \\ yz = 3x + x^2 : y \\ zx = 3y + y^2 : x \end{cases} \text{ III. } z, x, y \neq 0$$

III. к. $x, y, z \neq 0$, тогда можем первое уравнение поделить на z , второе уравнение поделить на x , третье уравнение поделить на y , получим:

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{z} = z + 3 \quad (1) \\ \frac{yz}{x} = x + 3 \quad (2) \\ \frac{zx}{y} = y + 3 \quad (3) \end{cases}$$

Теперь вычтем из первого уравнения системы второе, получим

$$\frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} = (z+3) - (x+3) \Rightarrow \frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} = z - x \Rightarrow \frac{x^2y - yz^2}{zx} = z - x \Rightarrow$$

$$\frac{y(x-z)(x+z)}{zx} = z - x \Rightarrow \frac{-y(z-x)(x+z)}{zx} = z - x, \text{ аналогично вычитая из}$$

$$\text{второго третьего получим } \frac{yz}{x} - \frac{zx}{y} = x - y \Rightarrow \frac{y^2z - zx^2}{yx} = x - y \Rightarrow$$

$$\frac{z(y-x)(y+x)}{yx} = x - y \Rightarrow \frac{-z(x+y)(x-y)}{yx} = x - y, \text{ а теперь из третьего}$$

$$\text{первое получим } \frac{zx}{y} - \frac{xy}{z} = y - z \Rightarrow \frac{x^2z - y^2z}{xy} = y - z \Rightarrow \frac{z(x-y)(x+y)}{xy} = y - z \Rightarrow$$

$$\frac{-z(x+y)(y-x)}{xy} = y - z \Rightarrow \frac{z^2x}{yz} - \frac{xy^2}{yz} = y - z \Rightarrow \frac{x(z-y)(z+y)}{yz} = y - z \Rightarrow$$

$$\frac{-x(y-z)(z+y)}{yz} = y - z, \text{ теперь предположим, что } x \neq y \neq z, \text{ тогда}$$

либо $x - y \neq 0$, либо $y - z \neq 0$, либо $z - x \neq 0$, предположим, что для



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 83

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ограничения области $y-z \neq 0$, тогда из ** имеем:

$$\frac{-z(x+y)(x-y)}{yx} \rightarrow x-y \text{ (т.к. } x-y \neq 0 \text{, можно поделить на } x-y \text{)}, \text{ получим}$$

$$\frac{-z(x+y)}{yx} = 1 \Rightarrow yx + zx + zy = 0, \text{ аналогично, если т.н. система}$$

симметрична, если $x-z \neq 0$, $z-y \neq 0$ получим, что также

$yx + zx + zy = 0$, подставив поделив на $z-x$ и $y-z$ соответственно

уравнения * и ***, тогда имеем $yx + zx + zy = 0$, теперь

рассмотрим нашу систему $\begin{cases} \frac{xy}{z} = z+3 & (1) \\ \frac{yz}{x} = x+3 & (2) \\ \frac{zx}{y} = y+3 & (3) \end{cases}$ и попарно перемножим

все уравнения, получим систему $\begin{cases} y^2 = (x+3)(z+3) & (1) \\ x^2 = (y+3)(z+3) & (2) \\ z^2 = (y+3)(x+3) & (3) \end{cases}$

теперь вычтем из первого уравнения второе, получим

$$y^2 - x^2 = (x+3)(z+3) - (y+3)(z+3) \Rightarrow (y-x)(y+x) = (x-y)(z+3) \Rightarrow$$

$$-(x-y)/(x+y) = (x-y)/(z+3) \Rightarrow (x-y)/(x+y+z+3) = 0, \text{ вычтем из второго}$$

третье и из третьего первое, получим $(y-z)/(x+y+z+3) = 0, (x-z)/$

$(x+y+z+3) = 0$ и если $x \neq y \neq z$, то тогда из скобок $y-z, x-z, x-y$

не равна 0, тогда ~~без ограничения области $y-z \neq 0$, то~~

$(y \neq z)$: без ограничения области если $y \neq z$, то из того, что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(y-z)/(x+y+z+3)=0$ получаем, что $x+y+z+3=0$, так же $x \neq y$ и $x \neq z$, то посмотрим на $\vee$ и $\vee\vee$ соответственно и найдем, что
 опять $x+y+z+3=0$. Теперь вернемся $\Rightarrow$ $x+y+z=-3$, теперь
 вернемся к ~~исходной~~ ^{второй} системе уравнений, которая
 имеет вид $\begin{cases} \frac{xy}{z} = z+3 \\ \frac{yz}{x} = x+3 \\ \frac{zx}{y} = y+3 \end{cases}$ и возведем каждое уравнение

$$\begin{aligned} & \text{в квадрат и сложим, получим } \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+3)^2, \text{ но также } \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \\ & = \frac{(x^2 y^2)^2 + (y^2 z^2)^2 + (z^2 x^2)^2}{z^2 x^2 y^2} = \frac{(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)^2 - 2x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{z^2 x^2 y^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{((xy+yz+xz)^2 - 2xyz(x+y+z))^2 - 2x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{z^2 x^2 y^2} = A, \text{ но } xy+yz+xz=0, \text{ тогда}$$

$$A = \frac{(-2xyz(x+y+z))^2 - 2x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{z^2 x^2 y^2} = \frac{4x^2 y^2 z^2 (x+y+z)^2 - 2x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 y^2 z^2}$$

$$= 4(x+y+z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \cdot (-3)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 36 - 2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ но}$$

$$\text{из системы } \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \text{ сложив, получим } xy + yz + zx = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx - 3(x+y+z) = 0 - 3 \cdot (-3) = 9, \text{ тогда } A =$$

$$= 36 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 36 - 18 = 18, \text{ тогда осталось рассмотреть случай } x=y=z, \text{ тогда}$$

$$xy = 3z + z^2 \Rightarrow z^2 = 3z + z^2 \Rightarrow z - 3z = 0 \Rightarrow z = 0, \text{ противоречие } \Rightarrow \text{такое невозможно}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x = n+1$, тогда $n^3 = (x-1)^3 = (x^2 - 2x + 1)(x-1) =$
 $= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, по т.н. ~~н~~ составлю

число вид $\underbrace{999 \dots 99}_{40000}$, то x имеет вид $\underbrace{10 \dots 000}_{40000}$,

тогда x^3 имеет вид $\underbrace{100 \dots 0}_{120000}$, а $3x^2$ имеет вид

$\underbrace{300 \dots 0}_{80000}$, а $3x$ имеет вид $\underbrace{3000 \dots 0}_{40000}$, теперь заметим,

~~что на-во чисел в числе $x^3 - 3x^2 + 3x$ что $x^3 - 3x^2$~~

имеет вид $\underbrace{9999}_{40000-1} \underbrace{70 \dots 0}_{80000}$, а число $x^3 - 3x^2 + 3x$ тогда имеет

вид $\underbrace{9999}_{40000-1} \underbrace{7000}_{40000-1} \underbrace{300}_{40000} 0$, тогда число $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ имеет

вид $\underbrace{999}_{40000-1} \underbrace{700}_{40000-1} \underbrace{03}_{40000} 9999$, тогда в этом числе

всего $40000 - 1 + 40000 = 80000 - 1$ ~~девятка~~ = 79999 девяток.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

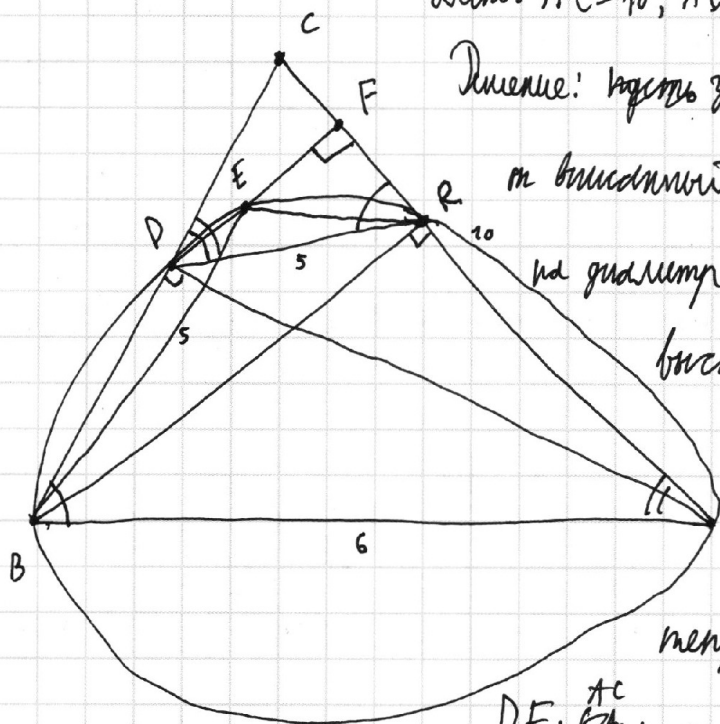
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Дано: $AC=10$, $AB=6$, $BE=5$



Решение: Пусть заметим, что $\angle BDA = 90^\circ$ (т.к. ΔBDA вписанный в окружности w и опирается на диаметр), теперь пусть R - основание высоты ΔABC из вершины B ,

тогда, т.к. $\angle BDA = \angle BRA = 90^\circ$, то $R \in w$, но

теперь заметим, что $BR \perp AC$,

$DE \perp AC$ по условию $\Rightarrow BR \parallel DE$, но

$B \in w$, $A \in w$, $R \in w$, а также $E \in w$ (по условию) $\Rightarrow BDER$ - вписанный четырехугольник в котором $DE \parallel BR \Rightarrow BDER$ - равнобедренная трапеция,

тогда $BD = RE$ (как диагонали равнобедренной трапеции) $= 5$ (по условию),
(по свойству высотного четырехугольника)

также, т.к. BDR вписанный, то $\angle BDR = 180^\circ - \angle CAB$, но $\angle BDR =$

$= 180^\circ - \angle CDR$, тогда $180^\circ - \angle CDR = 180^\circ - \angle CAB \Rightarrow \angle CDR = \angle CAB$, аналогично

имеем, что $\angle DRA = \angle DBA = 180^\circ - \angle CBA$, но $\angle DRA = 180^\circ - \angle CRD \Rightarrow$

$180^\circ - \angle CRD = 180^\circ - \angle CBA \Rightarrow \angle CRD = \angle CBA$, но тогда, т.к. $\angle CDR = \angle CAB$,

$\angle CRD = \angle CBA$, то $\Delta DCR \sim \Delta ACB$ (по двум углам), но тогда имеем

стр. 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{а } \frac{DR}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \frac{DR}{AB} = 10 \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}, \text{ но также}$$

замечтим, что $\triangle DAF \sim \triangle CAD$ (м.п. $\angle DFA = 90^\circ = \angle CDA$ и $\angle CDA$

у них общий), тогда $\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow CA \cdot AF = AD^2$, тогда

$$AF > \frac{AD^2}{CA}, \text{ но по теореме Пифагора для } \triangle DCA \text{ имеем } AD^2 + CD^2 =$$
$$= AC^2 \Rightarrow AD^2 = AC^2 - CD^2 = 100 - \left(\frac{25}{3}\right)^2 = 100 - \frac{5^4}{3^2} = \frac{300 - 625}{3^2} =$$

$$= \frac{275}{9}, \text{ тогда } AF = \frac{275}{9} : AC = \frac{275}{9} : 10 = \frac{55}{18} = 3 \frac{1}{18}.$$

англ. ?



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Рассмотрим случай, когда игрок может указать на пять коробок.

Заметим, что вероятность победы - это кол-во положительных

исходов к общему числу исходов, пусть у нас всего k коробок, тогда

общее число исходов равно $\frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!}$ (т.е. кол-во способов выбрать любую

первую шарик равно k , вторую уже $k-1$, третью $k-2$ и мы делим на число перестановок между ними, т.е. $3!$), теперь посчитаем кол-во

положительных исходов, у нас игрок выберет пять коробок и число

исходов, что в этих пяти коробках ровно 3 шарика тогда равно

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ (т.е. кол-во способов выбрать коробку первую шарик равно 5,

вторую равно 4, третью равно 3 и между ними $3!$ перестановок)

т.е. а $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$, тогда в первом случае вероятность выигрыша

равна $10 : \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!} = 10 \cdot \frac{3!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}$. Теперь рассмотрим

какова будет вероятность выигрыша, если игрок может указать

6 коробок, то это общее число исходов равно по-прежнему $\frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!}$, а

кол-во положительных исходов равно кол-ву способов разместить три

шарика по пяти коробкам, т.е. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ (т.е. кол-во доступных

доступных коробок для первого шарика равно 6, для второго 5, для третьего 4 и кол-во перестановок равно $3!$), тогда в этом случае вероятность

выиграть равна $20 : \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3!} = 20 \cdot \frac{3!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}$, тогда $20 \cdot \frac{3!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)} : \left(\frac{3!}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)} \cdot 10 \right) = \frac{20}{10} = 2$, т.е. вероятность увеличилась в два раза.

Ответ: 2

стр. 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

Пусть корни линейного уравнения второго уравнения равен x_1 , ~~тогда~~ a — шаг прогрессии, которой принадлежит все корни равен k , тогда $x_1 + k$ ~~корень~~ и $x_1 + 2k$ и $x_1 + 3k$ — корни первого уравнения, а x_1 и $x_1 + 5k$ — корни второго уравнения, но тогда заметим, что сумма корней первого уравнения равна $2x_1 + 5k$ и равна сумме корней второго уравнения, теперь пусть x_1, x_2 — корни первого уравнения, а x_3, x_4 — корни второго уравнения x_3, x_4 , тогда по теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = \frac{-(-(a^2 - a))}{a \cdot 1} = a^2 - a = a(a - 1)$, а из второго уравнения по теореме Виета имеем $x_3 + x_4 = \frac{-(-(a^3 - a^2))}{4}$,

но также мы выяснили ранее, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, тогда имеем $a^2 - a(a - 1) = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow a(a - 1) = \frac{a(a^2 - a)}{4} \Rightarrow 4a(a - 1) = a^2(a - 1) \Rightarrow a(a - 1) = \frac{a^2(a - 1)}{4} \Rightarrow 4a(a - 1) - a^2(a - 1) = 0 \Rightarrow (a - 1)(4a - a^2) = 0 \Rightarrow$

$(a - 1) \cdot a \cdot (4 - a) = 0 \Rightarrow$ либо $a = 0$, либо $a = 1$, либо $a = 4$, осталось

проверить, что при этих a уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ и $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ действительно имеют по два корня, которые являются соответственно такими линейными арифметической прогрессии.

стр. 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $a=0$, то $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 - 5$, а $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - 4 = 0$, т.е. корни первого уравнения $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$, а второго 1 и -1 , и $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$ но тогда разность прогрессии равна $\sqrt{5} - (-\sqrt{5})$ или $\sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{5}$, т.е.

$-2\sqrt{5}$ или $2\sqrt{5}$, но тогда, т.е. 1 и -1 члены этой прогрессии, то $1 + m \cdot 2\sqrt{5} = -1$, где m - целое число, тогда $m \cdot 2\sqrt{5} = -2 \Rightarrow m\sqrt{5} = -1 \Rightarrow m = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, но m - целое, противоречие $\Rightarrow a=0$ не подходит

Если $a=1$, то $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 + 1 - 5 = x^2 - 4 = 0$, $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \Rightarrow$

$4x^2 - 1 = 0$, тогда корни первого уравнения - это $x = 2$ и -2 , а второго $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, но тогда разность ~~всех~~ ~~разностей прогрессии~~, но $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ разность прогрессии это разность корней первого уравнения (т.е. они соседние члены прогрессии), т.е. либо -4 , либо 4 , но тогда $\frac{1}{2} + 4 \cdot m = -\frac{1}{2}$, где m - целое (т.е. $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ также члены этой прогрессии) $\Rightarrow m = \frac{1}{4}$, но m - целое, противоречие, но это действительно противоречие

если же $a=4=2^2$, то $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 1 = 0$

$2x^2 - (2^4 - 2^2) \cdot x - 1 = x^2 - 12x - 1$, а также $4x^2 - (2^3 - 2^2)x + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2^6 - 4 = 4x^2 - 4x - 12 = 0$ ~~по дискриминанту $148 = 4 \cdot 37 + 16$~~

стр. 2.

стр. 1.

тогда разность между корнями $2\sqrt{D} = 2\sqrt{148} = 2\sqrt{4 \cdot 37} = 4\sqrt{37}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 = (a^3 - a^2) \cdot x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - (2^6 - 2^4) \cdot x + 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2, \text{ или нулем}$$

$$\geq 4x^2 \text{ уравняем } 4x^2 - (2^6 - 2^4) \cdot x + 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 = 0, \text{ т.е.}$$

$$x^2 - (2^4 - 2^2) \cdot x + 2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 128 + 8 - 1 - 1024 =$$

$$= 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 1025 + 136 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 889 = 1000 + 111 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 8x - 889 = 0 \text{ найдем корни - это } \frac{8 + \sqrt{D_1}}{2} \text{ и } \frac{8 - \sqrt{D_1}}{2}, \text{ а корни } 1760$$

$$\text{уравняем } x^2 - 8x - 1 = 0 - \text{это } \frac{8 + \sqrt{D_2}}{2} \text{ и } \frac{8 - \sqrt{D_2}}{2}, \text{ где } D_2 = 108$$

$$\geq 64 + 4 = 68, \text{ т.е. } \sqrt{D_2} = \sqrt{68}, \text{ а } \sqrt{D_1} = 8^2 + 4 \cdot 889 =$$

$$34 \cdot 25 = 340 \cdot 2 + 5 \cdot 340 =$$

$$= 740 + 150 \cdot 35 = 890 + 135 = 925$$

$$= 4 \cdot (16 + 889) = 32 + 889 = 4 \cdot (921)$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - (4^3 - 4^2)x +$$

$$+ 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4, \text{ тогда нам нужны корни}$$

$$\text{уравнения } 4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0, \text{ т.е.}$$

$$x^2 - (4^2 - 4) \cdot x + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x +$$

$$+ 128 + 8 - 1024 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 136 - 1025 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 925 + 36 =$$

$$= 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 900 + 11 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 889 = 0, \text{ дискриминант}$$

$$\text{этого уравнения } D = 12^2 + 4 \cdot 889 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 889 =$$

$$= 4 \cdot (36 + 4 \cdot 889) = 4 \cdot (36 + 4 \cdot (1000 - 111)) = 4 \cdot (34000 - 444 + 36) =$$

$$= 4 \cdot (4000 - 408) = 3592 \cdot 4 = 14368 = 179 \cdot 8 = 4 \cdot 3592 \Rightarrow \sqrt{D} = 2 \cdot 179 \text{ найдем}$$

$$\text{много корней но можно равен } 2\sqrt{D_3} = 2 \cdot 2. \text{ Ответ: } a = 4.$$

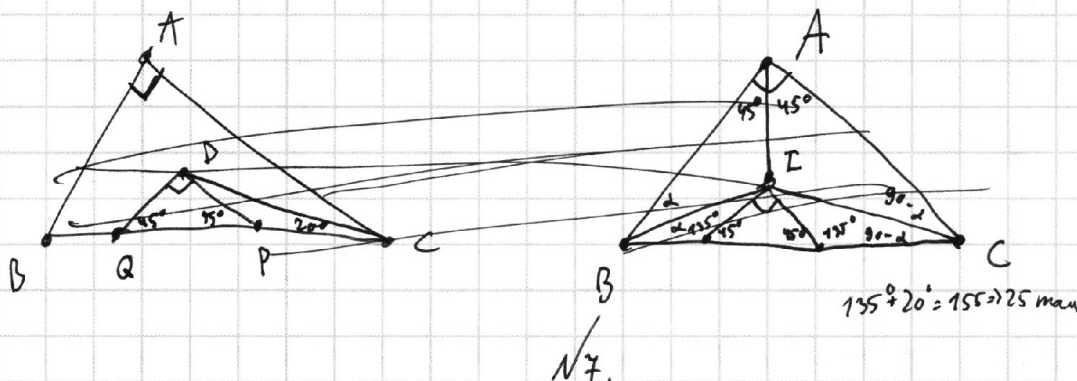


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Пусть I — центр вписанной окружности

$\triangle BAC$, $\alpha = \angle ABC = 2\alpha$, тогда $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC =$
 $= 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha$, теперь заметим,

что т.к. I — пересечение биссектрис $\triangle BAC$,

то $\angle ABI = \angle CBI = \frac{\angle ABC}{2} = \alpha$, а также $\angle BAI = \angle CAI = \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ$,

тогда $\angle AIB = 180^\circ - \angle ABI - \angle BAI = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = 135^\circ - \alpha$, теперь заметим,

что мы по условию $\angle A = \angle C$, ~~$\angle A = \angle C = 90^\circ - 2\alpha$, но~~ $\angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ACQ$ равнобедренный,

тогда $\angle QAC = \angle AQC = \frac{180^\circ - \angle ACQ}{2} = \frac{90^\circ + 2\alpha}{2} = 45^\circ + \alpha$, тогда

$\angle AQB = 180^\circ - \angle AQC = 180^\circ - (45^\circ + \alpha) = 135^\circ - \alpha = \angle AIB$, но тогда $\triangle AIB$

вписанный (т.к. сторона AB видна из точек I, Q под одним углом

и они находятся в одной полуплоскости относительно AB), но тогда

по свойствам вписанного четырехугольника имеем



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle IQB + \angle IAB = 180^\circ \Rightarrow \angle IQB + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle IQB = 135^\circ \Rightarrow \angle IQR = 180^\circ - \angle IQB =$$

$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, аналогично предыдущим рассуждениям имеем:

$$\angle ACI = \angle BCI = \frac{\angle ACB}{2} = 45^\circ - \alpha, \text{ тогда } \angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA =$$

$$= 180^\circ - 45^\circ - (45^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha, \text{ а также } AB = BP \Rightarrow \triangle BAP \text{ равнобедренный,}$$

$$\text{откуда } \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle APC =$$

$$= 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle AIC \Rightarrow AIPC \text{ вписанный} \Rightarrow$$

по свойству вписанного четырёхугольника имеем $\angle IPC + \angle IAC =$

$$= 180^\circ \Rightarrow \angle IPC = 180^\circ - \angle IAC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \text{ тогда } \angle IPQ = 180^\circ -$$

$$\angle IPC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ. \text{ Тогда в треугольнике } \triangle QIP \text{ имеем } \angle QIP =$$

$$= 180^\circ - \angle IQR - \angle IPQ = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \text{ и } \angle IPQ = \angle IQR \Rightarrow IQ = IP,$$

теперь заметим, что I — это точка D из условия, т.е. ~~тогда~~ для точки

D у нас $DP = DQ$ и $\angle PDQ = 90^\circ$, т.е. D лежит на середине PQ и на окружности

с диаметром PQ и внутри $\triangle BAC$, такая точка ^{с этими свойствами} ровно одна, т.е. середина PQ

пересекает окружность с диаметром PQ в двух точках одна из которых

лежит вне $\triangle ABC$. Теперь заметим, что у нас $IQ = IP$ и $\angle QIP = 90^\circ$, а

также I лежит внутри $\triangle ABC$, тогда т.е. мы показали, что точка с такими

свойствами ровно одна, то $I = D$, тогда $\angle BDC = \overset{= \angle BEC}{180^\circ - \angle AIB - \angle AIC} = 360^\circ - (135^\circ - \alpha) -$

$$(90^\circ + \alpha) = 135^\circ, \text{ тогда } \angle BDC = 180^\circ - \angle BDC - \angle DCB = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Ответ: 25°

стр. 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{xy}{z} = z + 3$$

$$\frac{yz}{x} = x + 3$$

$$\frac{zx}{y} = y + 3$$

$$\frac{x}{z} \quad \frac{y}{x} \quad \frac{z}{y}$$

Пусть $\frac{xy}{z} = p, \frac{yz}{x} = q, \frac{zx}{y} = r$, тогда имеем

$$z = \sqrt{qr}, x = \sqrt{pr}, y = \sqrt{rp}, \text{ тогда имеем}$$

систему

$$z = -\sqrt{qr}, x = \sqrt{pr}, y = \sqrt{rp}$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2}$$

$$\frac{(x^2 y^2)^2 + (x^2 z^2)^2 + (y^2 z^2)^2}{x^2 y^2 z^2}$$

$$- \sqrt{qr} (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) =$$

$$p = -\sqrt{qr} + 3$$

$$q = -\sqrt{rp} + 3$$

$$((xy + yz + zx)^2 - xyz(x + y + z)) + yz + z$$

$$\frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} = z - x$$

$$xz \cdot y -$$

$$\frac{x^2 \cdot y - z^2 \cdot y}{xz} = z - x$$

$$\frac{y(x-z)(x+z)}{xz} = z - x$$

$$\frac{-y(x+z)}{xz} = 1$$

$$-y(x+z) = xz$$

$$xz + xy + yz = 0$$

$$0 - 2(xy + (xy + z))$$

$$\frac{-2(xy + (xy + z))}{xyz}$$

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} =$$

$$= \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{xyz}$$

$$(xy + yz + zx)^2 = 2xy + 2y$$

$$- 2xy^2 z$$

$$2xy^2 z$$

$$xy^2 z + x^2 yz +$$

$$xyz(x + y + z)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic calculations.

Top Left Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. A line segment is drawn from vertex C to a point on AB. The segment is labeled k and $2k$. The text $x = n+1$ and $(x-1)^3 =$ is written nearby.

Top Right Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. A line segment is drawn from vertex C to a point on AB. The segment is labeled 5 and 10 . The text $C_5^3 = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ and $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 10$ is written nearby.

Bottom Left Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. A line segment is drawn from vertex C to a point on AB. The segment is labeled 10 and 20 . The text $\frac{10}{2^k}$ and $\frac{20}{2^k}$ is written nearby.

Bottom Right Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. A line segment is drawn from vertex C to a point on AB. The segment is labeled 10 and 20 . The text $\frac{DP}{AB} = \frac{AB}{DP} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow CD = CA \cdot \frac{DP}{AB}$ and $= 10 \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$ is written nearby.

Algebraic Equations:

$$(x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$$

$$\frac{10}{2^k} \quad \frac{20}{2^k}$$

$$xy = 3z + z^2$$

$$yz = 3x + x^2$$

$$zx = 3y + y^2$$

$$p - q = \sqrt{qr} - \sqrt{pr}$$

$$p - q =$$

$$10^2 - \frac{5^4}{3^2} = \frac{3^2 \cdot 10^2 - 5^4}{3^2} = \frac{5^2(3^2 \cdot 2^2 - 5^2)}{3^2} =$$

$$xy = z(z + 3)$$

$$\frac{xy}{z} = z + 3$$

$$\frac{yz}{x} = x + 3$$

$$\frac{zx}{y} = y + 3$$

$$p = \sqrt{qr} + 3$$

$$q = \sqrt{pr} + 3$$

$$r = \sqrt{pq} + 3$$

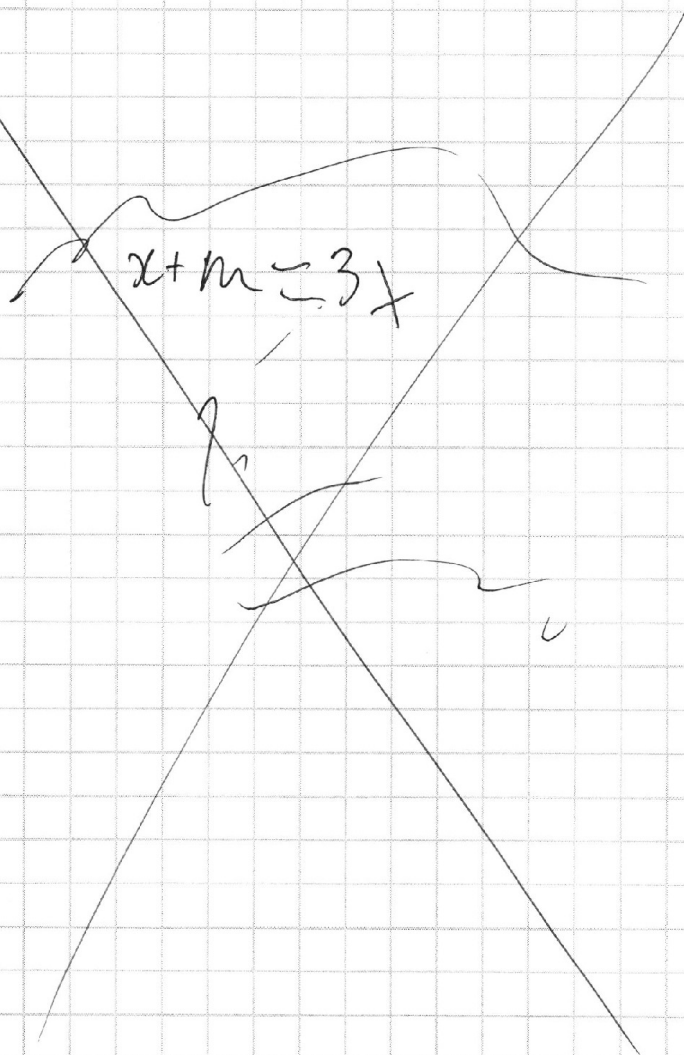


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

