



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\begin{cases} xy = 2(2-g) \\ y^2 = x(x-g) \\ 2x = y(y-g) \end{cases}$$~~

~~$$x, y, 2 \neq 0$$~~

~~$$2(2-g) = xy$$~~

~~$$\frac{2}{x} 2(2-g) = \frac{2}{x} xy = 2y = x(x-g)$$~~

~~$$2(2-g) \frac{2}{x} = x(x-g)$$~~

№2

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{20001 \text{ циф.}} = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{3 \cdot 20001} - 3 \cdot 10^{2 \cdot 20001} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$10^{1 \cdot 20001} - 3 \cdot 10^{1 \cdot 20001} = 10^{2 \cdot (20001)} (10^{20001} - 3)$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 9999 \dots 97 \\ 20000 \end{matrix}$$

$$3 \cdot 10^{20001} - 1 = \underbrace{29999 \dots 9}_{20001}$$

$$10^{2 \cdot 20001} \cdot \left(\underbrace{9999 \dots 97}_{20000} + \underbrace{29999 \dots 9}_{20001} \right) = n^3$$

Всего 40001 цифра

Ответ: 40001 цифра



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) 5 шаров

Пусть всего шаров a

$P_1 = \frac{\frac{(a-5)!}{2! \cdot (a-5)!}}{\frac{a!}{5! \cdot (a-5)!}} = \frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}$

*количество шаров, содержащее шарик *1*

2) 9 шаров

$P_2 = \frac{\frac{(a-9)!}{6! \cdot (a-9)!}}{\frac{a!}{9! \cdot (a-9)!}} = \frac{(a-9)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}$

*количество шаров с шариком *2*

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(a-9)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}}{\frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}} = \frac{9! \cdot 2!}{5! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{5} = \frac{42}{5} = 8,4$

всего шаров

- *1 9 шаров можно выбрать 5-5 шаров из всех шаров с шариком
- *2 9 шаров можно выбрать 9-0 шаров из всех шаров с шариком

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = 8,4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По н. Поня

$$\begin{cases} p_6 + p_7 = a^2 - 4a \\ p_5 + p_6 = \frac{a^2 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

$$p_6 + p_7 = p_5 + p_6$$

$$a^2 - 4a = (a^2 - 4a^2) \frac{1}{5}$$

$$5a(a-4) = a^2(a-4)$$

$$0 = (a-4)(a^2 - a) = (a-4) \cdot a(a-1)$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a(a-4) = a^2(a-4) \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{5}a^2 - a\right)(a-4) = 0$$

$$a\left(\frac{1}{5}a - 1\right)(a-4) = 0$$

$$a(5a-5)(a-4) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=5 \\ a=4 \end{cases}$$

$$1) \ x^2 - (a^2 - 4a) - x^2 - 0x + 4 = 0 \quad x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = -4 - \text{противоречие}$$

$$2) \ x^2 + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow p_5 = -6 \quad p_6 = 2 \quad p_7 = 12$$

$$p_8 = 6$$

$$5x^2 - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 126 - 24 - 15 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 167 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{167}{5}} \neq \pm 6 - \text{противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad x^2 - 5x + 25 - 20 + 4 = 0 \quad D = 25 + 4 = 29$$

$$x^2 - 5x - 120$$

$$p_{0,1} = x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \approx 2,5 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 30 - 10 = 0$$

$$x^2 - 5x - 80 - 6 - 2 = 0$$

$$x^2 - 5x - 89 = 0$$

$$D = (25 + 58 \cdot 4) =$$

$$= 25 + 232 = 257$$

$$p_{0,1} = x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{257}}{2} \approx 2,5 \pm \frac{\sqrt{257}}{2}$$

~~не входит в арифметическую прогрессию~~

Ответ: $a = 25$ ~~не входит в арифметическую прогрессию~~

- противоречие

Ответ: $a \in \emptyset$



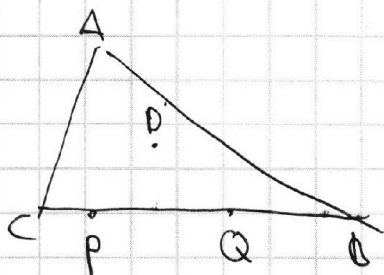
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

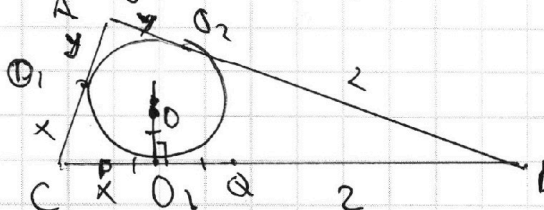
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Даны $\triangle ABC$ остроугольные



$$CQ = CA$$

$$x + O_1Q = x + y$$

$$O_1Q = y$$

$$BP = BA$$

$$z + O_1P = z + y$$

$$O_1P = y$$

$$D_1, DP = DQ \Rightarrow D \in \text{перп. к } AC \text{ и } BC$$

O_1

$$O_1P = O_1Q \Rightarrow O_1D = O_1Q = y$$

$$\text{Таким образом } \triangle DO_1C \sim \triangle DAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DC O_1 = \angle CAD = 46^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик: 4

$$x^2 - 12x + 36$$

$$2(2-6) \cdot \frac{2}{x} = x(x-6)$$

$$x^2 - 6x + 36 - 12x$$

$$2(2-6)2 = x(x-6)x$$

$$xy = 2(2-6)$$

$$y^2 + 12$$

$$2-6 = \frac{xy}{2}$$

$$xy = 2(2-6)$$

$$xxxy = x^2(2-6) = y(y-6)(2-6)$$

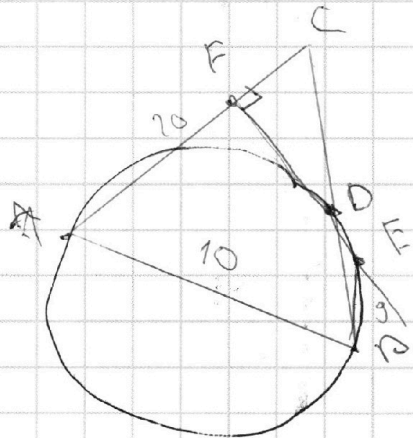
$$\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x}\right)^2$$

$$(y-6)(2-6)(x-6) = \frac{xy \cdot y^2 - 2x}{xy \cdot 2}$$

$$= xy \cdot 2$$

$$x^4 y^4 + x^4 y^2 + y^2 y^2$$

$$\geq 36$$



$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{x} = y^2$$

$$(x+y+2)^2 = x^2 + y^2 + 2^2 + 2(xy$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + x^2 + y^2 + 2^2$$

$$\frac{x}{2}(2-6) = xy - 6\frac{xy}{2}$$

$$(x+y+2)^2 - 6(x+y+2-10)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + xy =$$

$$= 2(2-6) \cdot x(y-6) + (2-6)(x-6) +$$

$$+ (2-6)2 = (2-6)(y-6) + (x-6) + 2$$

$$\frac{2y}{x-6} = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\frac{\frac{(a-5)!}{2! \cdot (a-5)!}}{a!} = \frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}$$

$$\frac{\frac{(a-3)!}{6! \cdot (a-3)!}}{a!} = \frac{(a-5)! \cdot 8!}{6! \cdot a!} \quad \frac{(a-4)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}$$

$$(x+y+z-16)^2 = (x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-6)^2 + 2(x^2+y^2+z^2)$$

$$x-6 = \frac{zy}{x}$$

$$62x - \frac{2y}{x} = \frac{x^2 - 2x}{x} \quad (x-6)(y-6) = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{y} = 2^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$(y-6)(z-6) = y(y-6)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 0x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0 - np$$

$$x^2 + 3x - 120$$

$$q^2 + 3qh = q(q+3h) = \frac{-2a^2 + 6a + 15}{5}$$

$$q^2 + 3qh + h^2 = (q+h)(q+2h) = (q^2 - 6a + 4)$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4 \quad x = \pm 2$$

$$5x^2 - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 167 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0 \quad x^2 - 5x - 120$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 5x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 50 - 6 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 61 = 0$$

$$D = 25 + 244 = \sqrt{269}$$

$$= 5 \pm \sqrt{269}$$

$$-450$$

$$-50 - 6 - 3 = -58$$

$$\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{2} \times 2 =$$

$$\sqrt{29}$$

$$\times 2$$

$$2\sqrt{29}$$

$$112$$

$$200 + 32$$

$$232 + 25 = 257$$

$$59 \times 4 = (200 + 36) \cdot 4 = 876$$

$$206 + 25 = 231$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$(\times 6) x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \rightarrow$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 36 - 3$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1) - x^2 - y^2 - z^2 + 36 - 3$$

$$2x^2 - x^2 - 2x + 2y - y^2 - 2z + 33$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 36 - 12(x+y+z) - 11(x+y+z) + 36 - 3$$

$$x^2 - 6x + 9 - 6x + 36 = (x-6)^2 + 6(6-x) = \frac{6}{x} y^2 + \frac{6}{x} z^2$$

$$y^2 + 2x + xy + 6(6-x-y-z)$$

$$x^2 + xy + y^2 =$$

$$xy - y^2 \cdot \frac{6}{x}$$

$$= (x^2 + y^2 + 6y + 6(x-6)) + y^2 + 6x =$$

$$= 6(x+y) + 2(x+y+z-6)$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 4a^2 - 4a^2 + 24a - 16$$

x_0

$$a^4 - 4a = a^2 - 4a^2$$

$$a^2 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a \geq 0 \end{array} \right.$$