



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№21

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = xy + xz + yz + 4(x+y+z) + 48$$

$$\begin{cases} z^2 + 4z - xy = 0 \\ y^2 + 4y - xz = 0 \\ x^2 + 4x - yz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{xy}{z} = 4 + z \\ \frac{yz}{x} = 4 + x \\ \frac{xz}{y} = 4 + y \end{cases}$$

$$= xy + xz + yz + \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$$

$$= xy \left(1 + \frac{1}{z}\right) + xz \left(1 + \frac{1}{y}\right) + yz \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$4z + 4x = (4z + z^2) \left(1 + \frac{1}{z}\right) + (4y + y^2) \left(1 + \frac{1}{y}\right) + (4x + x^2) \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 =$$

$$= 4z + z^2 + 4 + z + 4y + y^2 + 4 + y$$

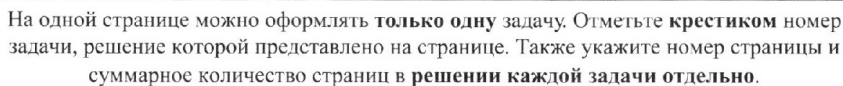
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8 \cdot 12 + 48$$

$$+ 4x + x^2 + 4 + x$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 5(4x+y+z) + 12$$

$$3(x+y+z) + 36 = 0$$

$$x+y+z = 12$$



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 15 \\ BE &= 10 \end{aligned}$$

3)  $\angle EAB = \angle EDB$ , T.K. 2mm

Губернатор на I г-м-ЕВ

$$\angle CDF = \angle EDB \text{ (vert. angles)}$$

$$\angle OFCD = 90^\circ - \alpha,$$

$\angle ACD = 90^\circ$  (Диаметр перпендикулярен хорде)  
+ центр. угол

4)  $\angle AEB = 90^\circ$  (AB - g'ltz, EEW)

$$\angle AEB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle EAB = \angle CAD = 2$$

no 2 yndall

$$1) OB = \frac{1}{2} AB = 7,5$$

$$OE = OB = 7,5 \text{ (r)}$$

Folger no T. kol. guld ODEB.

$$10^2 = 7,5^2 + 7,5^2 - 2 \cdot 7,5^2 \cos 122$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$$

$$2) \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\frac{1}{q} \left( \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \right) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

54 nB

$$\frac{1}{4} = 2 \cos^2 2 - 1$$

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{10}{9} ; \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\cos 2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB}$$

$$CD = \frac{2 \cdot 10 \cdot 20}{153} = \frac{40}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

5) В  $\triangle CFD$ :

$$CD = \frac{40}{3}$$

$$\cos \angle C = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$CF = CD \cdot \sin \angle C = \frac{40}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{9}$$

$$6) AF = AC - CF = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9}$$

$$\text{Ответ: } \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

$n$  - к-во коробок.

Тогда вер-ть выиграть, когда мы угадываем на 5 коробок:  $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

на 8 коробок:  $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

По условию задачи требуется найти следующую величину:

$$\frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!} \cdot \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}} = \frac{8! \cdot 2!}{5! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Ответ: в 5,6 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0, \quad \begin{matrix} \text{первый член} & \text{свободный член} \\ x_1 = a_1 + 3d & x_2 = a_1 + 4d \end{matrix}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - (2a^6 + 8a + 4) = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = a_1 + d \\ x_2 = a_1 + 6d \end{matrix}$$

Для обоих выражений сумма корней равна  $2a_1 + 7d$ .

Это есть сумма корней многочлена второй степени? Удвоенная координата вершины по  $D_x$ . Тогда координаты по  $D_x$  этих многочленов равны:

$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a^2 - 4a = 2a^3 - 2a^2$$

$$2a^3 - 6a^2 + 4a = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

1)  $a=0$

Тогда первый многочлен:  $x^2 + \frac{2}{3} = 0$   
не имеет корней. —

2)  $a=1$

аналогично:  $x^2 + \frac{1}{3} = 0$ . нет корней —

3)  $a=2$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ (I)}$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0 \text{ (II)}$$

I)  $x^2 - 2x - 2 = 0$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$

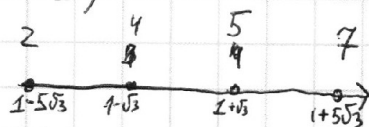
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

II)  $x^2 - 2x - 74 = 0$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 300$$

$$\sqrt{D} = 10\sqrt{3}$$

$$x = 1 \pm 5\sqrt{3}$$



$$d = (1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$a_1 = 1 - 5\sqrt{3}$$

Полученные корни удовлетворяют условию прогрессии с первым членом  $1 - 5\sqrt{3}$  и шагом  $2\sqrt{3}$ .  $\Rightarrow a=2$  — подходит, а других быть не может. Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

$$\left| (y-15) + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| (y-15) - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

1) Найдём прямые, где значения в модуль = 0.

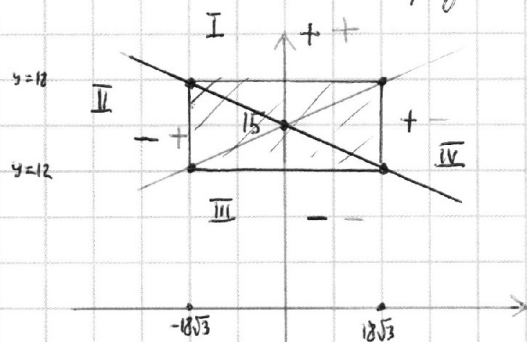
Для 1-го:  $y-15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} = 0$

$$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

Для 2-го:  $y-15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} = 0$

$$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

2) Схематично отобразим прямые на графике:



3) Рассмотрим 4 области, отмеченные на графике:

I.  $2y - 30 \leq 6$   
 $y \leq 18$

II.  $\frac{-x}{3\sqrt{3}} \leq 6$

$$-x \leq 18\sqrt{3}$$

$$x \geq -18\sqrt{3}$$

III.  $30 - 2y \leq 6$   
 $24 \leq 2y$   
 $y \geq 12$

IV.  $\frac{x}{3\sqrt{3}} \leq 6$   
 $x \leq 18\sqrt{3}$

~~Область, которую задает неравенство - прямоугольник~~

3) Найдём координаты граничных точек для каждого случая и отобразим на графике.

I. 1)  $18 = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$

для I прямой  $x = -18\sqrt{3}$

2)  $18 = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$

для II прямой  $x = 18\sqrt{3}$

$$(-18\sqrt{3}; 18)$$

$$(18\sqrt{3}; 18)$$

II 1) АН-по I.

$$(-18\sqrt{3}; 18)$$

$$(-18\sqrt{3}; 12)$$

III АН-по I

$$(18\sqrt{3}; 12)$$

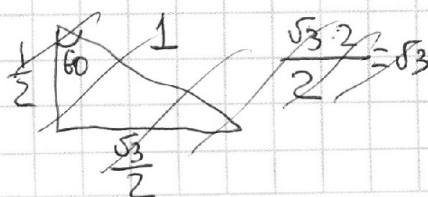
$$(-18\sqrt{3}; 12)$$

IV АН-по I

$$(18\sqrt{3}; 18)$$

$$(18\sqrt{3}; 12)$$

Видим, что область, которую задает неравенство - ~~прямоугольник~~.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

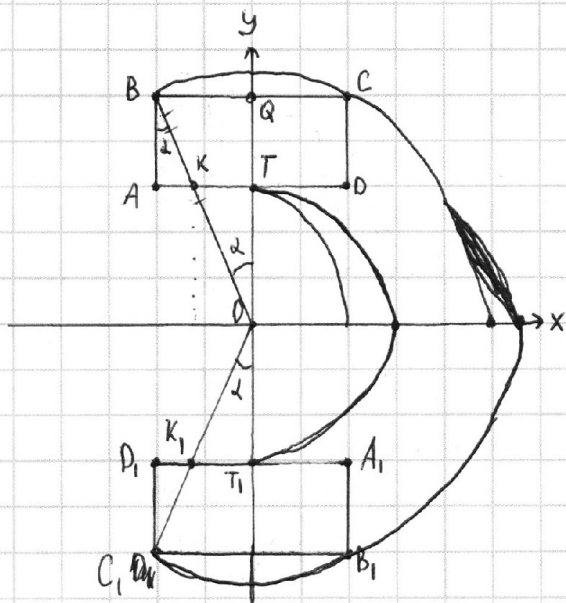
6  
☒

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Схематично изобразили, как будет выглядеть заштрихованная мн-во точек.



Тогда  $S$  заштрихованной области =:  
 $S_{\text{окр-ти с } r=OB \text{ от } B \text{ до } C_1}$   
 $+ (S_{ABK} + S_{C_1DK_1})$   
 $- (S_{KOT} + S_{K_1OT_1})$   
 $- S(\text{части окр-ти с } r=OT \text{ от } T \text{ до } T_1)$

5) Найдём требуемые величины:

$$BO = \sqrt{18^2 + (18\sqrt{3})^2} = \sqrt{18^2(1+3)} = 18 \cdot 2 = 36$$

$$\triangle BOQ: \cos \alpha = \frac{OQ}{OB} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\angle BC_1 = 60^\circ \cdot 2 + 180^\circ = 300^\circ$$

Корректируем Т. К.:

$$y = 12$$

$$AB = 6$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\angle KAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AK = 6\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$
  

$$KT = AT - AK = 12\sqrt{3}$$

6) Подсчитаем  $\pi r^2$

$$S(\text{части окр-ти с } r=OB \text{ от } B \text{ до } C_1) = \frac{300}{360} \cdot \pi \cdot 36^2 = 30 \cdot 36 \cdot \pi = 1080\pi$$

$$S_{ABK} + S_{C_1DK_1} = 2S_{ABK} = AB \cdot AK = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$S(\text{части окр-ти с } r=OT \text{ от } T \text{ до } T_1) = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 = \frac{144}{2} \pi = 72\pi$$

$$S_{KOT} + S_{K_1OT_1} = 2S_{KOT} = KT \cdot TD = 12\sqrt{3} \cdot 12 = 144\sqrt{3}$$

$$7) \text{ Итого } S = 1080\pi + 36\sqrt{3} - 144\sqrt{3} - 72\pi = 1008\pi - 108\sqrt{3}$$

из углов пересечения и симметрии.

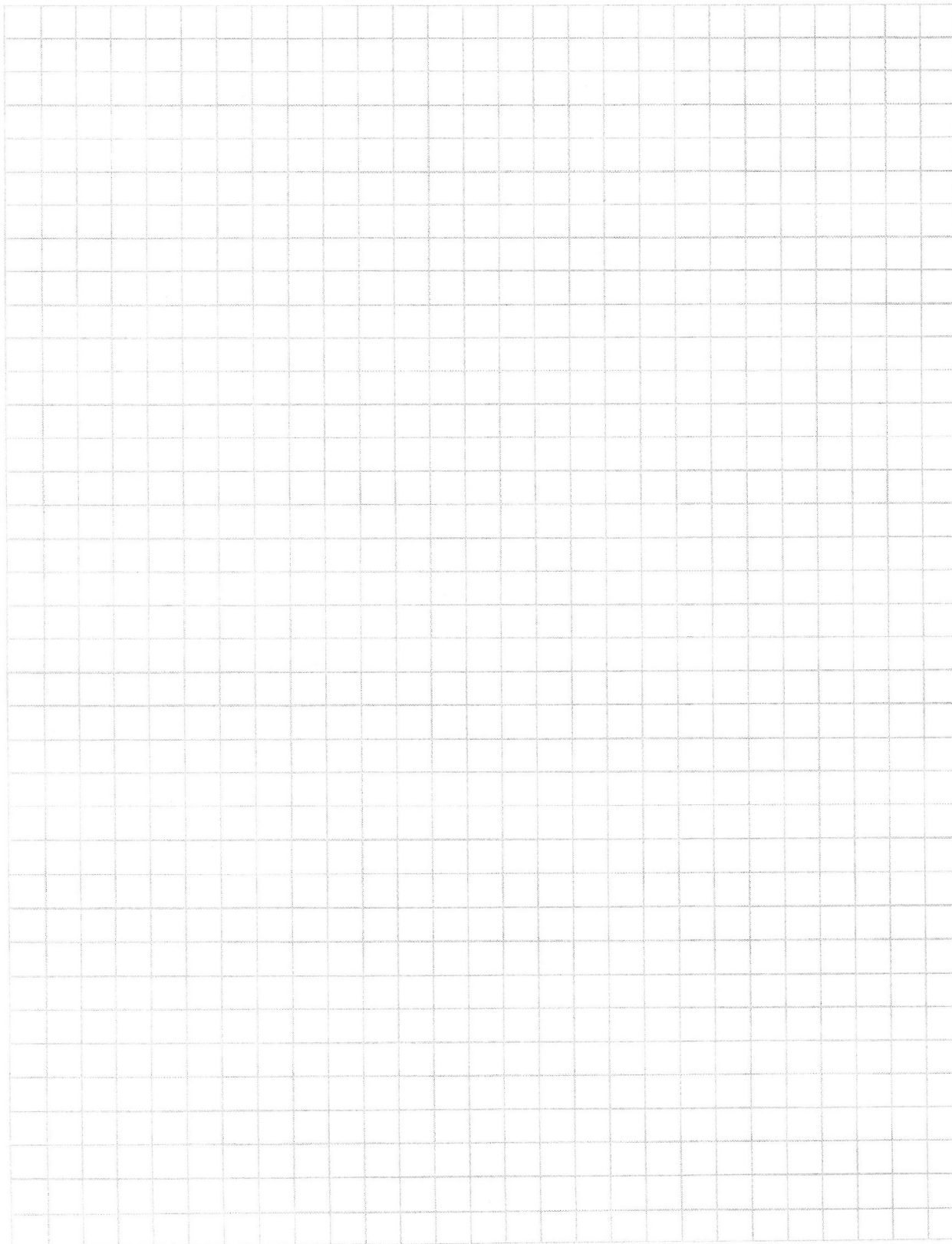


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 3 \cdot 16 = x^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 48$$

$$2(xy + yz + xz) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8(x+y+z)$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 8(x+y+z)$$

81  
9  
729 ← 9

90  
729000

99  
891  
891  
9801  
99  
88209  
88209  
960299

20  
9  
180

N3

$x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z)$

$x \cdot x = 9(x+y+z) + x(9) =$   
 $x(x+9)$

$\Delta ACD \sim \Delta ABE$

$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} = \frac{15}{15}$

$\frac{20}{CD} = \frac{3}{2}$

$CD = \frac{40}{3}$

$20^2 = 2 \cdot 15^2 - 2 \cdot 15^2 \cdot \cos 2$

$25(16) = 25(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 \cos 2)$

$8 = 9(1 - \cos 2)$

$8 = 9 - 9 \cos 2$

$\cos 2 = \frac{1}{9}$

$x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = x^2 - 2x - 2$

$2x^2 - 4x - (128 + 16 + 4)$

$\Delta AEB \sim \Delta DFC$

N4

$\cos(180-2) = -\frac{1}{9}$

$4x^2 = 2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 15^2 \cdot \frac{1}{9}$

$2x^2 = 15^2(1 + \frac{1}{9})$

$2x^2 = 225 \cdot \frac{10}{9}$

$2x^2 = 250$

$x^2 = 125$

$x = 5\sqrt{5}$

Было:  $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Мало:  $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

Много:  $\frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-2)!} \cdot \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}} = \frac{1}{5! \cdot 5!} = \frac{1}{1680}$

$\frac{24}{168}$

$\frac{1}{8! \cdot 2!} = \frac{1}{1680}$

$\frac{2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{10} = \frac{20}{5} = 5,6$

$\Delta ACD \sim \Delta ABE$

$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} = \frac{15}{15}$

$\frac{20}{CD} = \frac{3}{2}$

$CD = \frac{40}{3}$

$20^2 = 2 \cdot 15^2 - 2 \cdot 15^2 \cdot \cos 2$

$25(16) = 25(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 \cos 2)$

$8 = 9(1 - \cos 2)$

$8 = 9 - 9 \cos 2$

$\cos 2 = \frac{1}{9}$

$x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = x^2 - 2x - 2$

$2x^2 - 4x - (128 + 16 + 4)$

$\Delta AEB \sim \Delta DFC$

N4

$\cos(180-2) = -\frac{1}{9}$

$4x^2 = 2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 15^2 \cdot \frac{1}{9}$

$2x^2 = 15^2(1 + \frac{1}{9})$

$2x^2 = 225 \cdot \frac{10}{9}$

$2x^2 = 250$

$x^2 = 125$

$x = 5\sqrt{5}$

Было:  $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Мало:  $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

Много:  $\frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!}}{\frac{n!}{8!(n-2)!} \cdot \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}} = \frac{1}{5! \cdot 5!} = \frac{1}{1680}$

$\frac{24}{168}$

$\frac{1}{8! \cdot 2!} = \frac{1}{1680}$

$\frac{2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{10} = \frac{20}{5} = 5,6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$.) \ 2xy + 2yz + 2zx = 2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y + 8z$$

$$.) \ -8(x+y+z) = (z^2 - 2zx + x^2) + (z^2 - 2yz + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$-8(x+y+z) = (x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2$$

$$.) \ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 4z + 4$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) + 12$$

$$.) \ 4(x+y+z) = \frac{-(x-z)^2 - (x-y)^2 - (y-z)^2}{2}$$

$$.) \ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{-x^2 + 2zx - z^2 - x^2 + 2xy - y^2 - y^2 + 2zy - z^2}{2} + 12 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + zx + xy + zy + 12 = zx + xy + zy + 12$$

$$= z^2 + 4z + 4 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = (z+2)^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2$$

$$(z+2)^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = (z+4)^2 + (x+4)^2 + (y+4)^2$$

9-12-9

$$z^2 + 4z - xy = 0$$

$$x^2 + 4x - zy = 0$$

$$y^2 + 4y - xz = 0$$

знаем ли?  
 что  $x=y=z$ .

$$0 = ((z+4)^2 - (z+2)^2) + ((x+4)^2 - (x+2)^2) + ((y+4)^2 - (y+2)^2)$$

$$0 = (2(z+6)) + 2(2x+6) + 2(2y+6)$$

$$0 = z+3 + x+3 + y+3$$

$$x+y+z = -9$$

$$\boxed{x=y=z=-3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

*умножим выражения на 2  
и просуммируем*

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2zx &= 2(z^2 + x^2 + y^2) + 8(x + y + z) \\ -8(x + y + z) &= (z - x)^2 + (z - y)^2 + (x - y)^2 \end{aligned}$$

•) Раскл.:  $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 3 \cdot 16 =$

*Подставим полученное ранее*

$$= x^2 + y^2 + z^2 - (z-x)^2 - (z-y)^2 - (x-y)^2 + 48 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + 2xz - x^2 - z^2 + 2zy - y^2 - x^2 + 2xy - y^2 + 48 =$$

$$= 2(xy + xz + yz) - (z^2 + y^2 + x^2) + 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad \begin{matrix} a+3d & a+4d \\ \uparrow & \uparrow \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - (2a^6 + 8a + 4) = 0 \quad \begin{matrix} a+d & a+6d \\ \uparrow & \uparrow \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

$$\frac{-b_1}{2a_1} = \frac{-b_2}{2a_2} \quad \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$a=0?$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{2}$$

не имеет решений

$a=1?$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} = 0$$

$$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{a(a-1)}{2} = \frac{a(a^2-a)}{4}$$

$$4(a-1) = 2(a^2-a) \quad a(a-1)$$

$$4 = 2a$$

$$a = \frac{1}{2}?$$

$$2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8 \cdot 3} = \frac{5}{8}$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{2 - \frac{1}{8}}{3} = 0$$

$$2x^2 - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)x - \left(\frac{1}{32} + 4 + 4\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} = 0 \quad D = \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{5}{8}$$

$$\left| (y-15) + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| (y-15) - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

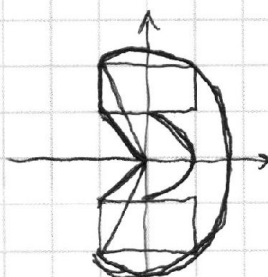
$$a = y - 15$$

$$b = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} a+b+a-b=2a \\ a+b-a+b=2b \\ -a-b+a-b=-2b \\ -a-b-a+b=-2a \end{cases}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 6$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 36 \\ 30 \\ \hline 1080 \\ 144 \\ 36 \\ \hline 108 \end{array}$$