



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b_1, b_2, c_1 — цифры.

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \begin{bmatrix} \overline{7b_1b_2} \\ \overline{b_1b_2} \\ \overline{b_1b_27} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \overline{c_11} \\ \overline{1c_1} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$$

$$A = 10^3a + 10^2a + 10a + a = 1111a$$

$$B = 700 + \overline{b_1b_2}$$

$$B = \overline{b_10b_2} + 70$$

$$B = \overline{b_1b_2} \cdot 10 + 7$$

$$C = 10c_1 + 1$$

$$C = 10 + c_1$$

6 вариантов
(3 · 2 = 6)

Для всех случаев: $1111 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$

$$1) A = 10^3a + 10^2a + 10a + a$$

$$B = 700 + \overline{b_1b_2}$$

$$C = 10c_1 + 1$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$$

$$(10^3a + 10^2a + 10a + a)(700 + \overline{b_1b_2})(10c_1 + 1) = x^2$$

$$a \cdot 1111 (700 + \overline{b_1b_2}) (10c_1 + 1)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ - 11 \\ \hline 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$101 \overline{) 101} \quad 101 \overline{) 101}$$

$$101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2, 101 - \text{простое число}$$

C — двузнач., $C \not\equiv 101$, a — однознач., $a \not\equiv 101$
и дел. на 101

Чтобы произв. $A \cdot B \cdot C$ было 101^N нужно, чтобы в разл. на множителем 101 было 1 чет. слагаемое, т.е. ~~в разл. на 101~~
среди чисел B, a, C , 11 должно быть как множитель 1 число 101 ,
и методом иссл. это число — число B .

Т.е. в числе B 101 должно входить ⁶ раз.
разл. на 101

101^3 — не трехзначное число $\Rightarrow$ т.к. B — трехзначное, то
число 101 в B разл. на 101 входит в 1-ой степени.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = 101 \cdot y, y \in \mathbb{N}.$$

$y < 10$, т.к. иначе B - не трёхзначное, в нём было бы больше знаков.

Тогда ^{в состав} числа B входят 2 одинаковые цифры,

т.е. число B имеет вид $B = \overline{yoy}$ (если $101 \cdot y$, то получ. число такого вида при $y < 10$, $y \in \mathbb{N}$)

Т.к. в числе B хотя бы 2 цифры = 7

$\Rightarrow y = 7$. Т.о. мы однозначно определили число B , $B = 707$.

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot C \cdot a = x^2, x \in \mathbb{N}.$$

разл. на множ.

Т.о. в произведении $C \cdot a$ входят числа 7 и 11

в пер. степени (чтобы в $A \cdot B \cdot C$ входило всё и получилось квадрат).

$A \cdot B \cdot C$ как квадрат nat. числа) и могут входить другие числа в чётной степени.

Число $a \not\div 11$, т.к. $a < 10$, $a \in \mathbb{N}$
^ цифра числа A

$\Rightarrow C \div 11$. Т.к. C - трёхзначное число, и в его состав ^{т.о.} входят хотя бы 1 единица ^и т.к. $C \div 11 \Rightarrow C = 11$.

(Все трёхзнач. числа $\div 11$ имеют вид $\overline{xyz}$ где z, z_1 , т.е. 2 одинаковые цифры в составе цифр числа).

Тогда т.о., т.к. $C = 11 \Rightarrow a \div 7$. Т.к. $a \neq 0$ (иначе A - не трёхзнач. число) $\Rightarrow a = 7$, т.к. a - цифра.

Т.о. получаем единственную возможную тройку таких чисел:
 $A = 7777$; $B = 707$; $C = 11$. Ответ: (7777; 707; 11).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = K & (1) \\ \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = K & (2) \end{cases}$$

$$M = x^2 - y^2 - 12xy$$

$$M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

Делим на xy :

$$y + x + 3 = Kxy$$

Делим обе на $(x-4)(y+4)$:

$$(y+4)K + (x-4) + 3 = K(y+4)(x-4)$$

$$y + x + 3 = K(y+4)(x-4)$$

$$K(y+4)(x-4) = Kxy$$

$$\begin{cases} K=0 & (3) \\ (y+4)(x-4) = xy & (4) \end{cases}$$

$$(4): yx - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$16 = 4(x-y) \Rightarrow x-y=4$$

$$M = 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$M = 4x^2 + 4y^2 - 8xy$$

$$M = 4(x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$M = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$$

(3): $K=0$:

$$x+y+3=0 \Rightarrow x+y=-3, \text{ но } x>0 \text{ и } y>0 \Rightarrow x+y>0 \Rightarrow$$

$$K \neq 0, \text{ т.к. } -3 < 0.$$

Т.о. max сум. еж. знач. M , $M=64$.

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$(x; y) = ? ; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}.$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\underbrace{\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y}_{\text{косинус двойного угла}} + \underbrace{\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y}_{\text{косинус разности}} = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\alpha = 2\pi y; \beta = \pi x - \pi y.$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = \pm \arccos(-\cos \beta) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\beta = \pm \arccos(-\cos \alpha) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\beta = \pm \arccos(-\cos \alpha) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2\pi y = \cos(\pi - (\pi x - \pi y))$$
$$\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y + \pi)$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2\pi n$$

$$\alpha = 2\pi y; \beta = \pi x - \pi y + \pi. \quad \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y + \pi)$$

$$2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k$$

$$2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k$$
$$2\pi y = -(\pi x - \pi y + \pi) + 2\pi k$$
$$k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y = -(\pi x - \pi y + \pi) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi y = \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = -\pi x - \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.о. существует бесконечно много таких пар.

$$\cos 2\pi y = \cos (\pi x - \pi y + \pi)$$

$$\cos \beta = \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 2\pi k \\ \beta = -\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k \\ 2\pi y = \pi y - \pi x - \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = x + 1 + 2k \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.о. существует бесконечно много таких пар, значит, чтобы выполнялось

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} & (1) \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \\ (\sin \pi y) (\sin \pi x - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение задачи~~

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

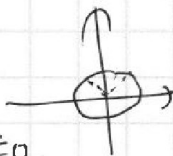
$$\arccos \frac{x}{7} - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

при этом мы знаем, что для любых чисел. имеем x и $y \in \mathbb{D}_3$

(через нули) $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$, т.е.

$$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi]; \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$$



Т.о. Выпадает лишь случай, где $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} = 0$,

т.е. ~~тогда~~ $\arccos \frac{x}{7} = 0$ и $\arccos \frac{y}{4} = 0$, т.е. $\frac{x}{7} = 1$ и $\frac{y}{4} = 1$.

т.е. ~~тогда~~ $x = 7$ и $y = 4$ не возм. $\Rightarrow$ ~~тогда~~ $\begin{cases} x = \frac{8+2k}{3} \\ y = -\frac{8+2k}{3} \end{cases}$ - не возм. т.е. $k \neq 2$ и $k \neq 6$

Т.о. (учитом $\mathbb{D}_3$ и первого ур-я по которому получим систему) получим следующие действительные числа:

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \\ y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2, k \neq 6 \end{cases}$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$; б)

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \\ y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2, k \neq 6. \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~11. $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$~~

Было выдано 4 билета.

P_0 - вер-ть того, что и Петя, и Вася пойдут на концерт в этом мес.

$$11 \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = P_0 \cdot P_1 - \text{по условию}$$

P_0 - вер-ть того, что и Петя, и Вася пойдут на кон.

P_0 - вер-ть того, что Петя пойдёт на концерт в

P_0 - вер-ть в этом мес. пойдёт Вася на концерт

P_1 - вер-ть в этом мес. пойдёт Петя

P_1 - вер-ть в этом мес. пойдёт Вася.

$$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

в этом мес.

x - выданы
билеты в этом
месяце

P_1 - вер-ть того, что и П,
и В пойдут на К. в
этом мес.

P_0 - вер-ть того, что и П, и В пойдут на К.

$$11 P_0 = P_1$$

$$P_0 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

диагн. сб. / количество их.

где 1-ое из двух м.
где 2-ое из двух м. (ст. на 1
дальше
мешком)

$$P_1 = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}, x > 4$$

Аналогично

$$11 \cdot \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$

$$11 \cdot 12 = x(x-1)$$

$$132 - x^2 + x = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 132 = 529 = 23^2$$

$$x_1 = \frac{1 + 23}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{1 - 23}{2} = -12 \text{ - не возм., } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 12$$

Ответ: 12.

$$\begin{array}{r} 132 \\ - 4 \\ \hline 528 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \cdot 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

O - центр ω_1 , OM -
опер. острого $\triangle ABC$.

ω_2 - опис. около $\triangle ABC$,
 $\omega_2 \cap AB = P$.

~~Сделано~~

$AP = 16$

$BP = 8$

$AC = 22$

$S_{ABC} = ?$

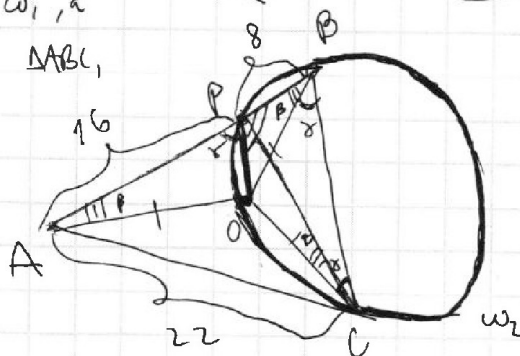
Т.к. $\triangle ABC$ -
остроуг. $\Rightarrow$ т. опис. остр-ка
лежит внутри него.

Т.к. O - центр ω_1 , а

ω_1 опис. около $\triangle ABC$,
то $OB = OC = AO$.

Обозначим $\angle OBC = \delta$.

Тогда $\angle OBC = \angle OCB = \delta$
по д-ву в $\triangle ABC$,
 $\triangle OBC$ - р-б,
т.к. $OB = OC$.



Т.к. $P \in \omega_2 \Rightarrow OPBC$ - впис. в ω_2 четырехугольник $\Rightarrow$ по д-ву
впис. четырехугольника $\Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180^\circ$ - сумма углов. угл.
равны.

Т.к. $\angle OCB = \delta$, $\angle APB + \angle OPB = 180^\circ$ - смежные,

$\Rightarrow \angle APB = \delta$, $\angle CPB + \angle OBC = \angle OPB$ - это все те углы

впис. в ω_2 и $\angle CPB$ вместе с $\angle OBC$ дополняют $\angle OPB$ до

угла, на который опис. $\angle OPB$ (сумма их = той же).

$\Rightarrow \delta + \angle CPB = 180^\circ - \delta \Rightarrow \angle CPB = 180^\circ - 2\delta \Rightarrow \Delta$ т.к.

$\angle CPB + \angle APC = 180^\circ$ (смежные) $\Rightarrow \angle APC = \delta + \angle OPC \Rightarrow \angle OPC = \delta$.

$\angle OCP = \angle OPB$ - впис. в ω_2 , опис. на одну дугу. (поэтому углы равны)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$OB = AO \Rightarrow \angle OBA = \angle AOB = \beta \quad \text{— в } \triangle OBA.$$

— в-во в $\triangle OAB$.

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OCP \Rightarrow \text{из суммы уг. } \triangle \text{ (которая } = 180^\circ) \Rightarrow$$

$$\angle AOP = \angle COP$$

$$(180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \alpha - \beta).$$

Т.к. $\triangle APO = \triangle OPC$ по 2 уг. и стороне между ними ($\angle APO = \angle OPC$,

$\angle POA = \angle POC$, PO — общая)

Т.к. OA как гипот. к. в равных $\triangle$ х равны $PC = AP \Rightarrow PC = 16$.

У $\triangle APC$ и $\triangle ABC$ общ. Высота из т. $C \Rightarrow$

Их площади относятся как одна сторона, к которой проведена эта высота, (т.к. $S = \frac{1}{2}ah$, h — общ., а a — к которой проведена h)

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{16}{16+8} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{16+8}{16} \cdot S_{APC} = \frac{2+1}{2} \cdot S_{APC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3}{2} S_{APC}.$$

Заметим т. к. в $\triangle APC$:

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cos \alpha \cdot AP \cdot PC$$

$$22^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cos \alpha \cdot 16^2$$

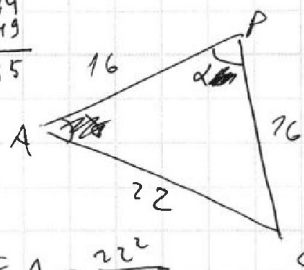
$$\frac{22^2}{16^2} = 2 - 2 \cos \alpha$$

$$\frac{22^2}{16^2 \cdot 2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{11 \cdot 353}}{128}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{128^2}} = \frac{\sqrt{128^2 - 49}}{128}$$

$$\cos \alpha = \frac{16^2 \cdot 2 - 22^2}{16^2 \cdot 2} = \frac{16 \cdot 8 - 11^2}{16 \cdot 8} = \frac{128 - 121}{128} = \frac{7}{128}$$



$\angle APC = \alpha$.

$$\begin{array}{r} 16384 \\ - 128 \\ \hline 16384 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = \frac{33\sqrt{15}}{128} \Rightarrow S_{APC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{33\sqrt{15}}{128} \cdot 16 \cdot 16 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{256} \cdot 33\sqrt{15} \cdot 256 = 33\sqrt{15} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3}{2} S_{APC} = 288 \frac{33\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $288 \frac{33\sqrt{15}}{2}$.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ -16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

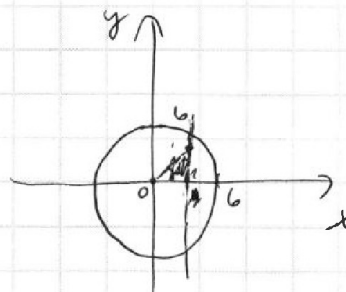
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

~~$$x^2+y^2=36$$~~

$$\Rightarrow x^2+y^2 \leq 36$$

и все точки лежат

внутри окр-ти радиуса 6 с
ц. в т. (0;0).



Реш

$$d_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

и длина отрезка.

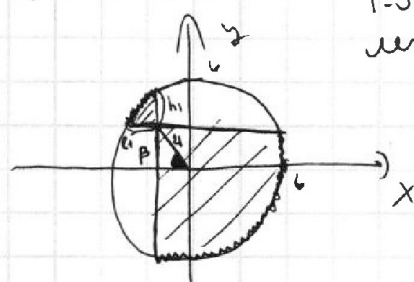
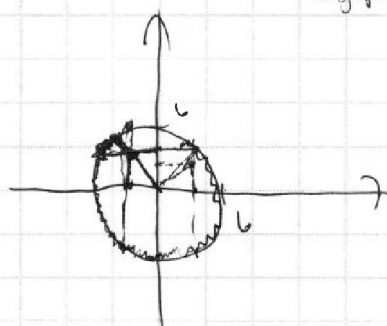
$$\begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \\ \begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

т.к. их произв. $\leq 0 \Rightarrow$
это 2-х "область"
разных знаков

$\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
из интервала

$$d_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}$$

$$d_{23} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_2y_3 - 2x_2x_3}$$



т.е. две точки
лежат в одной
зонах, где-то
на границе

$$\begin{cases} x \leq -4\cos\beta \\ y \geq 4\sin\beta \\ \begin{cases} x \geq -4\cos\beta \\ y \leq 4\sin\beta \end{cases} \end{cases}$$

при $\beta = 45^\circ$
граница макс.
периметр

Решение
окр-ти, радиус
6, центр в начале
координат
 $h_1 \in [0; 6]$
 $h_2 \in [0; 6]$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

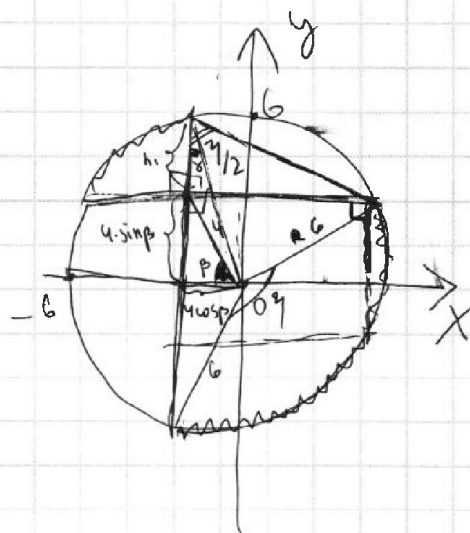
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \gamma = \frac{4 \cos \beta}{6}$$

$$\frac{h_1 + 4 \sin \beta}{6} = \cos \gamma$$

$$1 - \frac{16 \cos^2 \beta}{36} = \left(\frac{h_1 + 4 \sin \beta}{6} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 36 = h_1^2 + 16 \sin^2 \beta + 16 \cos^2 \beta + 8 h_1 \cdot 4 \sin \beta$$

$$8 h_1 \cdot 4 \sin \beta = 35 - h_1^2$$

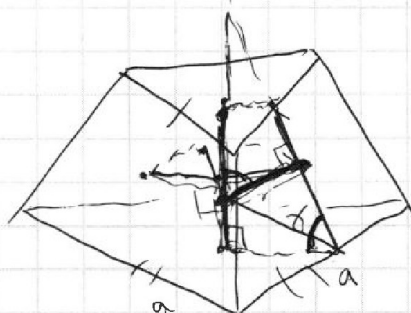


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

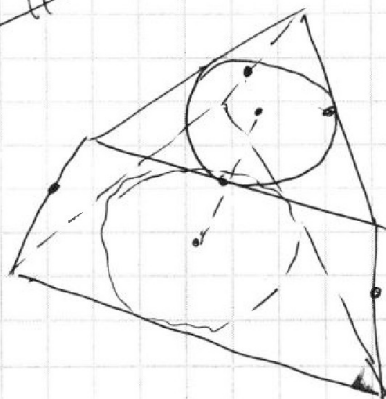
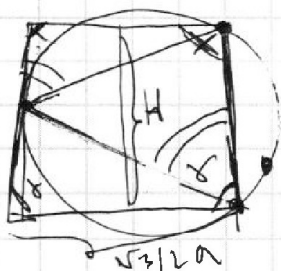
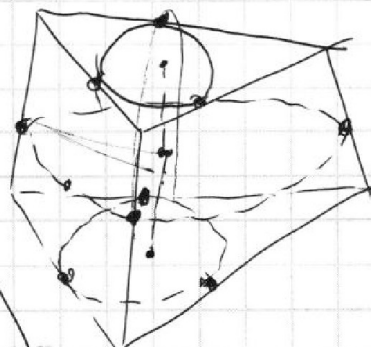
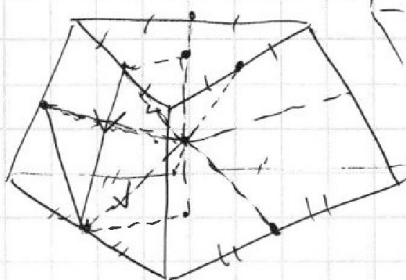
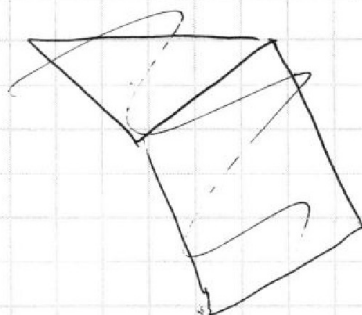
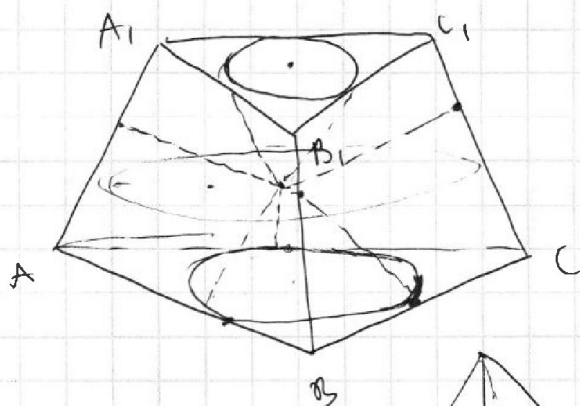
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$H = 2R_{\text{шм}}$$

$$\begin{aligned} \text{tg} \alpha \frac{r}{2} &= \frac{R_{\text{шм}}}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} = \frac{H}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \\ &= \frac{\sqrt{3}H}{a} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~арккос~~

$$\Delta. \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{x}{4} > -\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{x+1+2k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arccos \frac{x+1+2k}{12} > -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arccos \frac{x+1+2k}{12} - \arccos \frac{x}{7} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 3\pi + \varphi > \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x+1+2k}{12}\right) = \cos 3\pi$$

$$\frac{x}{7} = \cos \varphi$$

$$\frac{x+1+2k}{12} = \cos 3\pi$$

$$\sin 3\pi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$$

$$\pm \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} + \arccos \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x+1+2k}{12} -$$

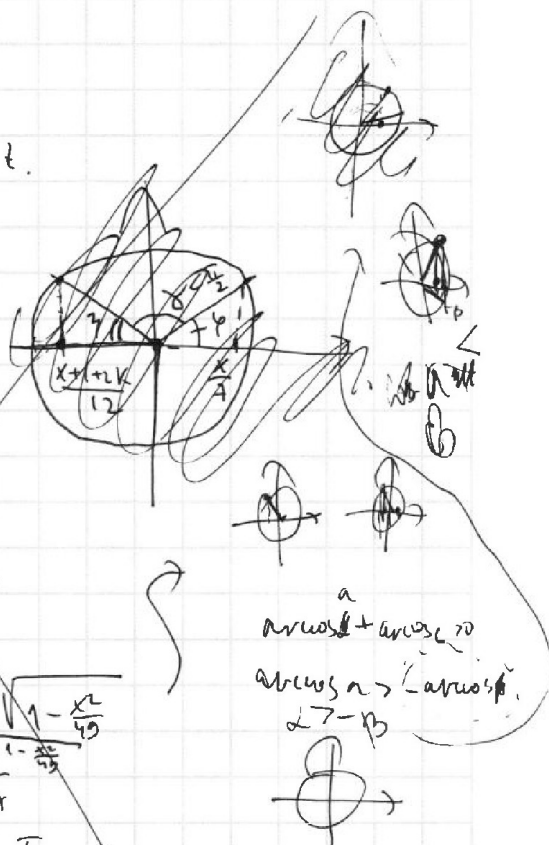
или

$$\frac{x+1+2k}{12} = \cos \theta$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} \end{cases}$$

$$\arccos \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} + \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} > \arccos \left(\frac{x+1+2k}{12}\right) - \arccos \frac{x}{7}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

до 3:

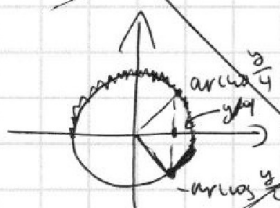
$$\frac{x}{7} \in [-1; 1] \leftarrow \text{т.к. } \arccos \text{ определён}$$
$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \leftarrow \text{т.к. } \arcsin \text{ определён}$$
$$\Rightarrow x \in [-7; 7]; y \in [-4; 4]$$

$$\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4} \Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arccos \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

$$\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$$



$$\arccos x \in [0; \pi]$$

Выходит все x и y,
правильно:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(\text{т.к. } \arccos a_1 + \arccos a_2 \geq 0 \text{ при } a_1, a_2 \in [-1; 1])$$

Такая пара не найдётся, т.к. $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$ и эта пара

т.е. пара $(0; 0)$
выпадает.

Т.о. по реш. графическим способом у пункта 3) нет. все другие числа,
уточн. следующим вы:

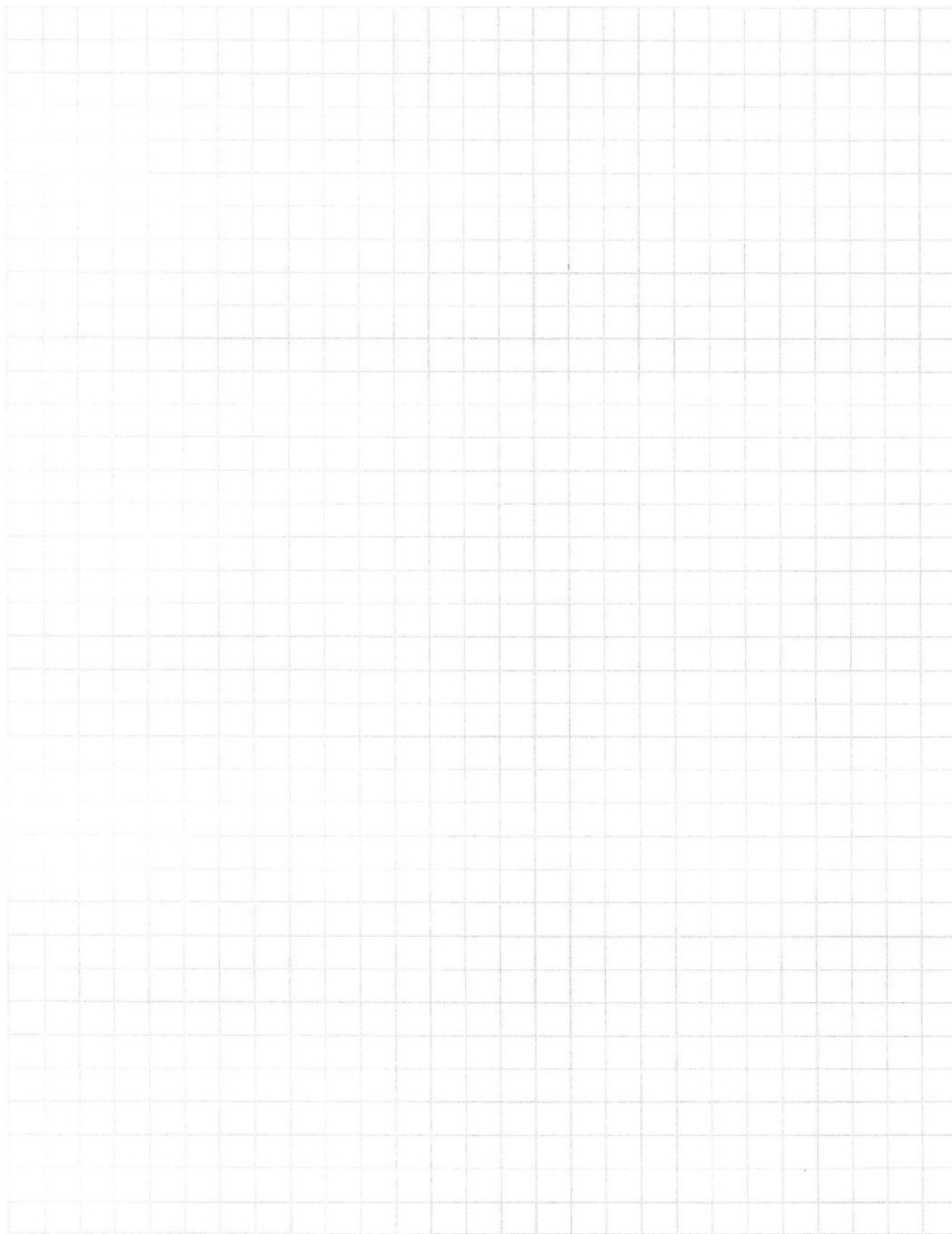


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) -4Kx^2 + x(8+6K) - 4 = 0$$

$$D = (8+6K)^2 - 4 \cdot 4K \cdot 4 = 4((4+3K)^2 - 16K) = 4(16+9K^2+24K-16K)$$

$$= 4(16+9K^2+8K)$$

$$D_2 = 64 - 4 \cdot 9 \cdot 16 < 0 \Rightarrow D > 0 \text{ при любом } K \in \mathbb{R}.$$

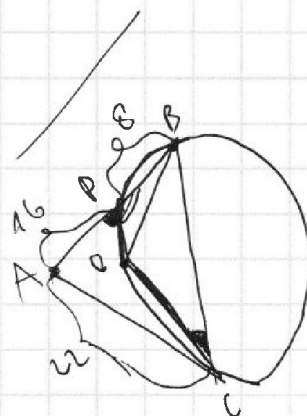
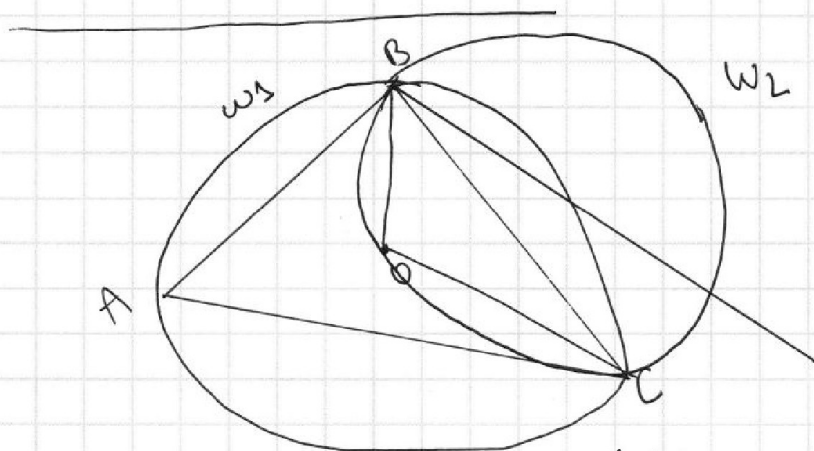
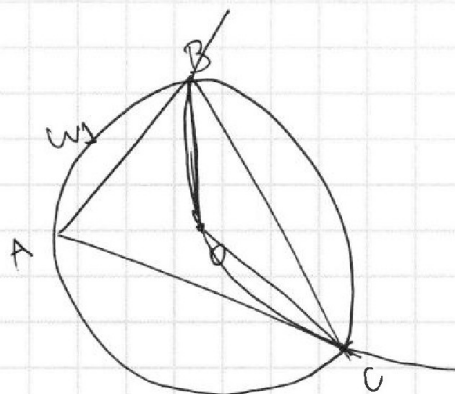
$$x_1 = \frac{-8-6K-2\sqrt{16+9K^2+8K}}{-8K} = \frac{4+3K+\sqrt{16+9K^2+8K}}{4K} > 0.$$

$$x_2 = \frac{-8-6K+2\sqrt{16+9K^2+8K}}{-8K} = \frac{-4-3K+\sqrt{16+9K^2+8K}}{-4K} =$$

$$= \frac{4+3K-\sqrt{16+9K^2+8K}}{4K}$$

$$(4+3K)^2 = 16+9K^2+24K \Rightarrow x_2 > 0$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1} =$$



Т.к. $\triangle ABC$ остроу.,
 то центр O лежит
 внутри $\triangle ABC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy \quad -?$$

всё возм. значения

Решение: $x, y \neq 0$

$$Kxy = y + x + 3$$

$$y(Kx - 1) = x + 3$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1}$$

$$K(x-4)(y+4) = y+4 + x-4 + 3$$

$$Kx(y+4) - 4K(y+4) = y+x+3$$

$$Kxy + 4Kx - 4Ky - 16K = y+x+3$$

$$y(Kx - 4K - 1) = x + 3 + 16K - 4Kx$$

$$y = \frac{x - 4Kx + 16K + 3}{Kx - 4K - 1} = \frac{x + 3 + 16K - 4Kx}{Kx - 1 - 4K}$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1}$$

$$\frac{x+3}{Kx-1} = \frac{x+3+16K-4Kx}{Kx-1-4K}$$

$$(x+3)(Kx-1-4K) = (Kx-1)(x+3+16K-4Kx)$$

$$\begin{aligned} & \cancel{8Kx^2} - \cancel{4Kx} + 3Kx - 3 - 12Kx = \cancel{Kx^2} + 3Kx + 16K^2x - 4K^2x^2 - \\ & \cancel{4Kx} - \cancel{4K} + 4Kx \end{aligned}$$

$$8Kx - 4K + 16K^2x - 4K^2x^2 = 0$$

$$K(8x - 4 + 16Kx - 4Kx^2) = 0$$

$$\begin{cases} K=0 \\ -4Kx^2 + 6Kx + 8x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K=0 & (1) \\ -4Kx^2 + x(8+6K) - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$