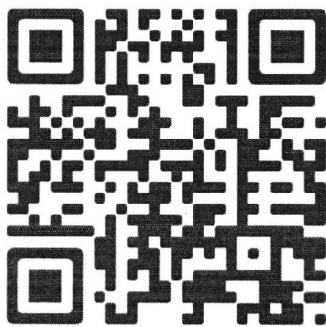




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

n состоит из 40000 геватов $\Rightarrow n = 10^{40000} - 1$

$$n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = 10^{40000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{40000 \cdot 2} +$$

$$+ 3 \cdot 10^{40000} - 1.$$

$$10^{40000 \cdot 3} - \text{это } 1 \text{ } 00 \dots 00 \text{ } 40000 \cdot 3 \text{ нулей}$$

$$10^{40000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{40000} - \text{это } 1 \text{ } 00000 \text{ } 3 \text{ } 00000 \text{ } 40000 \cdot 3 - 1 \text{ } 40000 \text{ нулей}$$

$$10^{40000 \cdot 3} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 - \text{это } 1 \text{ } 00000 \text{ } 2 \text{ } 9999 \text{ } 40000$$

$$10^{40000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{40000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 - \text{это } 1 \text{ } 00000 \text{ } 2 \text{ } 9999 \text{ } 40000$$

$$\# \text{ } 99999 \text{ } 7 \text{ } 00000 \text{ } 2 \text{ } 9999 \text{ } 40000 - 1 \text{ геватка } 40000 - 1 \text{ ноль } 40000 \text{ геватов}$$

$$\text{Итого: } 40000 - 1 + 400000 = 79999 \text{ геватов}$$

Ответ: 79999



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

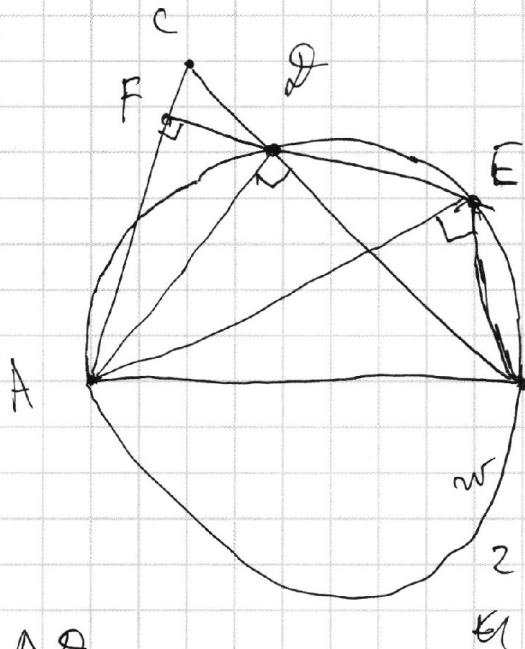
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\begin{aligned} AB &= 6 \\ BE &= 5 \\ AC &= 10 \end{aligned}$$



AB - диаметр ω ,
 $D \in \omega \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$.
 $E \in \omega \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$.
 $\angle ADC = 180^\circ \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

$\triangle AFD \sim \triangle ADC$ по
 2 углам ($\angle CAD = \angle FAD$,
 $\angle AFD = 90^\circ = \angle ADC$) $\Rightarrow$

четырех угл. ADB вписанный $\Rightarrow$

$\angle FDA = \angle ABE \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle AEB$

по 2 углам ($\angle AFD = 90^\circ = \angle AEB$, $\angle FDA = \angle ABE$) $\Rightarrow$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

$\triangle ABE$ прямоугольный $\Rightarrow$

По теореме Пифагора $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$$

$$AF = \frac{AD \cdot AE}{AB} = \frac{AC \cdot AE^2}{AB^2} = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч.

пусть всего x коробок. Тогда в первом случае всего вариантов C_x^5 (т.к.

берем 5 коробок из x), а успешных ~~среди них~~ C_{x-3}^2 (т.к. из 5 коробок

3 фиксируем, т.е. из оставшихся $x-3$ выбираем две). Вероятность P_1 :

$$P_1 = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 120}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{60}{x(x-1)(x-2)}$$

во втором случае:

всего вариантов C_x^6 , успешных

C_{x-3}^3 (т.к. 3 коробки фиксируем, т.е. выбираем 3 из $x-3$). Вероятность P_2 :

$$P_2 = \frac{C_{x-3}^3}{C_x^6} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 720}{6 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{120}{x(x-1)(x-2)} = 2P_1, \text{ т.е. вероятность}$$

увеличилась в 2 раза

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Корни

~~уравнения~~ уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$:

$$\frac{a^2 - a \pm \sqrt{D_1}}{2}$$

~~Дискриминант~~ D_1 - дискриминант

Корни ² уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$

$$\frac{a^3 - a^2 \pm \sqrt{D_2}}{8}$$

D_2 - дискриминант

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2} > \frac{a^2 - a - \sqrt{D_1}}{2}$$

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2}}{8} > \frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8}$$

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2}}{8} > \frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8}$$

пусто

~~невозможно~~ $\Rightarrow$ либо

третий член, $\frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8}$ - третий член,

$$\frac{a^2 - a - \sqrt{D_1}}{2}$$

- пятый,

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2}$$

шестой,

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2}}{8}$$

восемью, либо

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2}}{8}$$

третий,

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2}$$

пятый,

$$\frac{a^2 - a - \sqrt{D_1}}{2}$$

шестой,

$$\frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8}$$

восемью.

В любом случае:

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2}}{8} - \frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2} = \frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8} - \frac{a^2 - a - \sqrt{D_1}}{2}$$

$$\frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2}$$

$$\frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8} - \frac{a^2 - a - \sqrt{D_1}}{2}$$

к шаг прогрессии.

$$\frac{a^3 - a^2 - \sqrt{D_2}}{8} = \pm 2k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\frac{a^3 - a^2 + \sqrt{D_2} - 4a^2 + 4a - \sqrt{D_1} + 4a^2 - 4a - \sqrt{D_1} - a^3 + a^2 + \sqrt{D_2}}{8} = \frac{\dots}{8}$$

$$2a^3 = 10a^2 - 8a$$

$$a^3 + 4a - 5a^2 = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a=0 \text{ или } a=1 \text{ или } a=4.$$

Пусть $a=0$:

исходные уравнения: $x^2 - 5 = 0$ и

$4x^2 - 4 = 0$. Корни первого: $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$.

Корни второго: $-1, 1$. $-\sqrt{5} < -1 < \sqrt{5} \Rightarrow$

Перо в арифм. прогрессии $\sqrt{5} > 1 > -\sqrt{5}$ либо оба перед, либо оба после

1 и 4 числа $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$. Это невозможно, т.к. шаг прогрессивности не может быть положительным и отриц. одновременно. $\Rightarrow a=0$ не подходит

Пусть $a=1$. Уравнения: $x^2 - 4 = 0$ и

$4x^2 - 1 = 0$. Корни первого 2 и -2 , второго:

$-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. $2 > -\frac{1}{2} > -2$ $2 > \frac{1}{2} > -2$, т.е.

в арифм. прогрессии перед 2 и -2

стоит число, которое меньше 2 и больше -2 , что невозможно. $\Rightarrow a=1$ не подходит

Пусть $a=4$. Уравнения: $x^2 - 12x - 1 = 0$ и $4x^2 - 48x +$

$2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$ $x^2 - 12x - 1 = 0$ $x^2 - 12x +$

$+ 128 + 8 - 1225$. $x^2 - 12x - 889$. Корни первого

$\frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$. Корни второго!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 889}}{2} = 6 \pm \sqrt{36 + 889} = 6 \pm \sqrt{925} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

В прогрессии с шагом $2\sqrt{37}$:
третий член $6 - 5\sqrt{37}$, пятый $6 - \sqrt{37}$,
шестой $6 + \sqrt{37}$, восьмой $6 + 5\sqrt{37} \Rightarrow$
такая прогрессия существует $\Rightarrow a = 4$
подходит. Ответ: $a = 4$.



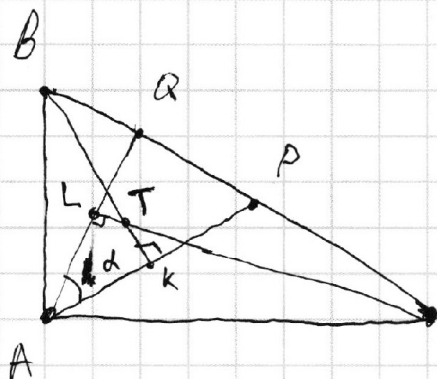
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$\angle QAP = \alpha.$$

Проведем BQ и CP —
серединные перпендикуляры
к AP и AQ ($\triangle ABP \sim$
 $\triangle ACP$ равнобедренные)
они пересекаются

в точке T. Докажем, что точка T

совпала с точкой D из условия.

T — центр опис. окружности $\triangle AQP \Rightarrow$

$TQ = TP$. $\angle QTP = 2\alpha$, т.к. это центральный
угол. Пусть $\angle ABC = \beta$. $\angle BAP = \angle BPA =$

$90^\circ - \frac{\beta}{2}$ (т.к. $\triangle BAP$ равнобедренный).

$\angle ACB = 90^\circ - \beta$, т.к. $\triangle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$.

$\triangle QAC$ равнобедр. $\Rightarrow \angle AQC = 90^\circ - \frac{90^\circ - \beta}{2} = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$.

$$\alpha = 180^\circ - \angle AQP - \angle APQ = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\beta}{2} - 45^\circ - \frac{\beta}{2} =$$

$$= 45^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \angle QTP = 90^\circ \Rightarrow T \text{ равноуг.}$$

от Q и P, $\angle QTP = 90^\circ$, T внутри $\triangle ABC \Rightarrow$

T — это точка D. $\angle DBC = 180^\circ - \angle DCB - \angle BDC =$
 $= 160^\circ - \angle BDC$. $\angle BDC = \angle LDK = 360^\circ - 2 - 90^\circ - 90^\circ =$

$$= 135^\circ \Rightarrow \angle DBC = 160^\circ - 135^\circ = 25^\circ$$

ответ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

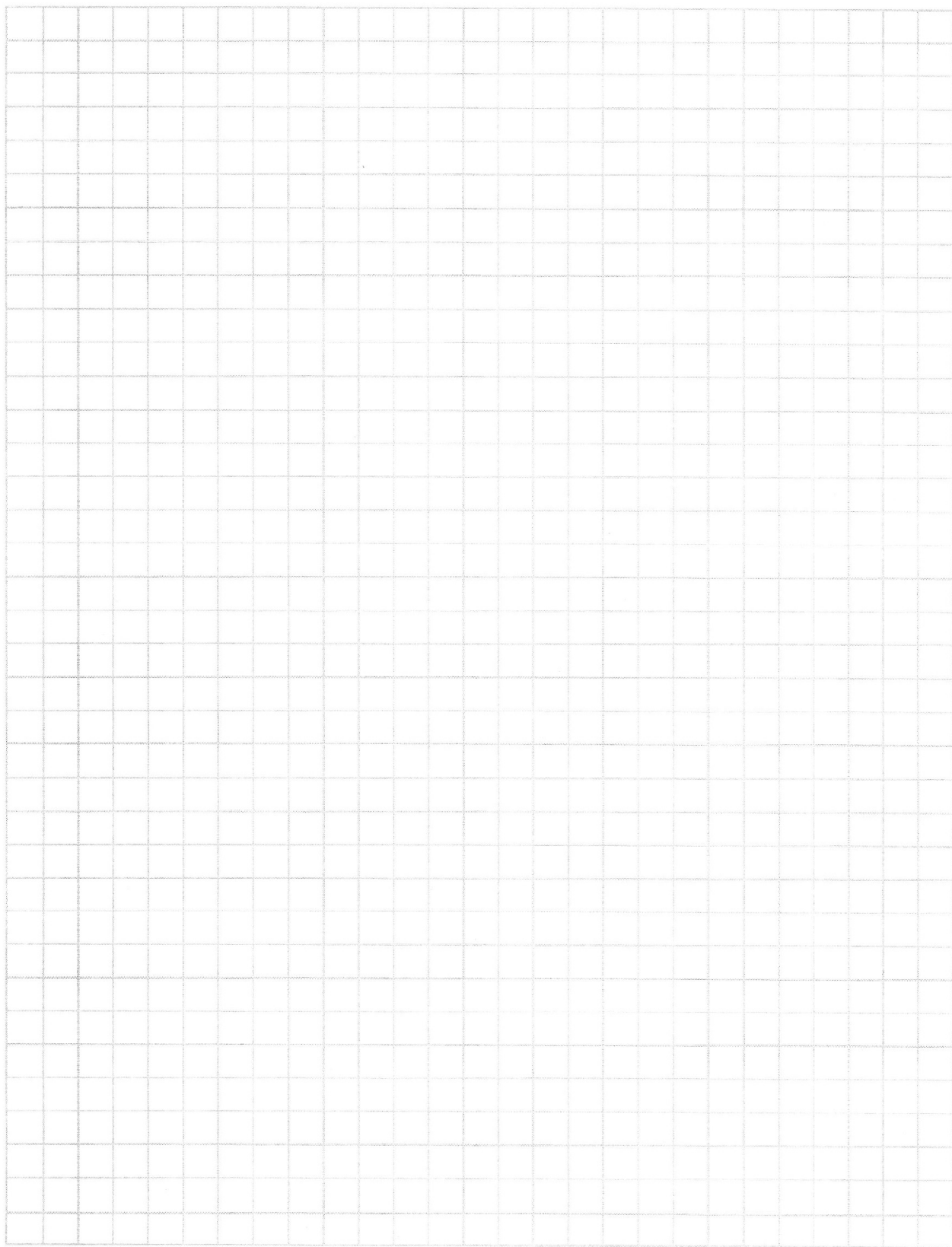
5
☐

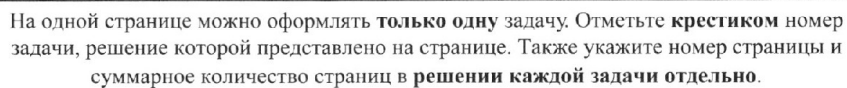
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q(100-1)^3 =$$

$$ggx = 100x - x$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ - 99 \\ \hline + 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 980100 \\ - 98 \\ \hline 980002 \end{array}$$

10000...00

100000 100000
100000 100000

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 980100 - 10 \\ \hline 9801990 \\ 9801 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times 6 \\ \hline 630 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 36 \\ \hline 3600 \end{array}$$

~~Handwritten scribble~~
2

5
Cax

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{60}$$

$$\triangle AFD \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{A}{A}$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{120}{\sqrt{(4-1)(4-2)}}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

h!

$$\frac{k!(n-k)!}{2}$$

$$C_{2-2}$$

2. 8-11... (15-5)

720

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} \cdot \frac{x!}{5!(x-5)!} = \frac{x!}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$a^2 - a \pm \sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}$$

3 2

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 25 \\ \hline 185 \\ + 74 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$925 \quad 3 \quad 3x + 3y + 3z + xy + yz + xz + 27$$

$$\begin{array}{l} 25 \cdot 4 = 100 \\ 25 \cdot 37 \end{array}$$

$$\frac{yz}{x} = x + 3$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{x^2}{y^2}$$

$$-x^2 - xy^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 27$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{16}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{abc} \cdot \frac{ab + ac + bc}{abc}$$

$$a^3 - a^2 \pm \sqrt{a^6 - 2a^5 + a^4}$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

$$\sqrt{16 \cdot 32a^4 - 32a^2 + 16a + 64}$$

$$90 - \frac{B}{2}$$

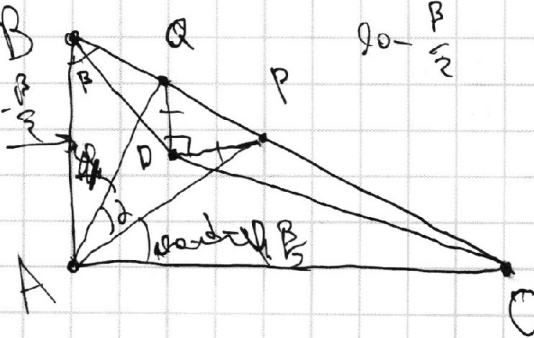
$$90 - \frac{B}{2}$$

$$90 - \frac{B}{2}$$

$$d + \frac{B}{2}$$

$$\alpha$$

$$\frac{a^3 - a^2 - 8}{8}$$



$$\frac{\varepsilon}{20} = k$$

$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

$$17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64 = 400a^4 - 800a^3$$

$$x \odot x$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

