



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
- 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
- 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
- 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nº1

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & ① \\ yz = -6x + x^2 & ② \\ zx = -6y + y^2 & ③ \end{cases}$$

$$② - ①: yz - xy = -6x + x^2 + 6z - z^2; (x+y+z-6)(x-z) = 0$$

$$\text{аналогично: } (x+y+z-6)(y-z) = 0$$

$$(x+y+z-6)(y-x) = 0$$

$$\text{Сл1: } x+y+z-6 \neq 0 \Rightarrow x=y=z$$

$$x^2 = -6x + x^2; x=0 - \text{не удовл усл}$$

$$\text{Сл2: } x+y+z-6=0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) - 12(x+y+z) + 108$$

$$① + ② + ③: x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) - xy - yz - zx = 0$$

$$= 6^2 - 2 \cdot 0 - 12 \cdot 6 + 108 = 72$$

Ответ: 72

$$\star \Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) - 6(x+y+z) - (xy+yz+zx) = 0$$

$$xy+yz+zx = 0$$

Ombem: 3,8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o4

пусть шрок открывает последовательно, а всего коробок x ; тогда вероятность, что при открытии коробки в ней будет шар $= \frac{3}{x}$, а что не будет $= \frac{x-3}{x}$

вероятность выигрыша в первом случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^2 \cdot C_5^3 = \frac{270(x-3)^2}{x^5}$

во втором случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^7 \cdot C_{10}^3 = \frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot \frac{120}{12} = \frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot 10$

Ответ: в $\frac{12(x-3)^5}{x^5}$ раз, где x - количество коробок

$$\frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot 10 = \frac{2700(x-3)^2}{x^5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o 5

пусть x_1, x_2 - корни первого, x_3, x_4 - корни второго, a_i - арифм прогр из условия

$$x_1 = a_5 = a_1 + 4d$$

$$x_2 = a_7 = a_1 + 6d$$

$$x_3 = a_5 = a_1 + 4d$$

$$x_4 = a_8 = a_1 + 7d$$

по т. Виета: $x_1 + x_2 = a^2 - 4a$

$$x_3 + x_4 = a^3 - 4a^2$$

$$\star x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} a^3 - 4a^2 &= a^2 - 4a \\ a(a-4)(a-4) &= 0 \\ \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 - 4a^2 &= 5a^2 - 20a \\ a^3 - 9a^2 + 20a &= 0 \\ a(a-4)(a-5) &= 0 \\ \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=0: & 1) x^2 + 4 = 0 \quad \emptyset \\ & 2) 5x^2 - 15 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=1: & 1) x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ & 2) 5x^2 + 3x - 23 = 0 \quad \begin{cases} x_3 = -2.6 \\ x_4 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=4: & 1) x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ & 2) 5x^2 - 167 = 0 \quad \begin{cases} x_3 = -\sqrt{\frac{167}{5}} \\ x_4 = \sqrt{\frac{167}{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a=5: 1) x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 2) 5x^2 - 25x + 295 &= 0 \\ x^2 - 5x + 59 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 - \sqrt{29}}{2} & x_3 &= \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \\ x_2 &= \frac{5 + \sqrt{29}}{2} & x_4 &= \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5 - 19\sqrt{29}}{2} \\ x_4 &= \frac{5 + 19\sqrt{29}}{2} \\ d &= \sqrt{29} \quad + \end{aligned}$$

Ответ: 5



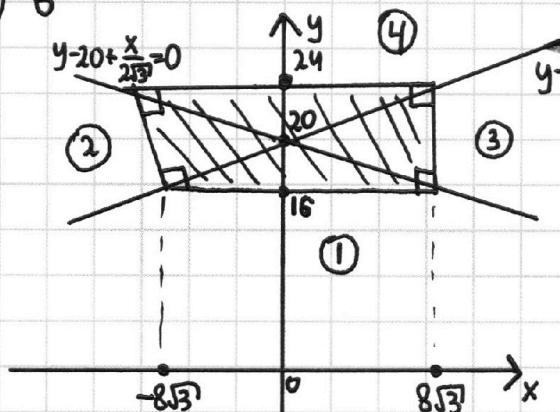
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

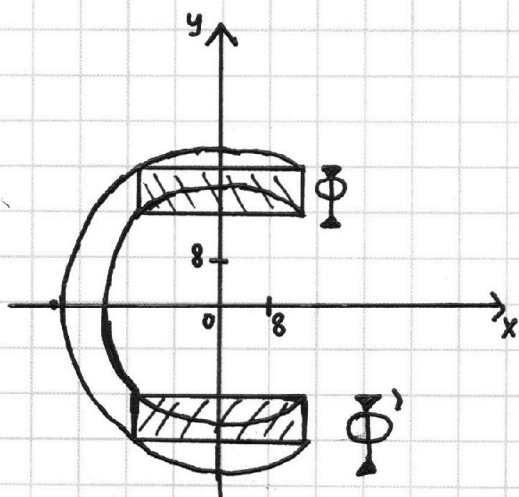
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6



▨ - Φ



$$\textcircled{1} \begin{cases} y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0 \\ 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ y \geq 16 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0 \\ 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - \frac{x}{2\sqrt{3}} - 20 \leq 8 \\ x \geq -8\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ x \leq 8\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ y \leq 24 \end{cases}$$

$$S = \text{circle} - \text{circle} + 3 \cdot \text{sector} - \text{triangle} = 768\pi - 448\pi + 3(448\pi - 256) - 256\pi + 64\sqrt{3} = 1608\pi - 768 + 64\sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{24^2 + (8\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{12}$$

$$r = \sqrt{16^2 + (8\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{7}$$

$$\pi R^2 = 768\pi$$

$$\pi r^2 = 448\pi$$

$$\text{sector} = \pi r^2 - 16^2 = 448\pi - 256$$

$$\text{triangle} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 256\pi - 64\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 1608\pi - 768 + 64\sqrt{3}$$

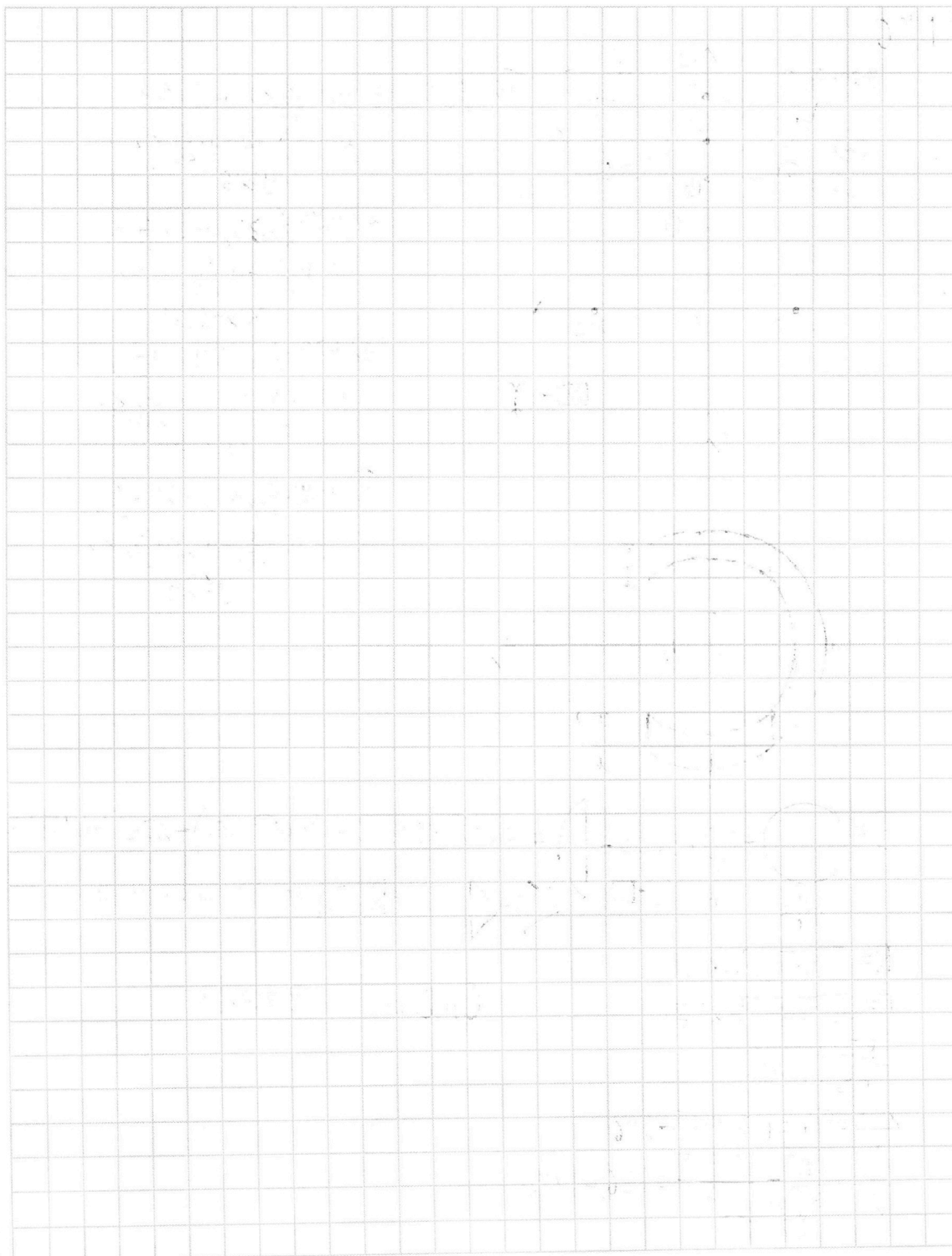


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

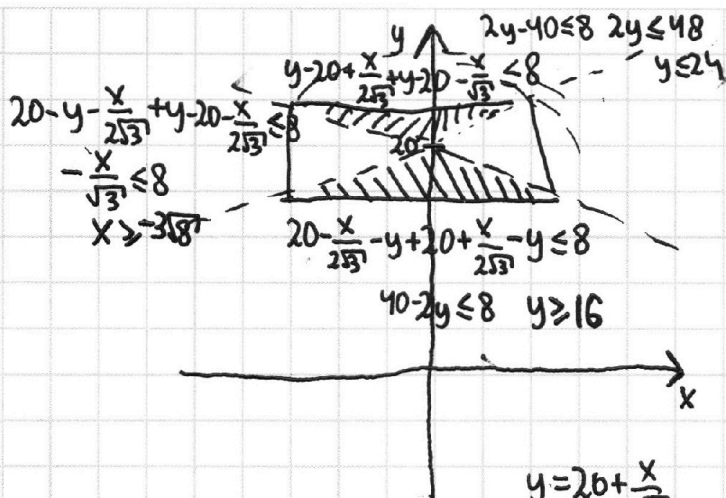
3 **ЧЕРНОВИК**

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 12 \\ 448 \\ \times 3 \\ \hline 1444 \\ - 768 \\ \hline 2212 \\ - 256 \\ \hline 2056 \\ - 448 \\ \hline 1608 \\ 3 \cdot 256 = 512 + 256 = 768 \end{array}$$

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$y = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

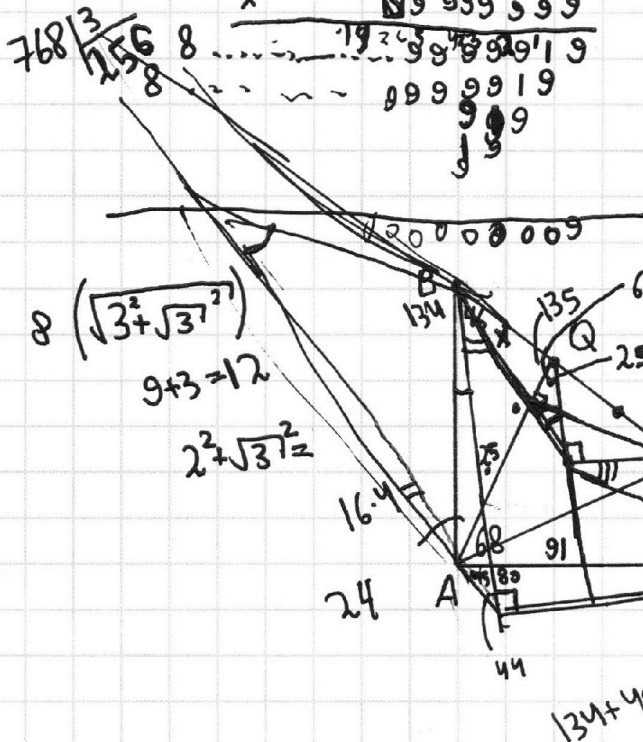
$$16 = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$-8\sqrt{3}$$

$$n = 99999 \dots 9$$
$$n^2 =$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ 99999999 \\ \times 8 \\ \hline 799999992 \\ 800000000 \\ \hline 8800000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \cdot 12 \\ 64 \\ \times 12 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 \\ 2 \\ \times 64 \\ \hline 448 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

