



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$\begin{cases} xy = z^2 - 6z \\ yz = x^2 - 6x \\ xz = y^2 - 6y \end{cases} \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$$

• Если $x+y+z-6=0$
 $x+y+z=6$, то
 $z=6-x-y$

$$\begin{cases} xy = (6-x-y)(6-x-y-6) \\ y(6-x-y) = x^2 - 6x \\ x(6-x-y) = y^2 - 6y \\ xy = (x+y-6)(x+y) \\ 6y - xy - y^2 = x^2 - 6x \\ 6x - x^2 - xy = y^2 - 6y \\ xy = (x+y-6)(x+y) \\ -6y = x^2 - 6x + y^2 - 6y \\ -xy = x^2 - 6x + y^2 - 6y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - z^2 - 6x + 6z &= y^2 - x^2 \\ (x-z)(x+z) - 6(x-z) + y(x-z) &= 0 \\ (x-z)(x+z+y-6) &= 0 \\ (2) \quad y^2 - x^2 - 6y + 6x &= x^2 - y^2 \\ (y-x)(y+x) - 6(y-x) + x(y-x) &= 0 \\ (y-x)(y+x+y-6) &= 0 \\ (3) \quad x^2 - z^2 - 6x + 6z &= xz - xy \\ (x-z)(x+z) - 6(x-z) + x(y-z) &= 0 \\ (y-z)(x+y+z-6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy - x^2 - y^2 + 6x + 6y \\ 2xy = -2x^2 - 2y^2 + 12x + 12y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &= (x-6)^2 + (y-6)^2 + (6-x-y-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + \\ &+ x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 - 12x + 2y^2 - 12y + 2 \cdot 36 - 2x^2 - 2y^2 + 12x + 12y = \\ &= 2 \cdot 36 = 72 \end{aligned}$$

• Если $x+y+z-6 \neq 0$, то $\begin{cases} x=2 \\ y=x \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=z$

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 - 6x \\ 6x &= 0 \end{aligned}$$

$$x=0 \Rightarrow x=y=z=0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 3 \cdot 6^2 = 3 \cdot 36 = 108$$

Ответ: 72 или 108.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓2 $9^3 = 729$ - 1 "9"
Докажем, ~~что~~ $999...9^3 \rightarrow 2n-1$ "9", ~~и~~ $n-1$ "9"
~~в~~ n ~~качан~~ ~~числа~~, n "9" - в конце

Пусть $a = \underbrace{9...9}_n^3 \rightarrow n-1$ "9" - в начале, n "9" - в конце,
тогда

$$\underbrace{99...9}_{n+1}^3 = \cancel{(10+a)^3} = \cancel{a^3 + 270a^2 + 2430a + 27000}$$

$$= (9 \cdot 10^n + a)^3 = a^3 + 27a^2 \cdot 10^n + 243a \cdot 10^{2n} + 729 \cdot 10^{3n}$$

(+)

$$2 \cdot 20001 - 1 = 40002 - 1 = 40001$$

Ответ: 40001

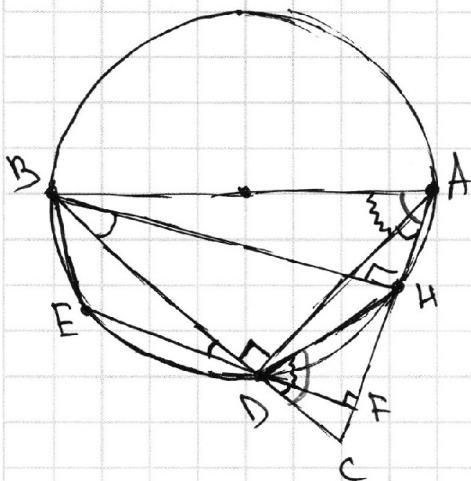


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $AC \cap \omega = H \Rightarrow \angle BHA = 90^\circ$ (о шп. на диаметре) $\Rightarrow BH \perp DF$ ($BH \perp AC, DF \perp AC$) $\Rightarrow \angle HBD = \angle FDC$
 2) $\angle EDB = \angle HBD \Rightarrow EB = HD \Rightarrow EB = HD = 9$
 3) $\triangle FDH \sim \triangle DAN$:
 ① $\angle FDH = \angle CNH - \angle CDF = \angle HAB - \angle DAN = \angle AD$ (по уг.) $\Rightarrow \triangle FDH \sim \triangle DAN$
 ② $\angle DFH = 90^\circ = \angle ADB$ (о шп. на диаметре)
 $\frac{FD}{AD} = \frac{AD}{AB} = \frac{9}{50}$

4) $\triangle AFD \sim \triangle ADC$:
 ① $\angle AFD = 90^\circ = \angle ADC$
 ② $\angle FAD = \angle DAC$ (общ. и тот же)
 $\Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle ADC$ (по уг.)
 $\frac{FD}{DC} = \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC}$

$$\frac{9}{50} = \frac{FD}{AD} = \frac{DC}{AC} \leftarrow \frac{DC}{20}$$

$$DC = \frac{9 \cdot 20}{50} = 3,6$$

5) По т. Пифагора ($\triangle ADC$ - к/у):
 $AD = \sqrt{20^2 - 3,6^2} = \sqrt{2 \cdot 38} = 2\sqrt{19}$

6) По т. Пифагора ($\triangle AFD$ - к/у):
 $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC}$
 $AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{2^2 \cdot 19}{20} = \frac{38}{10} = 3,8$

Ответ: 3,8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 P_{n,8} &= \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-8)} \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{n(n-2) \dots (n-8)} \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1) \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6) + (n-8)(n-6) + (n-8)(n-5) + (n-8)(n-4)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \\
 &+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6) + \dots + (n-7)(n-6)(n-5)}{n(n-1) \dots (n-8)} (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \\
 &= \frac{P_{n,1,8} + \dots + P_{n,4,8}}{n(n-1)(n-2) \dots (n-8)} = \frac{8n^6 - 336n^5 + 528n^4 - 32n^3 + 8n^2 - 4n + 2}{n(n-1) \dots (n-8)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{528n^3 + 8n^2 - 4n + 2}{n(n-1) \dots (n-8)} = \\
 &= \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot 11n^3 + 8n^2 - 4n + 2)(n-6)(n-5)(n-7)(n-8)}{2n(n-1) \dots (n-8)}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{p_4}{p_5} = \frac{42(2u^2 - 8u + 7)(u-5)(u-6)(u-7)(u-8)}{(u-5)(u-6)(u-7)(u-8)30(2u^2 - 8u + 7)} = \frac{42}{30} = \frac{21}{15}$$

$$= \frac{7}{5} = 1,4$$

Ответ: 1,4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 n -членов ряда

$$P_5 = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-4} +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-4} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} +$$

$$+ \frac{3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-4} + \frac{3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} +$$

$$+ \frac{3}{n-2} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \frac{1}{n-4} =$$

$$= 6 \cdot \frac{n^2 - 7n + 12 + n^2 - 6n + 8 + n^2 - 5n + 6 + n^2 - 5n + 4 +$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$+ n^2 - 4n + 3 + n^2 - 3n + 2 + n^2 - 3n + n^2 - 4n + n^2 - 2n + n^2 - n =$$

$$= 6 \frac{10n^2 - 60n + 35}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 30 \frac{2n^2 - 8n + 7}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$P_8 = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-3} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-4} + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-5} +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} +$$

$$P_8 = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n-3} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n-4} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-4} \cdot \left(\frac{1}{n-5} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-5} \cdot \left(\frac{1}{n-6} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) +$$

$$+ \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-6} \cdot \left(\frac{1}{n-7} + \frac{1}{n-8} \right) + \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-7} \cdot \frac{1}{n-8} + \dots + \frac{3}{n-6} \cdot \frac{2}{n-7} \cdot \frac{1}{n-8} =$$

$$= \left(\frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} + \left(\frac{1}{n-3} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n-1} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-4} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{2}{n-3} \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n-2} \right) + \left(\frac{1}{n-5} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{2}{n-4} \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n-2} + \frac{3}{n-3} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-6} + \dots + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{2}{n-5} \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n-2} + \frac{3}{n-3} + \frac{3}{n-4} \right) + \left(\frac{1}{n-7} + \frac{1}{n-8} \right) \cdot \frac{2}{n-6} \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n-2} + \frac{3}{n-3} + \frac{3}{n-4} + \frac{3}{n-5} \right) +$$

$$\left(\frac{2}{n} + \dots + \frac{3}{n-6} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 - b_6, b_7 - \text{корни } (b_n) - \text{А. н}$

$$D_1 = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) > 0$$

По т. Виета:

$$\begin{cases} b_6 + b_7 = a^2 - 4a \\ b_6 b_7 = a^2 - 6a + 4 \end{cases}$$

$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 - b_5, b_8 - \text{корни}$

$$D_2 = (a^3 - 4a^2)^2 + 4(2a^3 + 6a + 15) \cdot 5 > 0$$

По т. Виета:

$$\begin{cases} b_5 + b_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \\ b_5 b_8 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5} \end{cases}$$

Т.н. $(b_n) - \text{А.П. } b_6 + b_7 = b_5 + b_8$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

• $a = 0$

$$D_1 = 0 - 4 \cdot 4 < 0 \quad \text{---}$$

• $a = 4$ $D_1 = 0 - 4 \cdot (-4) = 16 > 0$

$$D_2 = 0 + 4 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4 + 15) > 0$$

$$b_6 + b_7 = 0 = b_5 + b_8$$

$$2b_6 + d = 2b_5 + 3d = 0$$

$$d = -2b_6$$

$$b_6 b_7 = -\frac{d}{2} \left(d - \frac{d}{2} \right) = -\frac{d^2}{4} = -4$$

$$d^2 = 16$$

$$d = \pm 4$$

$$b_5 b_8 = -\frac{3d}{2} \left(3d - \frac{3d}{2} \right) = -\frac{9d^2}{4} = -\frac{16 \cdot 9}{4}$$

$$d^2 = \frac{16 \cdot 9}{4}$$

$$d \neq 7 \Rightarrow d = 4 \quad \text{---}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• $a = 5$

$$D_1 = 25 - 4(25 - 30 + 4) > 0$$

$$D_2 = 25^2 + 4 \cdot 5 \cdot (25^3 + 6 \cdot 5 + 15) > 0$$

$$b_6 + b_7 = b_5 + b_8 = 5$$

$$2b_6 + d = 2b_5 + 3d = 5$$

$$b_6 = \frac{5-d}{2}, \quad b_5 = \frac{5-3d}{2}$$

$$b_6 b_7 = \frac{5-d}{2} \cdot \left(d + \frac{5-d}{2}\right) = \frac{25-d^2}{4} = -1$$

$$25 - d^2 = -4$$

$$29 = d^2$$

$$b_5 b_8 = \frac{5-3d}{2} \left(3d + \frac{5-3d}{2}\right) = \frac{25-9d^2}{4} = -59$$

$$25 - 9d^2 = -236$$

$$261 = 9d^2 \quad | :9$$

$$d^2 = 29$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

☐☐☐☒☐☒☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$|y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}|+|y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}|\leq 8$$

$$1) y-20 < -|\frac{x}{2\sqrt{3}}|$$

$$\cdot x > 0$$

$$y = x + 20$$

$$y < -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$-y+20-\frac{x}{2\sqrt{3}}-y+20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\leq 8$$

$$\cdot x < 0$$

$$y < \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$-2y \leq -32$$

$$y \geq 16$$

$$2) y-20 \geq -|\frac{x}{2\sqrt{3}}|$$

$$\cdot x > 0$$

$$y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y-20 \leq |\frac{x}{2\sqrt{3}}|$$

$$\cdot x < 0$$

$$y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y-20+|\frac{x}{2\sqrt{3}}|-y+20+|\frac{x}{2\sqrt{3}}|\leq 8$$

$$|\frac{x}{2\sqrt{3}}|\leq 4$$

$$\cdot x > 0, x \leq 8\sqrt{3}$$

$$\cdot x < 0, x \geq -8\sqrt{3}$$

$$3) y-20 > |\frac{x}{2\sqrt{3}}|$$

$$\cdot x > 0$$

$$y > 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y > 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}+y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\leq 8$$

$$\cdot x < 0$$

$$2y \leq 48$$

$$y \leq 24$$

$$\cdot y = 16$$

$$16 = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 4, x = 8\sqrt{3}$$

$$16 = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$-4 = \frac{x}{2\sqrt{3}}, x = -8\sqrt{3}$$

$$\cdot y = 24$$

$$24 = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = -4$$

$$x = -8\sqrt{3}$$

$$24 = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$4 = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$x = 8\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

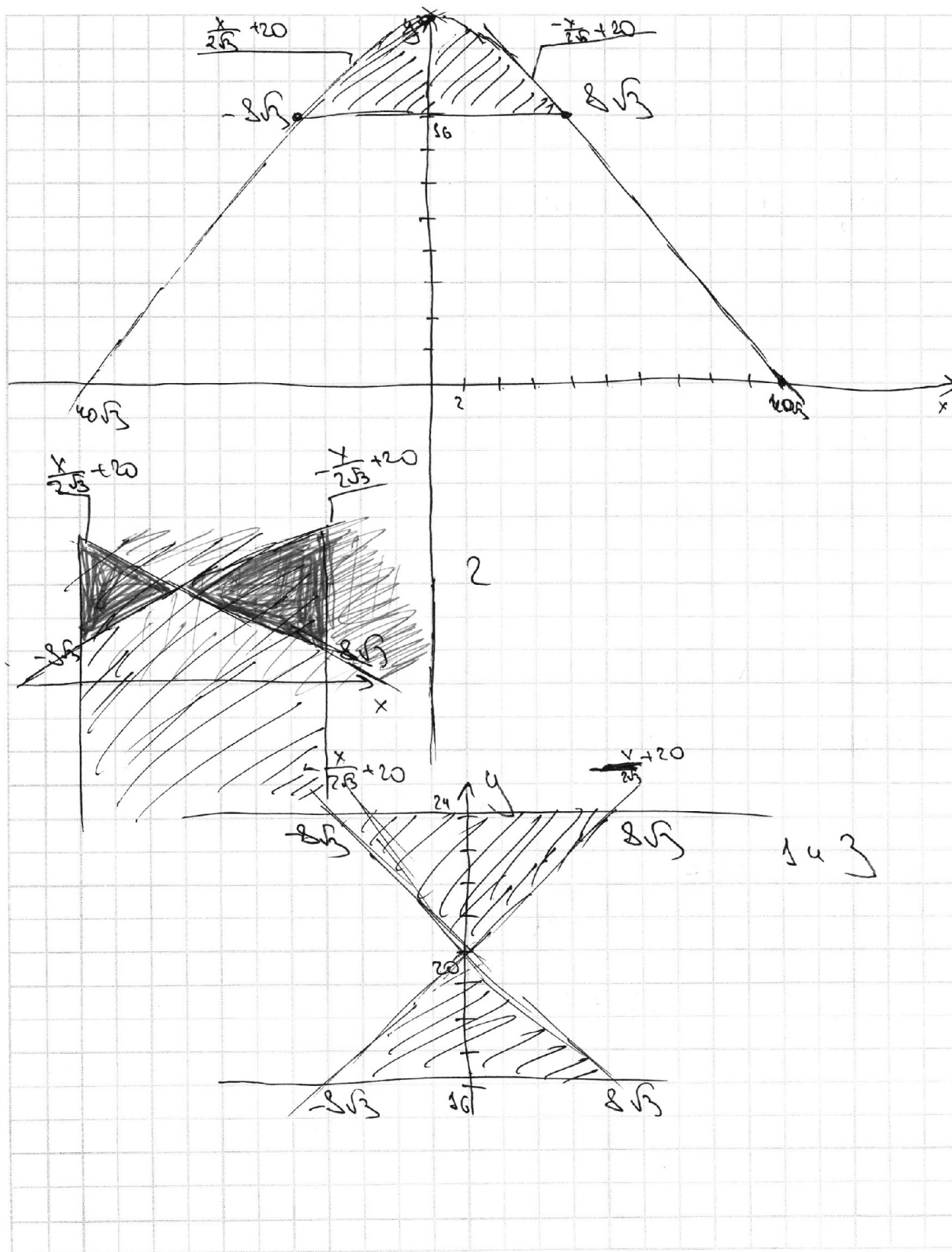
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

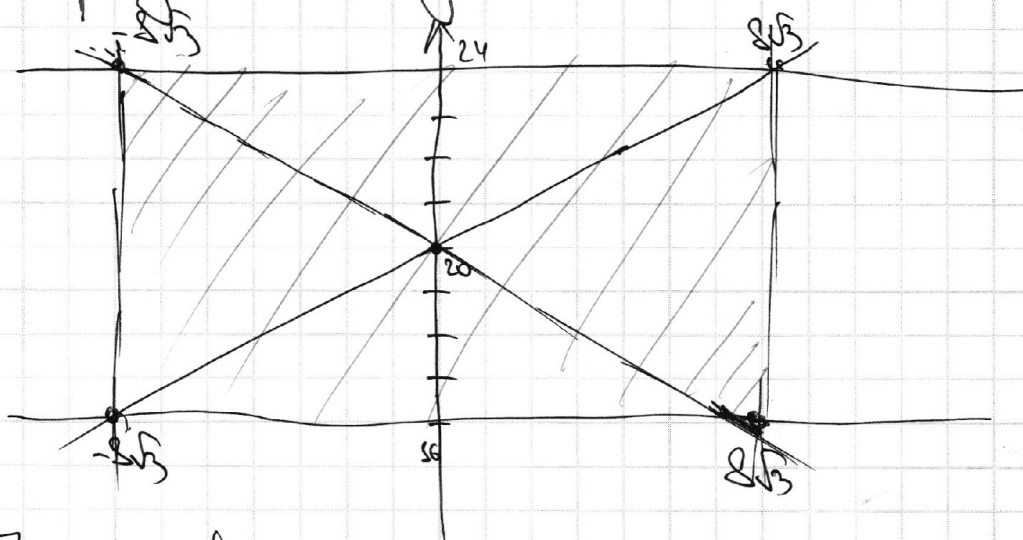
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Покажем, что ~~все~~ ~~из~~ ~~областей 1 и 3~~ ~~находятся~~

~~содержатся~~ ~~в~~ ~~области 2~~, можно

Нарисуем ~~обозначим~~ ~~обозначим~~ 1, 2 и 3:



При повороте на π прямоугольный треугольник
наоборот с центром в начале координат и
лице площадь, равную 1 прямоугольному

$$S_{\text{м.ч.}} = 16\sqrt{3} \cdot 8 = 128\sqrt{3}$$

$$S_{\text{д.ч.}} - S_{\text{м.ч.}} = \pi \cdot 24^2 - \pi \cdot 16^2 = \pi \cdot 8 \cdot 40 = 320\pi$$

$$S_{\text{общ.}} = 320\pi + 128\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 320\pi + 128\sqrt{3}$$

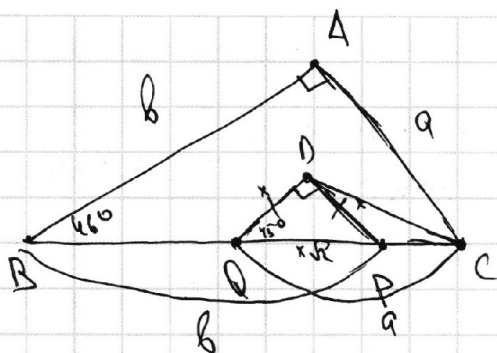


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $AC = CQ = a$, $AB = BP = b$, тогда
По Т. Пифагора:
 $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $QP = -\sqrt{a^2 + b^2} + a + b$

2) По Т. Пифагора:
 $(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 2x^2$

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2} = 2x^2$$

$$a^2 + b^2 + ab - (a+b)\sqrt{a^2 + b^2} = x^2$$

3) По Т. кос (ΔCDQ):

$$CD^2 = a^2 + b^2 + ab - (a+b)\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 - 2a\sqrt{a^2 + b^2 + ab - (a+b)\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \underbrace{2a^2 + b^2 + a^2 - (a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}_{x^2 + a^2} - a \underbrace{\sqrt{2a^2 + 2b^2 + ab - 2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}}_{2x^2}$$

4) По Т. кос (ΔCDQ):

$$x^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \angle DCQ$$

$$2ax \cos \angle DCQ = a^2$$

$$\cos \angle DCQ = \frac{a}{2x} = \frac{AC}{QP}, \quad \angle DCQ = \arccos\left(\frac{AC}{QP}\right) \quad (\angle DCQ = \angle DCB)$$

5) $\frac{AC}{QP} = \frac{a}{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}$, т.к. $\angle ABC = 46^\circ$, $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} 46^\circ$, $b = a \operatorname{ctg} 46^\circ$

$$\frac{AC}{QP} = \frac{a}{a + a \operatorname{ctg} 46^\circ - \frac{a}{\sin 46^\circ}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 46^\circ}} = a \sqrt{\frac{\sin^2 46^\circ + \cos^2 46^\circ}{\sin^2 46^\circ}} =$$

$$= a \sqrt{\frac{1}{\sin^2 46^\circ}} = \frac{a}{\sin 46^\circ}$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} 46^\circ - \frac{1}{\sin 46^\circ}} = \frac{1}{\frac{\sin 46^\circ + \cos 46^\circ - 1}{\sin 46^\circ}} = \frac{\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ + \cos 46^\circ - 1}$$

6) $\angle DCQ = \arccos\left(\frac{\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ + \cos 46^\circ - 1}\right)$
(ΔDCB)

Ответ: $\arccos\left(\frac{\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ + \cos 46^\circ - 1}\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ xz = -6y + y^2 \end{cases} \quad \oplus (1)$$

$$(1) \quad x^2 - 6x + 9 + z^2 = 0$$

$$a^3 + 27000 + 8100a + 270000 = 0$$

$$a = 999 \dots 9$$

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

$$a = y - 20, \quad b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 8$$

$$a < -|b|, \quad -a-b-a+b \leq 8$$

$$-2a \leq 8$$

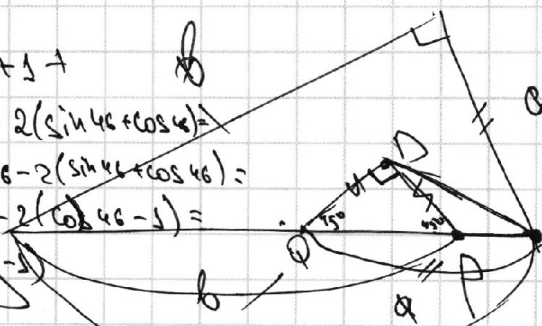
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{-}{+} = \frac{-}{+} \rightarrow a$$

$$\frac{AP}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a \cdot \frac{1}{\cos 46^\circ} - a \sqrt{1+\tan^2 46^\circ}} = \frac{1}{1+\tan 46^\circ - \frac{1}{\sin 46^\circ}}$$

$$\cos 46^\circ = \sqrt{1-\sin^2 46^\circ}$$

$$1 + \tan^2 46^\circ = 1 + \frac{\cos^2 46^\circ}{\sin^2 46^\circ} = \frac{\sin^2 46^\circ + \cos^2 46^\circ}{\sin^2 46^\circ} = \frac{1}{\sin^2 46^\circ}$$

$$\frac{\sin^2 46^\circ + \cos^2 46^\circ + 1}{2 \sin 46^\circ \cos 46^\circ - 2(\sin 46^\circ + \cos 46^\circ)} = \frac{2 \sin 46^\circ \cos 46^\circ - 2(\sin 46^\circ + \cos 46^\circ)}{2(\cos 46^\circ - 1)(\sin 46^\circ - 1)}$$



$$(9 \cdot 10^n + a)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 9 \cdot 10^n + 3 \cdot a \cdot 9^2 \cdot 10^{2n} + 9^3 \cdot 10^{3n}$$

$$= a^3 + 27 \cdot 10^n a^2 + 243a \cdot 10^{2n} + 729 \cdot 10^{3n}$$

$$(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)^2 = 2x^2$$

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} = 2x^2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} = 2x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 (1-p)^2, \quad C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10, \quad p = \frac{3}{5}$$

$$P_9(3) = C_9^3 \cdot p^3 (1-p)^6, \quad C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$$

$$\frac{P_5(3)}{P_9(3)} = \frac{10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2}{84 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^6} = \frac{42(1-p)^4}{5n^4}$$

$$7 + 6 + 5 + 5 + 4 + 3 + 3 + 4 + 2 + 1 = 8 \cdot 5 = 40$$

$$24? - 8n + 7$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 8 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$12 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 = 35$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & -8 & 7 \\ \hline 7 & 2 & -34 \end{array} \quad \ominus$$

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 8 = 35 + 33 + 30 + 26 + 21 + 15 + 8 = 168$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & -8 & 7 \\ \hline 7 & 2 & -28 \\ \hline & -4 \cdot 4 = -28 \end{array}$$

$$(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 8 \end{array}$$

$$2 \cdot 49 - 8 \cdot 7$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 126 \end{array}$$

$$2 \cdot \frac{49}{4} - 8 \cdot \frac{7}{2} + 7 =$$

$$f(-x) = |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y, x) \leq 8 \Rightarrow f(y, -x) \leq 8$$

$$36$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$$

$$56(1 + \dots + 8) = 56 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 252$$

$$8 \cdot 7 = 56$$

$$8 \cdot 7 = 56$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 336 \\ \hline + 336 \\ \hline 672 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

h королек

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3! \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{3}{h} \cdot \frac{2}{h-1} \cdot \frac{1}{h-2} \cdot \frac{h-3}{h-3} \cdot \frac{h-4}{h-4}$$

$$p = \frac{3}{h} \quad q = \frac{h-3}{h}$$

$$p_1 = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{h^3}{h^5} \cdot \frac{(h-3)^2}{h^2} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 9}{5} = \frac{42 \cdot (h-3)^2}{5 \cdot h^4}$$

~5

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$D_1 = a^2 - 4a = 5$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$\begin{cases} b_6 + b_7 = a^2 - 4a \\ b_6 b_7 = a^2 - 6a + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_5 + b_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \\ b_5 b_8 = \frac{-2a^3 + 6a + 15}{5} \end{cases}$$

$$(b_6) - A.P. \Rightarrow b_6 + b_7 = b_5 + b_8$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}; \quad 5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2, \quad a^3 - 3a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 20) = 0 \quad - \frac{2 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5 + 15}{5} = -52$$

$$D = 81 - 4 \cdot 20 = -3$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$a = 0$$

$$b_6 + b_7 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow b_6 = b_7$$

$$b_6 = b_7 = d = -\frac{b_6}{2}$$

$$b_5 + b_8 = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

$$b_5 = b_8, \quad b_5 = b_8 + 3d$$

$$-b_5 = b_5 + 3d$$

$$d = -\frac{2b_5}{3}$$

$$b_5 = -\frac{3d}{2}$$

$$b_6 b_7 = 4$$

$$b_6(b_6 + d) = 4$$

$$-\frac{d^2}{4} = 4 \Rightarrow d = \pm 4$$

$$4^3 = 64$$

$$2^3 = 8$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ + 128 \\ \hline 256 \\ + 152 \\ \hline 408 \\ + 167 \\ \hline 575 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 167 \\ 17 \\ \hline 184 \\ 22 \\ \hline 206 \end{array}$$

$$\frac{2 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4 + 15}{5} = \frac{167}{5}$$

$$\frac{2d + d}{2} = \frac{d}{2}$$

$$25 - 30 + 4 = -1$$