



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №1. Заметим, что т.к. A — натуральное число, оно не равно 0.

Тогда $A = \overline{xxxx}$, где x — некая цифра от 1 до 9. Поделим A на 11:

$$\frac{A}{11} = \frac{\overline{xx00}}{11} + \frac{\overline{xx}}{11} = \overline{xx} + x = \overline{x0x}. \text{ Поделим } \overline{x0x} \text{ на } 101:$$

$$\frac{\overline{x0x}}{101} = x, \text{ т.е. } A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101. \text{ Но } x < 10 < 11, \text{ т.е. } A \neq 11^2, A \neq 101^2$$

($x, 11$ и 101 взаимно просты). Тогда $B \cdot C : 101$. Но т.к. 101 — простое,

либо $B : 101$, либо $C : 101$. Т.к. $C \neq 0, C < 100, C \not\equiv 0 \pmod{101}$, т.е. $B : 101$, ~~$B \neq 101$~~

~~$B \neq 101$~~ B равно 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, ~~909~~ или 909. Но т.к.

в числе B присутствует цифра 1, $B = 101$, т.е. $B \not\equiv 0 \pmod{11}$. Но т.к. ABC —

квадрат, $ABC : 11^2 (A : 11) \Rightarrow C : 11, C = \overline{xx}$. Но т.к. в числе C есть

цифра 5, $C = 55$, и $ABC = (x \cdot 11 \cdot 101) \cdot (101) \cdot (5 \cdot 11) = (11 \cdot 101)^2 \cdot 5x, \Rightarrow 5x$ —

это квадрат, т.е. т.к. $5x : 5, 5x : 25$, и раз $x \in [1; 9], x = 5, A = 5555$.

Ответ: $A = 5555, B = 101, C = 55$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2. Из условия получаем

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \text{ т.е. } x \neq 3,$$

иначе $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0}$, и $\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3y} \neq \frac{1}{0} + \frac{1}{0} + \frac{1}{y+3}$.

Приведем дроби слева и справа к общему

знаменателю:

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}. \text{ Т.к. } x > 0, y > 0,$$

$x+y+1 \neq 0$, и мы можем ~~то~~ сократить наши дроби на $x+y+1$:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \text{ т.к. } x \neq 0, y \neq 0, x-3 \neq 0, y+3 \neq 0,$$

$$xy = (x-3)(y+3), \quad xy = xy - 3y + 3x - 9, \quad 3x = 3y + 9, \quad x = y + 3.$$

$$\text{Тогда } M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = (y+3)((y+3)^2 - 9y) - y^3 =$$

$$= (y+3)(y^2 - 3y + 9) - y^3 = y^3 + 3y^2 - 3y^2 - 9y + 9y + 27 - y^3 = 27.$$

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА № 3.а) Перепишем наше уравнение:

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x,$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x &= \sin(\pi y) \sin(\pi x) + \cos(\pi y) \cos(\pi x) = \\ &= -\cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x). \text{ Но } -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha), \\ &-\cos 2\pi x = \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x). \end{aligned}$$

А если $\cos \alpha = \cos \beta$, то $\alpha = \pm \beta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\pi y - \pi x = \pm (\pi - 2\pi x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$y - x = \pm (1 - 2x) + 2k, k \in \mathbb{Z}, y = x \pm (1 - 2x) + 2k. \text{ Но}$$

$$-x \pm 2x = \pm 1 + 2k - x, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{y + 2k - y}{-1 \pm 2} = \frac{1 + 2k - y}{1} \text{ или } x = \frac{-y - 1 + 2k}{-3} =$$

$$= \frac{y + 1 - 2k}{3}. \text{ Итак, наметим график}$$

этих прямых ($y = -x + 1 + 2k$, $y = 3x - 1 + 2k$):

б) Заметим ОДЗ: $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$.

Тогда при $x = -4$ $y = 2k + 5$, $y = 2k - 13$, т.е.

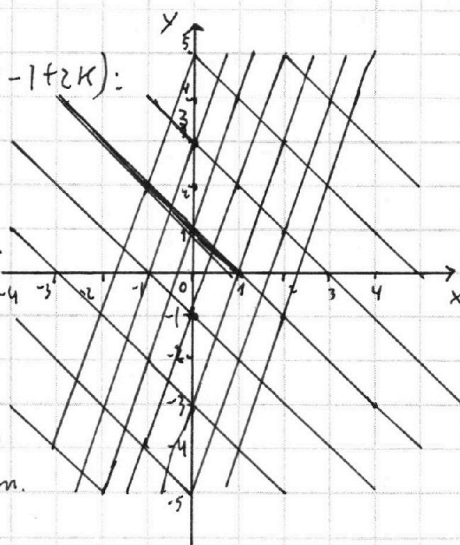
$y = 2l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$, при $x = -3$ $y = 2k + 4$, $y = 2k - 10$, -4

т.е. $y = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$. Вообще, при $x = 2m - 1$

$y = 2m + 2k$, $y = 6m - 4 + 2k$, при $x = 2m$

$y = -2m + 2k + 1$, $y = 6m + 2k - 1$, иначе говоря,

если x чётно, y нечётно и наоборот.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Далее, если $\frac{x}{4} \leq 0$, $\arccos \frac{x}{4} \geq \pi$, и если в то же время $\frac{y}{9} \leq 0$, то $\arccos \frac{y}{9} \geq \pi$, и $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \geq 2\pi \Rightarrow$ При $\frac{x}{4} \leq 0$ $y > 0$, и если $y > 0$, $y \leq 0$, то $x > 0$. По этим условиям подходят пары

x	y
-4	1, 3, 5, 7, 9
-3	2, 4, 6, 8
-2	1, 3, 5, 7, 9
-1	2, 4, 6, 8
0	1, 3, 5, 7, 9
1	-8, -4, -6, -2, 0, 2, 4, 6, 8

Более того, если $x > 0$, $y > 0$, то $\arccos x + \arccos y \leq \pi + \pi$, так что такие пары подходят всегда, а если $x = 0$, $y = 0$, то $\arccos x = \pi$

Далее, так как $\arccos d \in [0; \pi)$ при $d \in [0; 1]$,

$\arccos(\frac{x}{4}) < \pi$, $\arccos(\frac{y}{9}) < \pi$, но только при $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$.

Тогда всего подходящих пар

а. если x/z : $5 \cdot 10 = 50$ (5 вариантов x : 0, 2, 4, -2, -4, 10 вар. y : -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9)

б. если x/z : $4 \cdot 9 = 36$ (4 вар. x : -3, -1, 1, 3, 9 вар. y : -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8)

Итого ~~36~~ вариантов 86 пар.

Ответ: а) $y = 2k - x + 1$ либо $y = 2k + 3x - 1$, $k \in \mathbb{Z}$; б) 86 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №4. Первым делом ~~не~~ обозначим число одиннадцатиклассников за n , а число билетов, которое им решим выдать в конце месяца за k . Тогда мамы и Пети, и Васи попасть на концерт были равны:

• В НАЧАЛЕ МЕСЯЦА: $\frac{12}{n(n-1)}$ • В КОНЦЕ МЕСЯЦА: $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$
(всего вариантов раздать q билетов n одиннадцатиклассникам C_n^q , но если из них досталось Пете и Васе, то существует C_{n-2}^{q-2} способов раздать $q-2$ билета $n-2$ 11-классн.

т.е., что мамы и Пети, и Васи попасть на концерт равны

$$\frac{C_{n-2}^{q-2}}{C_n^q} = \frac{\frac{(n-2)!}{(q-2)!(n-2-(q-2))!}}{\frac{n!}{q!(n-q)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(q-2)! \cdot (n-q)!}}{\frac{n!}{q!(n-q)!}} = \frac{q!(n-2)!}{(q-2)!n!} = \frac{q(q-1)}{n(n-1)}$$

По условию мамы в конце месяца в 3.5 раз больше мамов в начале месяца, т.е.

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{3.5(n-1)n} \text{ . Т.к. в классе есть и Пета, и}$$

Вася, $n-1 \neq 0$, $n \neq 0$, и $42 = 12 \cdot 3.5 = k(k-1)$, т.к. $k > 4$, $k(k-1) = 6 \cdot 7$,

$$k = 7.$$

Ответ: 7 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №6: Начертить координатную плоскость:

Тогда из 2-го уравнения ($x^2 + y^2 \leq 9$)

получаем, что фигура $\Phi(z)$ полностью

лежит в окр-ти Ω . Далее,

замечим, что неравенство

~~$(x - 2 \cos z)(y - 2 \sin z) \geq 0$~~

$(x - 2 \cos z)(y - 2 \sin z) \geq 0$ равносильно

$x \geq 2 \cos z, y \geq 2 \sin z$ либо ~~$x \leq 2 \cos z, y \leq 2 \sin z$~~

$x \leq 2 \cos z, y \leq 2 \sin z$,

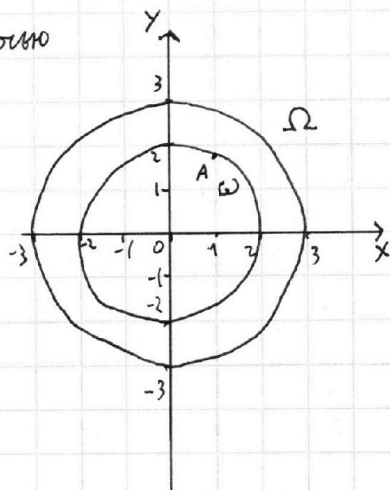
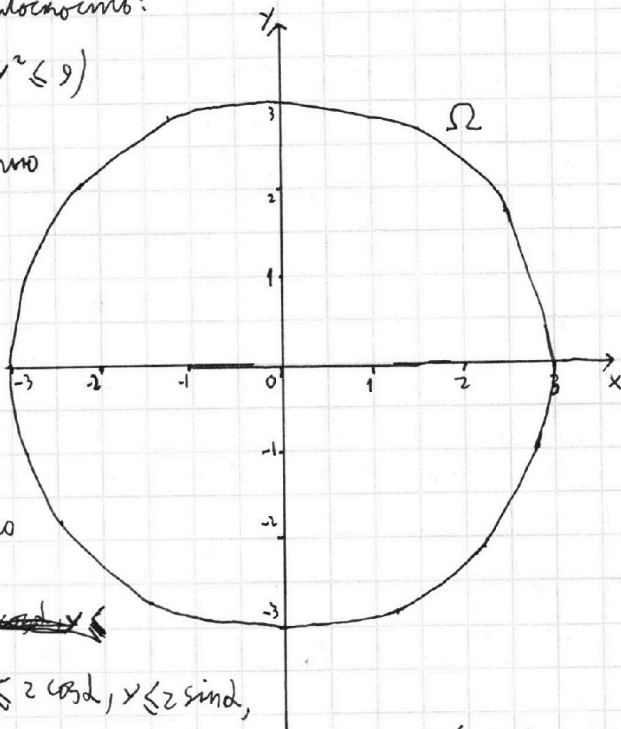
т.е. это все точки, лежащие правее и выше точки $A(2 \cos z; 2 \sin z)$

и все точки, лежащие левее и ниже A . Но ~~линия~~ ГМТ точек A —

это окружность ω с радиусом 2 и центром $O(0; 0)$:

Тогда угол z — это угол между OA и осью

абсцисс. СМ. СЛЕД. ЛИСТ.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда периметр фигуры M - это сумма

$$P_1 = AD + AB + AC + AE \text{ и } P_2, \text{ где}$$

P_2 - сумма длин дуг BGC и DFE .

(CD проходит через A и параллельно оси x , BE проходит через

A и параллельно оси y , G, F - некие точки на Ω). Но т.к. $CD \parallel OX$,

$CD \perp OY$, откуда $CI = DI$ (I - т. пересечения OY и CD , H - т. перес.

BE и OX), аналогично $BH = EH$. Но тогда, т.к. $DI \perp IO$, $CI \perp IO$,

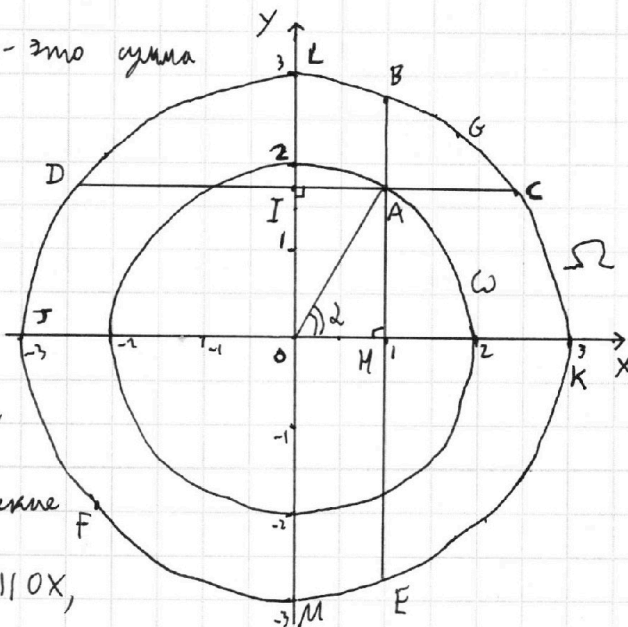
~~по т. Пифагора~~ $\angle DOI = \angle COI$, так что $\angle DOJ = 90^\circ - \angle DOI = 90^\circ - \angle COI =$
 $= \angle COK$, т.е. длина дуги DJ равна длине дуги CK . (J - точка $(-3; 0)$,

K - точка $(3; 0)$). Аналогично находим, что длина дуги BL равна
длине дуги ME (M - точка $(0; -3)$, L - точка $(0; 3)$), итого

P_2 равно сумме длин ^{дуг} MJ, JD, ME и BC , что в свою очередь
равно сумме ^{длин} дуг MJ, CK, BL и BC , что равно сумме длин дуг
 MJ и KL , что равно 3π ,

$M = P_1 + 3\pi$. Теперь найдём P_1 . $P_1 = AC + AD + AB + AE =$

$= BE + CD = BH + HE + IC + ID$, что по т. Пифагора равно для $\triangle HOB$, $\triangle EHO$,
 $\triangle CIO$ и $\triangle DIO$ равно $\sqrt{BO^2 - OH^2} + \sqrt{OE^2 - OH^2} + \sqrt{OC^2 - OI^2} + \sqrt{OD^2 - OI^2} =$ см. СЛЕД. Лист.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{9 - OH^2} + \sqrt{9 - OH^2} + \sqrt{9 - OI^2} + \sqrt{9 - OI^2} = 2(\sqrt{9 - OH^2} + \sqrt{9 - OI^2})$$

$$\neq. \text{ Но } \frac{OH}{OA} = |\cos 2|, \frac{OI}{OA} = |\sin 2|,$$

$$P_1 = 2(\sqrt{9 - OA^2 \cos^2 2} + \sqrt{9 - OA^2 \sin^2 2}), \text{ т.к. } OA = 3,$$

$$P_1 = 2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 2} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 2}) = 2(\sqrt{5 + 4 \sin^2 2} + \sqrt{5 + 4 \cos^2 2}),$$

$M(d) = P_1(d) + 3\pi$. Чтобы найти экстремумы $M(d)$, продифференцируем

$$\text{ее по } d: M'(d) = P_1'(d) = 2(\sqrt{5 + 4 \sin^2 2} + \sqrt{5 + 4 \cos^2 2})' =$$

$$= 2\left(\frac{(5 + 4 \sin^2 2)'}{2\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} + \frac{(5 + 4 \cos^2 2)'}{2\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}}\right) =$$

$$= \frac{(4 \sin^2 2)'}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} + \frac{(4 \cos^2 2)'}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}} = 4\left(\frac{\sin 2d}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} - \frac{\sin 2d}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}}\right) = 4 \sin 2d \left(\frac{1}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} - \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}}\right).$$

Экстремумы достигаются, когда $M'(d) = 0$, либо максимум если

$$M'(d) = 0, \quad 4 \sin 2d \left(\frac{1}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} - \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}}\right) = 0,$$

$$\sin 2d = 0$$

или

$$2d = \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$d = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 2}} = \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 2}}.$$

$$\text{т.к. } \sqrt{5 + 4 \sin^2 2} \geq$$

$$\geq \sqrt{5 + 0}, \sqrt{5 + 4 \cos^2 2} > 0,$$

$$\sqrt{5 + 4 \sin^2 2} = \sqrt{5 + 4 \cos^2 2},$$

$$4 \sin^2 2 = 4 \cos^2 2,$$

$$\sin^2 2 = \cos^2 2 = 1 - \sin^2 2,$$

$$\sin^2 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, экстремумы $M(d)$ достигаются при $d_1 = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ и при $d_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что из соображений симметрии относительно центра O $M(d_1) = M(d_1 + \frac{\pi}{2}) = M(d_1 + \pi) = M(d_1 + \frac{3\pi}{2})$, $M(d_2) = M(d_2 + \frac{\pi}{2}) = M(d_2 + \pi) = M(d_2 + \frac{3\pi}{2})$. Осталось показать, что из $M(d_1)$ и $M(d_2)$ максимум, а что - минимум. Для этого вычислим $P_1(d_1)$ и $P_1(d_2)$:

$$P_1\left(\frac{\pi}{2}k\right) = P_1(0) = 2\sqrt{5+4\sin^2(0)} + 2\sqrt{5+4\cos^2(0)} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5+4} = 2\sqrt{5} + 6.$$

$$P_1(d_2) = P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{5+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + 2\sqrt{5+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{5+4\cdot\frac{1}{2}} + 2\sqrt{5+4\cdot\frac{1}{2}} = 4\sqrt{7}.$$

$$\cancel{P_1(0) \vee P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad P_1(0) \vee P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 < 2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{7} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$36 + 20 + 24\sqrt{5} \vee 16 \cdot 7$$

$$\Downarrow$$

$$24\sqrt{5} \vee 56$$

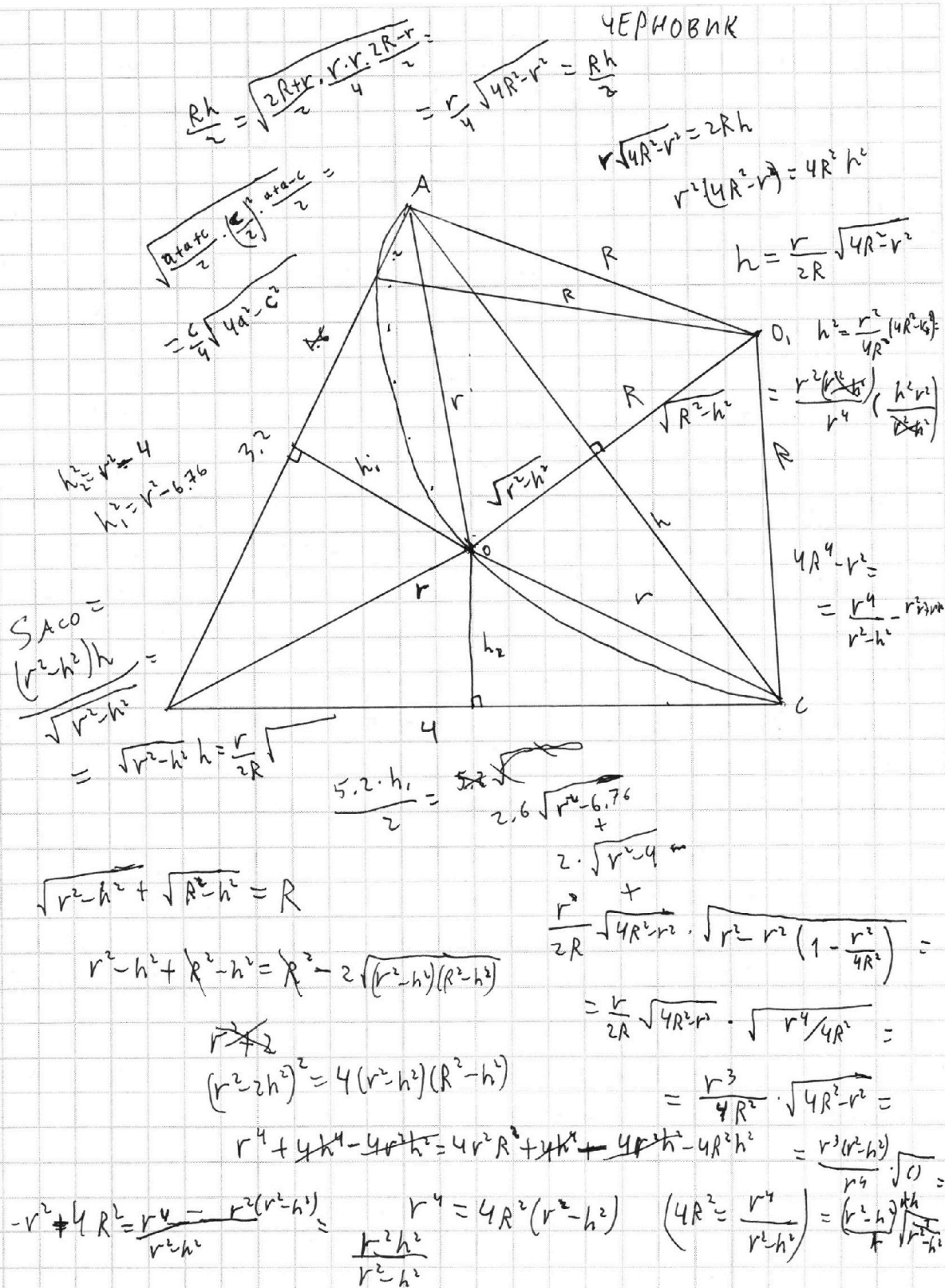
$$\Downarrow$$

$$0 < 3\sqrt{5} \vee 7 > 0 \Leftrightarrow 45 \vee 49 \Leftrightarrow 45 < 49, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} + 6 < 4\sqrt{7}, \quad P_1(0) < P_1\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ т.е. } P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{максимум,}$$

и в нем $M(d) = P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq P_2 = 3\pi + 4\sqrt{7}$, что достигается при $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $M(d)_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}, \quad d_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$





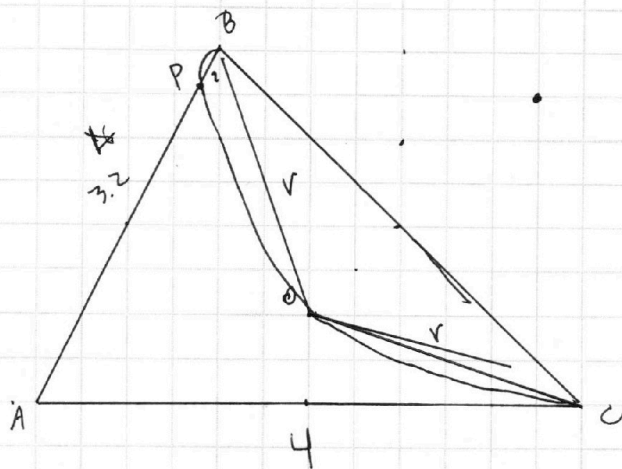
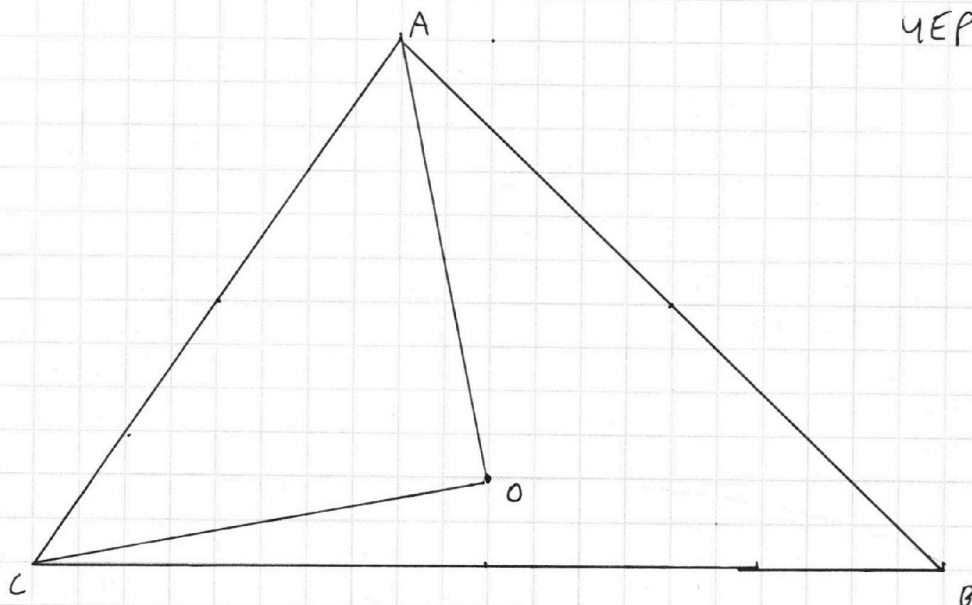
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X		X	

TOTAL 32, CURRENT 21

$$A = \overline{XXXX} = x \cdot 11101$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x = y + 3$$

$$B = \overline{101200200300400500600700800900}$$

$$101 \ 202 \ 303 \ 404 \ 505 \ 606$$

$$707 \ 808 \ 909$$

$$C = \overline{112233445566778899}$$

$$101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5 \cdot x \Rightarrow x = 5$$

$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$(y^2 + x) = x^3 - y^3$$

11-ков: n.

Шаров П. и В.:

изначально

$$П. \frac{4}{n}, В. \frac{3}{n}, \text{ итого } \frac{7}{n} \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

ТЕПЕРЬ:

К БИЛЕТОВ,

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 12}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k = 42, k = 7$$

$$C_n^4$$

$$C_{n-2}^2$$

$$C_n^4 \ominus C_{n-2}^2$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y^2 - 27y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$\frac{(n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{24} = 15$$

А Б В Г Б В Г А А Б В А А Б В П + Б В Г П + А Б Г А Б Г А П - Б Г А П + А В Г А А В Г П + А В А П + А Г А П -



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК.

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 52 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \end{array}$$

$$\cos \pi \gamma - \cos \pi \chi$$

$$-\cos d_1 = \cos(\pi - d_1)$$

$$5.2^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos d_1 = 27.04$$

$$16 = 2r^2(1 - \cos d_2)$$

$$\cos d_2 = \frac{2r^2 - 16}{2r^2} \quad \cos d_1 = 1 - \frac{27.04}{2r^2}$$

$$\cos(\pi \gamma - \pi \chi) = \sin \pi K - \cos \pi K$$

$$\cos(\pi \gamma - \pi \chi) = -\cos 2\pi K = \cos(\pi - 2\pi K)$$

$$0.65 \cdot 0.4 = 0.26$$

$$\pi \gamma - \pi \chi = \pm(\pi - 2\pi K) + 2\pi K$$

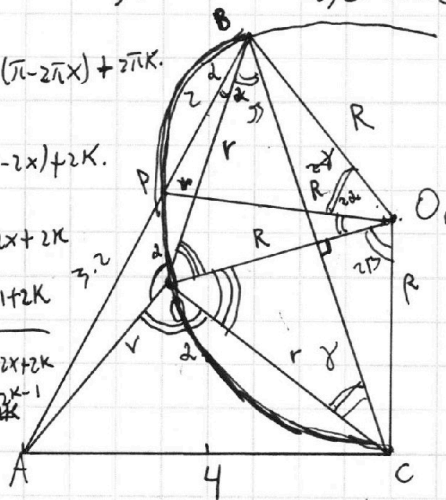
$$\gamma - \chi = \pm(1 - 2K) + 2K$$

$$\gamma - \chi = 1 - 2K + 2K$$

$$\gamma + \chi = 1 + 2K$$

$$\gamma - \chi = -1 + 2K + 2K$$

$$\gamma - 3\chi = -1 + 4K$$



$$\cos B = \cos(2\pi - d_1 - d_2) = \cos(-d_1 - d_2) =$$

$$= \cos(d_1 + d_2) =$$

$$-3\chi = 2K - 1 - \gamma$$

$$\chi = \frac{2K + 1 + \gamma}{3} = \cos d_1, \cos d_2 = \sin d_1, \sin d_2 =$$

$$10.4 = 2 \cdot 20.8 = 41.6$$

$$5.2$$

$$10.4 K_1$$

$$= \cos d_1, \cos d_2 = \sqrt{(1 - \cos^2 d_1)(1 - \cos^2 d_2)}$$

$$\chi = 2K + 1 - \gamma$$

$$\gamma = 2K + 1 - \chi$$

$$\gamma = 2K - 1 + 3\chi$$

$$X^2 = 43.04 - \frac{216.32}{r^2} + 41.6$$

$$K=0:$$

$$x=0 \quad y=1 \quad x=1 \quad y=0$$

$$2r^2 \left(1 + \frac{(2r^2 - 16)(2r^2 - 27.04)}{4r^4} + \right)$$

$$= 2r^2 \left(1 + \sqrt{(1 - \cos^2 d_1)(1 - \cos^2 d_2)} - \cos d_1, \cos d_2 = \right)$$

$$= \frac{2r^2}{4r^4} \left(4r^4 - 4r^4 + 32r^2 + 54.08r^2 - (4.52)^2 + 4.52 \cdot \sqrt{(r^2 - 4)(r^2 - 6.76)} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

