



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y, z \neq 0$
 $2xy = -12z + z^2 + z^2$
 $y \cdot (4z) = 2xz$
 $z^2 - 6z - xy = 0$
 $36 + 4xy$
 $xy = z(2-6)$
 $xy = -4z$
 $xy = z(2-6)$
 $(z-6)^2 = \frac{xy(z-6)}{2}$
 $y^2(y-6)^2$
 $xyz = c$
 посмотрим на $P(a) = a^3 - 6a^2 - c$
 $\Rightarrow xyz$ его корни
 по теореме Виета: $x+y+z=6$
 $xy+yz+zx=0$
 $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 36 - 0 = 36$
 $-12(x+y+z) = -72 = -2 \cdot 36$
 $\sum_{cyc} (x^2 - 12x + 36) = 36 - 2 \cdot 36 + 3 \cdot 36 = 2 \cdot 36 = 72$
 Ответ: 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(20001) 29

k^3 ?

пусть 20001 = k

$\sqrt[3]{2}$

$$\underbrace{999 \dots 9}_{20001} = 10^k - 1$$

найти кол-во 9 в $(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 =$

$$= (10^{3k} - 1) - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k$$

считаем это

$$\underbrace{99 \dots 9}_{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k$$

скажем так

сложим эти числа и получим

$$99 \dots 97000 \dots 029 \dots 9$$

$2k+1$

ая цифра

$k+1$

ая цифра

1ый разряд

все цифры - 9, кроме цифр с $k+1$ по $2k+1$

включит.

$$\Rightarrow \text{всего } 9 \text{ } 3k - ((2k+1) - (k+1) + 1) = 2k-1$$

Ответ: $2k-1 = \underline{40001}$

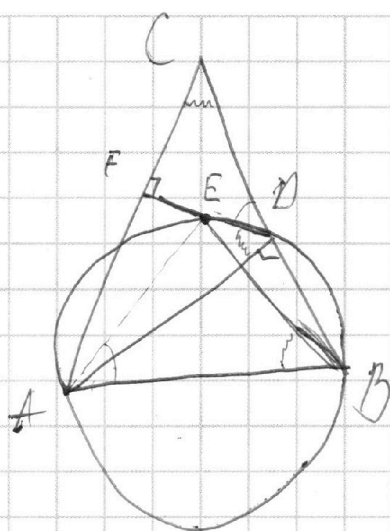


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20$$

$$AB = 10$$

$$BE = 9$$

$$\sqrt{13}$$

$$AF?$$

$$\text{т.к. } AB \text{ диаметр} \angle ADB = 90^\circ = \angle ADC$$

$$\triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC$$

$$AF = \frac{AD^2}{AC}$$

$$\angle AEB = 90^\circ$$

$$AE = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19} \text{ по пифагору}$$

$$\frac{10}{\sin AEB} = \frac{20}{\sin ABC} \text{ по т. синусов } \triangle ABC$$

$$\sin ABC = 2 \cdot \sin AEB$$

$$\angle ABE = \angle ADE = 90^\circ - \angle FDC = \angle ACB \text{ из вписанности}$$

$$\frac{AE}{\sin ACB} = \frac{AE}{\sin ABE} = AB = \frac{AD}{\sin ABC}$$

$$AE \cdot \sin ABC = AD \cdot \sin ACB$$

$$2\sqrt{19} = 2AE = AD$$

$$AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{4 \cdot 19}{20} = \frac{19}{5}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{19}{5}$$

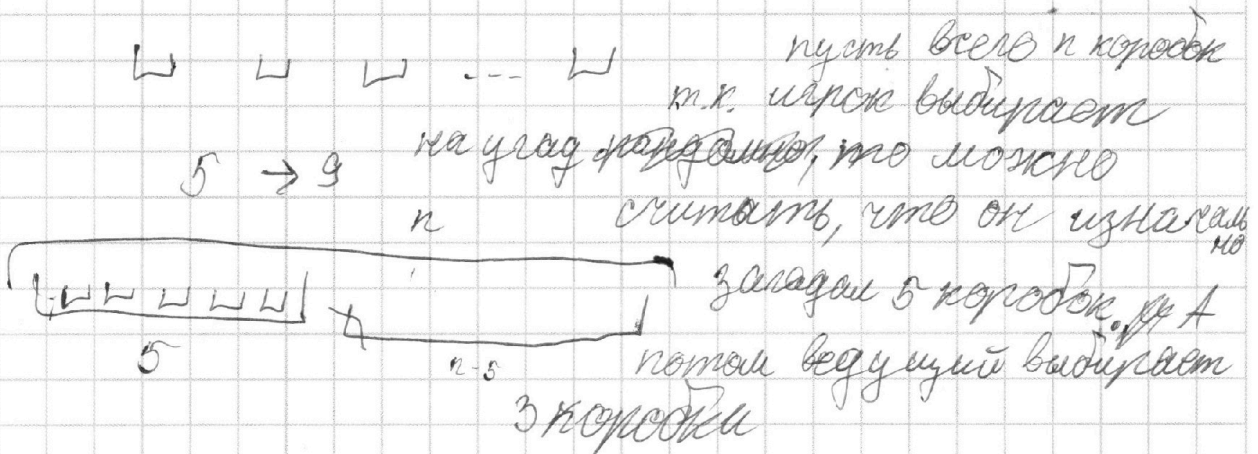


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{C_5^3}{C_n^3} - \text{вероятность выигрыша вначале}$$

C_5^3 - способы выбрать
коробки для выигрыша

C_n^3 - все способы
(все способы равновероятны)

C_9^3 - способов выбрать
когда разрешили выбрать 9 коробок

C_n^3 - все способы

$$\frac{\frac{C_9^3}{C_n^3}}{\frac{C_5^3}{C_n^3}} = \frac{C_9^3}{C_5^3} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Ответ: $\frac{C_9^3}{C_5^3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У3) b_5, b_6, b_7, b_8 — 5, 6, 7, 8 члены, арифм прогр. (непост.) соотв.

$$b_5 + b_8 = b_6 + b_7$$
$$b_5 - d + b_7 + d$$

пусть d — разность прогрессии $d \neq 0$

пусть x_1, x_2 — корни 1-го уравн.

z_1, z_2 — корни 2-го уравн.

$$a^2 - 4a = x_1 + x_2 = z_1 + z_2 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

по Виетте

D_1, D_2 — дискриминанты 1-го и 2-го уравнений соотв.

$$3(a^2 - 4a) = a(a^2 - 4a)$$

$$(a^2 - 4a)(a - 5) = 0$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0 \Rightarrow a \in \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

~~б.о.о~~ ~~б.о.о~~ ~~б.о.о~~

$$b_7 - b_6 = d$$

$$b_8 - b_5 = 3d$$

б.о.о $d > 0$, иначе поменяем b_6 с b_7

(просто перевернем)
задом наперед

b_5 с b_8
местами

разности корней 1-го уравнения = d , $3d$

$$2nd = 3d$$

$$\frac{\sqrt{D_1}}{1} = d$$

$$\frac{\sqrt{D_2}}{5} = 3d$$

$$3\sqrt{D_1} = \frac{\sqrt{D_2}}{5}$$

$$15\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}$$

$$15 = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

если $a \neq 0$, $D_1 = (a^2 - 4a)^2 + 4(6a - a^2 - 4) > 0$, т.к. есть 2 корня

если $a=0$, $D_1 = 4(-4) < 0 \Rightarrow a \neq 0$

если $a=4$

$$D_1 = 4(4)$$

$$D_2 = 4 \cdot 5(2 \cdot 64 + 24 + 15) = 167 \cdot 4 \cdot 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \frac{D_2}{D_1} \right| = 15^2 \Rightarrow \text{если } a \text{ целое } D_1, D_2 \text{ тоже целые}$$

$$\text{при } a=4 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \neq 15$$

$$\Downarrow a=5$$

$$① x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$② 5(x^2 - 5x - 2.25 - 8 - 3) = 0$$

$$5(x^2 - 5x - 59) = 0$$

$$D_1 = 25 + 4 = 29$$

$$\frac{D_2}{25} = 25 + 4 \cdot 59 = 236 + 25 = 261 = 3$$

$$\sqrt{\frac{261 \cdot 25}{29}} \neq 15$$

$\Downarrow$ такие a нет

Ответ: таких a не существует

$\Downarrow$
 $D_2 : D_1$
но при $a=4$
 $\text{ord}_2(D_1) > \text{ord}_2(D_2)$
степень восхождения 2
как минимум по этому
вернее $\neq 15$, также можно
просто не считать.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 4 - 2b$$

$$b = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3}b$

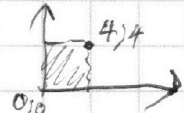
$k = \pm a$

$m = \pm b$

$$\Rightarrow |a+b| + |a-b| = |m+k| + |m-k|$$

тогда

$m, k > 0$



$\Rightarrow$ фигура подогнущая это

$$|a+b| + |a-b| \leq 8$$

т.к. сумма модулей это сумма катетов $\Delta(0;0)(k;0)(k;k)$, где $k \geq m$
 она зависит только от наиб координ.
 это равносильно

$$|a+b| + |a-b| \leq 8$$

поймём что это значит, что $|a| \leq 8$

просто передёрём скобки раскрытия модулей

$$\begin{cases} |2b| \leq 8 \end{cases}$$

то есть наша фигура для a, b это квадрат

с центром $0;0$ и вершинами $(4;4), (-4;4), (-4;-4), (4;-4)$

, тогда для x и y этот квадрат мы ~~сдвигаем~~

~~разложим~~ разложим по оси x и получим

прямоугольник, а по оси y сдвинем на 20

вверх

нужная площадь это половина

разности окружностей с радиусами длины $(0;0)$

$(4 \cdot 2\sqrt{3}; 24)$ и окр с р. 16 и ост кусочки.



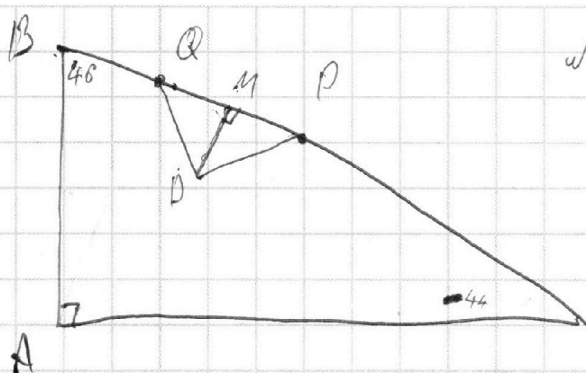
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2} \quad AB = BP \\ AC = CQ$$

M - середина QP

т.к. QD = DP

D лежит на перпендикуляре QP
(прямая через M $\perp$ BC)

DM = QM = MP, т.к. DM медиана в равнобедренном $\triangle$

по неравенству $\triangle$ $AB + AC > BC \Rightarrow Q$ лежит между B и P

пусть $BC = 1$. $\angle ACB = 90 - 46 = 44$

$$\Rightarrow BA = \sin 44 = BP, \quad CQ = AC = \cos 44$$

$$\angle DCB = \angle DCM, \quad DMC = 90$$

$$QM = \frac{\sin 44 + \cos 44 - 1}{2}$$

$$CM = QC - QM = \cos 44 - \frac{\sin 44 + \cos 44 - 1}{2}$$

т.
DM

$$\angle DCB = \angle DCM = \arctg\left(\frac{DM}{CM}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{\sin 44 + \cos 44 - 1}{2}}{\cos 44 - \frac{\sin 44 + \cos 44 - 1}{2}}\right)$$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

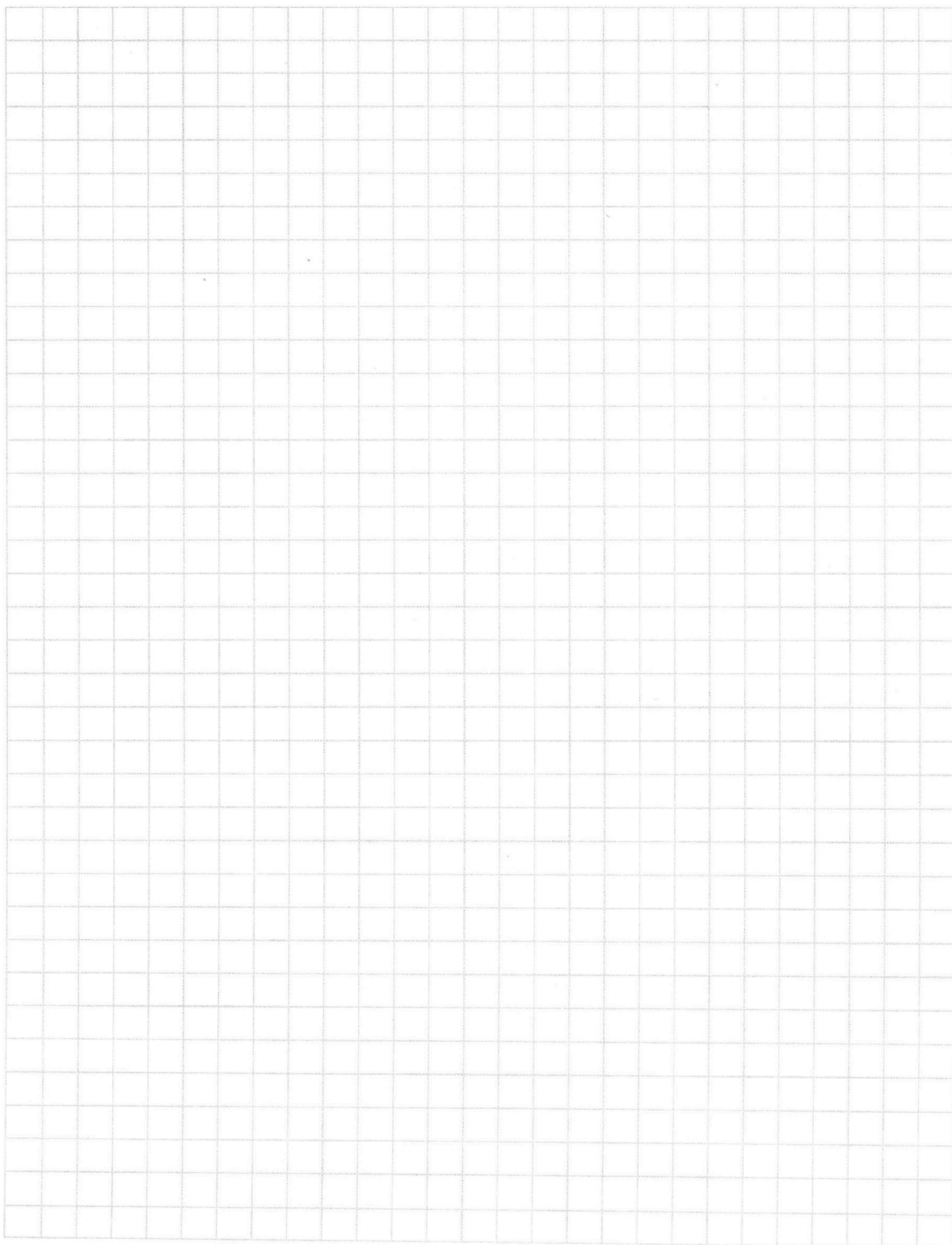
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

