



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нате число преобразовать в виде  $10^{20001} - 1$ .

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1.$$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 9700 \dots 0 \\ \hline 20000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,99 \dots 9 \\ \hline 20001 \end{array}$$

+

=

$$\begin{array}{r} 99 \dots 970000 \dots 029 \dots 9 \\ \hline 20000 \quad 20000 \quad 20001 \end{array}$$

Всего ребро  $20000 + 20001 =$

$$= 40001$$

Ответ: 40001



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность быть провалом в 1 ситуацию для  
каждого элементарного случая  $\rightarrow 1/5$

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{n-3}{d} \cdot \frac{n-4}{e} \quad \text{где}$$

$a, b, c, d, e$  — это числа от  $n-4$ .

Элементарных случаев  $C_5^3$ .

Значит всю вероятность

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} \cdot C_5^3 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3$$

Аналогично во второй раз

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)} \cdot C_9^3 =$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3. \quad \text{Вероятность увеличилась}$$

$$\frac{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3}{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3} = \frac{C_9^3}{C_5^3} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{9! \cdot 3!}{5! \cdot 6!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9}{5} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 9}{10} = \frac{63 \cdot 4}{10} = \frac{252}{10} = 25,2.$$

Ответ: в 25,2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $6 \rightarrow$  член в сумме равен

$5$  и  $8$ . но  $7$  вне  $x_1 + x_2 = \frac{-6}{10a}$

из 1 уравнения:  $-\frac{6}{a} = \frac{a^2 - 4a}{5}$

из 2 уравнения:  $-\frac{6}{a} = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$  Ой! равен

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$(a^2 - 4a) \cdot (5 - a) = 0$$

$$a(a-4)(5-a) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ a = 4 & (2) \\ a = 5 & (3) \end{cases}$$

последовательно стб

$a_1, a_2, a_3 \dots$

пусть для удобства  
последовательности  
возрастающие.  
удобнее - это  
логично.

(1) проверим:  $x^2 - 0x + 4 \geq 0$   $x^2 + 4 \geq 0$  Корней нет.  
логично.

(2) проверим:  $x^2 - 0x + 16 - 24 + 4 \geq 0$   $(x-2)(x+2) \geq 0$   
Значит  $4 \leq x \leq 4$ .

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 - 0x - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 167 = 0 \quad x = \sqrt{\frac{167}{5}} \quad \text{или} \quad x = -\sqrt{\frac{167}{5}}$$



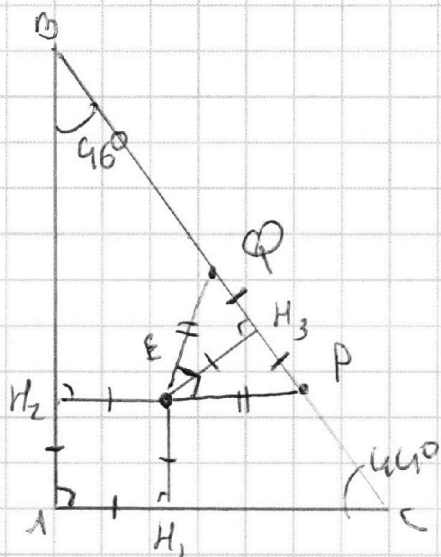




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☒СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



возьмем угол вписанной  
окружности  $E$ .  $EH_1 = EH_2 = EH_3$ .

$AH_2 EH_1$  - квадрат  $\Rightarrow EH_1 = AH_2$ .

по св-ву равенства касате-  
льных из окружности из  
одной точки

$BH_2 = BH_3$ ;  $CH_3 = CH_1$

ортого на угол.  $BA < BP$

$\Downarrow$   
 $AH_2 = PH_3$

Аналогично  $QH_3 = AH_1$ , следует  $QH_3 = EH_3 = PH_3$ .

$EH_3$  - перпенд  $QR$ .  $\Rightarrow EH_3$  медиана  $\triangle EQR$ .

по св-ву медианы равной половине стороны  
на которую она опирается,  $\angle QER = 90^\circ$ .

$EH_3$  - перпенд  $\Rightarrow QE = RE$ .

Точка  $E$  удовлетворяет всем условиям  
точки  $D$ . Пусть еще  $D \neq E$ . тогда:  
соединим центрами  $P, Q, D_1, D_2$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

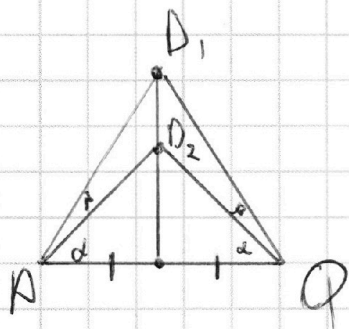
5  
☐

6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к.  $AD_1 \perp AC$ ;  $BD_2 \perp BC$ , то  
они лежат на перпендикулярах.

пусть  $\angle D_2 B C = 2$ ;  $\angle D_1 A C = \beta$ .

Рисунок симметричен,

$$\angle P D_2 Q = 180 - 2\alpha \leq \angle P D_1 Q = 180 - 2\alpha - 2\beta$$

4

↓

$\beta = 0^\circ$ ; следовательно

$D_1$  и  $D_2$  совпадают.

Значит, перпендикулярная точка есть, и это Е.

Е лежит на биссектрисах, т.к. центр вписанной,

||

$$\angle E C B = \frac{1}{2} \angle A C B = \frac{1}{2} (90^\circ - 46^\circ) = \frac{1}{2} (44^\circ) = 22^\circ.$$

О-вет:  $22^\circ$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

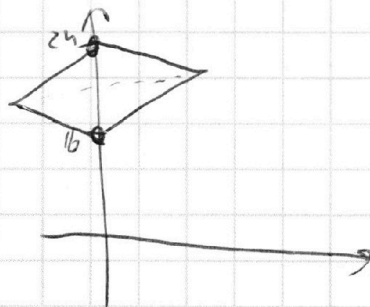
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 - 12(x + y + z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 + 2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \frac{2xy + 2yz + 2zx}{x^2 y^2 z^2} = k$$



$$\frac{1y - z^2}{z} = \frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y}$$

$$x^2 y - z^2 x = yz^2 - x^2 z$$

$$xy(x - y) = zx(z - x)$$

$$(1 - 6)^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{(1 - 6)x^2 + 1}{x^2}$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$z^2 - 6z - xy = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2} = k$$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = k$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

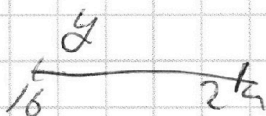
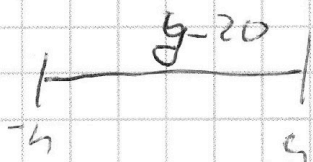
$$\left(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$2(y-20)^2 + 2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left((y-20)^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2\right) =$$

$$= 4(y-20)^2 \leq 64, \text{ при условии что}$$

$$(y-20)^2 \leq 16$$

$$|y-20| \leq 4$$



$$\begin{array}{r} 128 - 24 = 104 \\ 104 : 32 = 3.25 \\ 3.25 \cdot 32 = 104 \end{array}$$

$$-128 - 24 - 15 =$$

2 -

$$\begin{array}{r} 261 / 9 \\ 18 \quad \overline{) 261} \\ 18 \quad \underline{-} \\ 81 \\ 81 \quad \underline{-} \\ 0 \end{array}$$

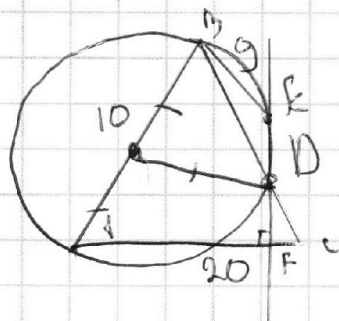


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

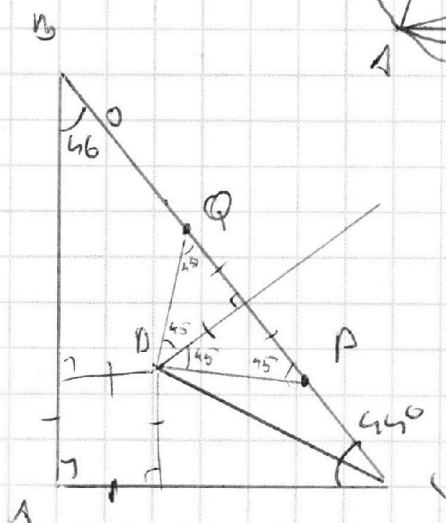
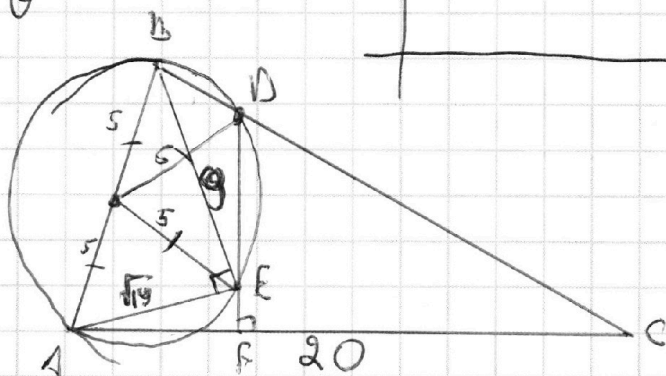
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{-6}{2}$$
$$y - 20 > 0$$
$$2y - 40 \leq 8$$

$$x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

$$5x^2 - 25x - 415 \leq 0$$



$$\frac{-a^2 + 4a}{4} > \frac{-a^2 + 4a^2}{5}$$

$$Q \geq 5$$

$$y^2 + x^2 + z^2 + 2xy - 2z^2 + 2xz + 2yz - 2y^2 - 2x^2 + 108 >$$

$$= 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2) + 108$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

коробок  $n$   $n-3$  - плохих.

$$12x - 2y^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = 470299$$

$$1000000 - 30000 + 300 - 1 <$$

$$< 970000 + 300 - 1 <$$

$$xy + yz + zx + 108 - 6x - 6y - 6z + 108$$

$$\frac{xy}{z^2} = 2 - 6$$

$$\frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2}$$

$$(a-b)^3 = \frac{63 \cdot 4}{12} = \frac{24}{252}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

$$\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$(10^{20001} - 1)^3 <$$

$$= 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$b^2 - 4ac =$$

$$= (a^2 - 4a)^2 -$$

$$- 4a^2 + 24a - 16$$

$$\frac{9 \cdot 9}{60003}$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 8a^2 + 24a - 16 =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot C_3^3$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot C_3^3$$

$$= a^4 - 8a^3 + 4a^2 + 4(a^2 + 6a - 4)$$