



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



✦ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✦ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

✦ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

✦ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

✦ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

- Заметим, что число A , составленное из одинаковых цифр должно делиться на 1111 , т.к. все четырехзначные числа из одинаковых цифр имеют вид $1111 \cdot k$, где $k \in [1; 9]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Число 1111 делится на 101 и 11 . (101 и 11 - простые)
Т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натур. числа, то $\begin{cases} B \cdot C : 101 \\ B \cdot C : 11 \end{cases}$
(степень вхождения множителя должна ≥ 2)
- Поскольку 101 и 11 - простые, то $\begin{cases} B : 101 \\ C : 101 \\ B : 11 \\ C : 11 \end{cases}$
- Т.к. трехзначное число не может нацело делиться на трехзначное, то $B : 101$ (и $B < 101 \cdot 11$) и $C : 11$.
- $B = 101 \cdot m \Rightarrow B = \overline{m0m} \Rightarrow$ т.е. B содержит цифру $3 \Leftrightarrow B = 303$ (при данных условиях)
- $C = 11 \cdot l \Rightarrow C = \overline{ll} \Rightarrow$ т.е. C содержит цифру $2 \Leftrightarrow C = 22$
- Тогда $ABC = 1111 \cdot k \cdot 303 \cdot 22 = (101)^2 \cdot (11)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k$,
 $k = (2 \cdot 3)^b$, $b \geq 2$
 $k = (2 \cdot 3)^b$; $b \in \mathbb{N}$ и $k \in [1; 9] \Rightarrow k = 6$ Ответ: $(6666; 303; 22)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Приравняем значение k :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy \cdot \frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+x+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{2+x+y}{xy} = \frac{2+x+y}{(x-1)(y+1)}$$

$$\begin{cases} 2+x+y=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

т.к. x и $y > 0$,
то $x+y > 0$,
но $x+y = -2$,
противоречие

$$\underline{x-y-1=0}; \quad x-y=1$$

Подставим в M :

$$M = (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = 1^3 + 3xy \cdot 0 = 1$$

Ответ: 1

$$x, y > 0; \quad y \neq -1; \quad x \neq 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\textcircled{I} \begin{cases} x-y=2k+1 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \end{cases}$$

 $k \in \mathbb{Z}$ из неравенств: $(-5-4-1) \cdot \frac{1}{2} \leq k \leq (5+4-1) \cdot \frac{1}{2}$

$$-5 \leq k \leq 4$$

это условие даёт, что $k \neq 4$
(т.к. это max x и min y)

$$-5 \leq k < 4; k \in \mathbb{Z}$$

$$k=-5 \quad k=-4 \quad k=-3 \quad k=-2 \quad k=-1 \quad k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3$$

$$x-y=-9 \quad x-y=-7 \quad x-y=-5 \quad x-y=-3 \quad x-y=-1 \quad x-y=1 \quad x-y=3 \quad x-y=5 \quad x-y=7$$

Возьмем пары целых x, y , удовн. нер-вам и ур-ниям:

$$\begin{array}{l} (-5; 4) \quad (-5; 2) \quad (-5; 0) \quad (-5; -2) \quad (-5; -4) \quad (-3; -4) \quad (-1; -4) \quad (1; -4) \quad (3; -4) \\ \text{или} \quad (-4; 3) \quad (-4; 1) \quad (-4; -1) \quad (-4; -3) \quad (-2; -3) \quad (0; -3) \quad (2; -3) \quad (4; -3) \\ \text{или} \quad (-3; 4) \quad (-3; 2) \quad (-3; 0) \quad (-3; -2) \quad (-1; -2) \quad (1; -2) \quad (3; -2) \quad (5; -2) \\ \quad \quad \quad (-2; 3) \quad (-2; 1) \quad (-2; -1) \quad (0; -1) \quad (2; -1) \quad (4; -1) \\ \quad \quad \quad (-1; 4) \quad (-1; 2) \quad (-1; 0) \quad (1; 0) \quad (3; 0) \quad (5; 0) \\ \quad \quad \quad (0; 3) \quad (0; 1) \quad (2; 1) \quad (4; 1) \\ \quad \quad \quad (1; 4) \quad (1; 2) \quad (3; 2) \quad (5; 2) \\ \quad \quad \quad (2; 3) \quad (4; 3) \\ \quad \quad \quad (3; 4) \quad (5; 4) \end{array}$$

всего 49 пар

Рассмотрим систему II



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Всего пар где $n \in [-1; 9]$ получилось 27.

Сложим все получившиеся пары и вычтем из них ^{званды} повторяющиеся: (повтор. $\checkmark$ подчеркнутые вышешой линией)

$$49 + 22 + 27 - (22 + 27) = 49 + 49 - 49 = 49 \text{ пар}$$

Ответ: 49 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Р.1 Посмотрим на область значений $\arcsin$ и $\arccos$:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos y \leq \pi$$

①

$$\arcsin x + \arccos y \leq \frac{3\pi}{2}$$

То есть неравенство $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ выполняется всегда, кроме тех случаев, когда $\frac{x}{5}$

То есть неравенство $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

выполняется при условиях: $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$; $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$;

и

$$\begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases}$$

т.к. исходное
неравенство
строгое

где области
определения
 $\arcsin$ и $\arccos$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y-1=2k \\ 3x+y-1=2n \end{cases} & k, n \in \mathbb{Z} \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x-y-1=2k \\ 3x+y-1=2n \end{cases} & k, n \in \mathbb{Z} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x-y-1=2k \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} & \text{т.к.} \\ -4 \leq y \leq 4 & x, y \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} & \text{но усл.,} \\ & \text{то разберем} \\ & \text{варианты:} \\ \begin{cases} 3x+y-1=2n \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases} & \text{II} \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$3x + y - 1 = 2n \quad \text{из пер-в и ур-ние: } \frac{-20}{2} \leq n \leq \frac{13-1}{2} = 9$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 & \textcircled{\text{II}} \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

Рассмотрим сначала $n \in [-10; -2]$

$n = -10$	$n = -9$	$n = -8$	$n = -7$	$n = -6$	$n = -5$	$n = -4$	$n = -3$	$n = -2$
$3x + y = -19$	$3x + y = -17$	$3x + y = -15$	$3x + y = -13$	$3x + y = -11$	$3x + y = -9$	$3x + y = -7$	$3x + y = -5$	$3x + y = -3$

Выпишем пары целых $(x; y)$, удовн. пер-вам и ур-нию:

$(-5; -4)$	$(-5; -2)$	$(-5; 0)$	$(-5; 2)$	$(-5; 4)$	$(-4; 3)$	$(-3; 2)$	$(-3; 4)$	$(-2; 3)$
	$(-4; -3)$	$(-4; -1)$	$(-4; 1)$	$(-3; 0)$	$(-2; -1)$	$(-2; 1)$	$(-1; 0)$	
		$(-3; -4)$	$(-3; -2)$	$(-2; -3)$	$(-1; -4)$	$(-1; -2)$	$(0; -3)$	

всего 22 пары

Рассмотрим теперь $n \in [-1; 9]$:

$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$3x + y = -1$	$3x + y = 1$	$3x + y = 3$	$3x + y = 5$	$3x + y = 7$	$3x + y = 9$	$3x + y = 11$	$3x + y = 13$	$3x + y = 15$	$3x + y = 17$	$3x + y = 19$

Выпишем пары целых $(x; y)$ удовн. пер-вам и ур-нию:

$(-1; 2)$	$(-1; 4)$	$(0; 3)$	$(1; 2)$	$(1; 4)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 3)$	$(5; 2)$
$(0; -1)$	$(0; 1)$	$(1; 0)$	$(2; -1)$	$(2; 1)$	$(3; 0)$	$(4; 1)$	$(4; 0)$	$(5; 0)$
$(1; -4)$	$(1; -2)$	$(2; -3)$	$(3; -4)$	$(3; -2)$	$(4; -3)$	$(5; -2)$		$(5; 4)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Воспользуемся формулой суммы синусов и суммы косинусов:

$$2 \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \pi x \right.$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x - \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = 0 \right.$$

применим
формулу
косинуса
разности

$$\left[\cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \cos \left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x \right) = 0 \right.$$

$$\cos \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\begin{cases} x-y-1 = \pi k \cdot \frac{2}{\pi} \\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y-1 = \pi n \cdot \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x-y-1 = 2k \\ 3x+y-1 = 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x-1-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2n+1-3x, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

8.1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

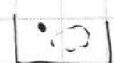
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 Пусть x - общее число детей

Детей в данной задаче будем считать на 2 группы:

те, кто попадают на концерт и те, кто не попадают на концерт.

Начало месяца:



4

группа
попав.



$x-4$

группа
не попав.

Вероятность попасть в группу

попав. Нете и Васа вместе равна:

$$\text{Равно} = \left(\frac{4}{x} \right) \cdot \left(\frac{3}{x-1} \right)$$

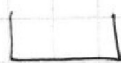
Вероятность
попасть в первую

после того,
как кто-то

из них уже
попал, вторую
остается 3

места и на
этот момент еще
 $x-1$ "неопреде-
ленные" участки

Конец месяца:



n



$x-n$

n - число билетов
в конце месяца

↑ аналогично, $\text{Рпопавшему} = \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1}$

По условию:

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \right) = \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1} \quad | \cdot (x)(x-1) \neq 0$$

$$30 = n(n-1)$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$\begin{cases} n=6 \\ n=-5 \end{cases}, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}, \text{ то } n=6 \quad \text{Ответ: } 6$$



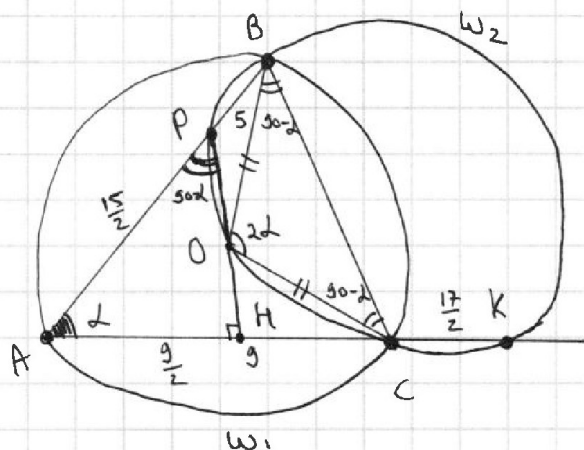
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



1. Степень точки A отн-но w_2 равна:

$$\deg_{w_2} A = AP \cdot AB \quad (1)$$

$$\deg_{w_2} A = AK \cdot AC \quad (2)$$

↑
вне зависимости от
положения т.к

2. Приравняем (1) и (2):

$$AP \cdot AB = AK \cdot AC$$

$$\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) = 9 \cdot AK ; \quad AK = \frac{18 \cdot 25}{4 \cdot 9} = \frac{125}{12} > 9$$

3. $CK = AK - AC = \frac{125}{12} - 9 = \frac{17}{12}$

↑
т.к. лежит на продолжении
AC за т.С

4. Т.к. O - центр w_1 , то:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = \alpha ; \quad \angle BOC = 2\alpha$$

5. Т.к. CDPB - вписанный, то $\angle BPO + \angle OCB = 180^\circ$;

$$\angle OCB = \frac{180 - \angle BOC}{2} = 90 - \alpha \quad (\text{по сумме углов тр-ка});$$

Тогда $\angle BPO = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$ и $\angle APO = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$
как смежные

6. Пропустим PO до пересечения с AC. Пусть это будет

т.к. Тогда по сумме углов ~~вписанного~~ $\triangle APH$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AHP = 180 - 2 - (90 - 2) = 90^\circ; PH \perp AC$$

7. А отрезок AH тогда равен $\frac{AC}{2}$, поскольку AH -

- $\perp$ к AC , проведенный из центра опис. окр-ти.

$$AH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

8. Коусис угла $\angle BAC$:

$$\cos \angle = \frac{AH}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \angle = + \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

9. Найдём площадь $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{25 \cdot 5}{4} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

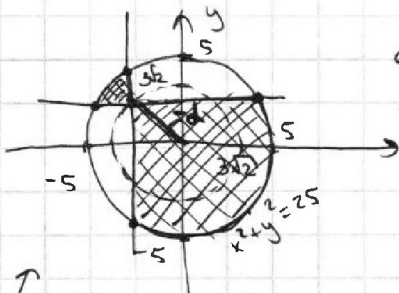
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

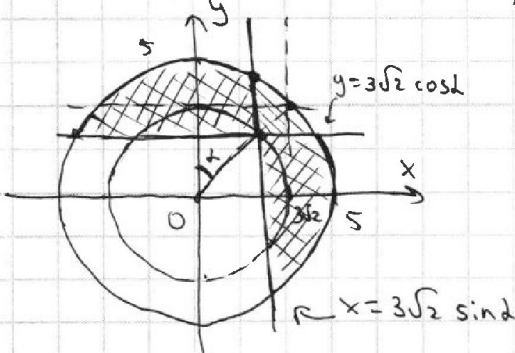
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \text{ (I)} \\ \begin{cases} y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \text{ (II)} \\ x^2 + y^2 \leq 25 \text{ (II)} \end{cases}$$

① Заметим, что (II) - это уравнение круга с центром в т. (0;0) и радиусом 5

② Совокупность (I) создаёт две части разных полуплоскостей:



угол α отсчитывается от оси y против часовой стрелки

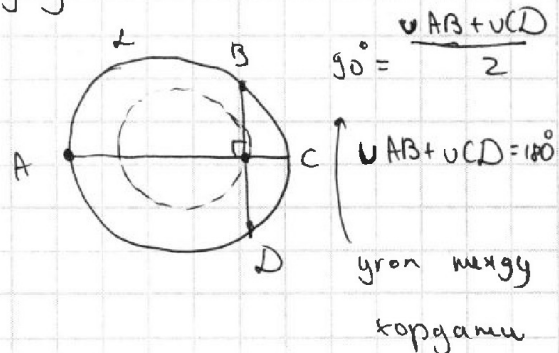


- такие области образуют фигуру

← общий вид фигуры, заданной данной системой.

③ Периметр такой фигуры складывается из дуги дуг окр-ти с радиусом 5 и дуги её $\perp$ хорд, пересекающихся на окр-ти с центром в т. (0;0) и радиусом $3\sqrt{2}$

④





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

⑤ Т.е. сумма градусных мер углов AB и CD всегда постоянна и равна $180^\circ \Rightarrow$ ^{суммарная} сумма углов AB и CD также постоянна и равна $\frac{1}{2}(2 \cdot \pi \cdot 5) = 5\pi$

⑥ Т.е., чтобы получить max значение M , нужно максимизировать длину хорды AC и BD

$$B(3\sqrt{2}\sin\alpha; y_B); D(3\sqrt{2}\sin\alpha; y_D)$$

$$|BD| = \sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha - 3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (y_B - y_D)^2} =$$

$$= |y_B - y_D|; \quad y_B^2 + 12\sin^2\alpha = 25; \quad y_D^2 + 12\sin^2\alpha = 25$$

"

$$|y_B - y_D| = 2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha}$$

~~$$|AC| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$~~
$$|AC| = \sqrt{(x_A - x_C)^2} = |x_A - x_C|$$

$$y_A \quad x_A^2 + 12\cos^2\alpha = 25; \quad x_C^2 + 12\cos^2\alpha = 25;$$

$$AC = |x_A - x_C| = 2|x_A| = 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha}$$

$$M = \max(2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha})$$

$$(2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha})' = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} (25 - 12\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-12 \cdot \sin 2\alpha) + 2 \cdot \frac{1}{2} (25 - 12\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12 \sin 2\alpha)$$

$$\frac{12 \sin 2\alpha}{\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha}} - \frac{12 \sin 2\alpha}{\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha}} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos \alpha = \cos \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

max достигается
при $\alpha = 45^\circ$,
 $\alpha = 135^\circ$, ...

"

0

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + y = 2n + 1$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$x \neq 5$$

$$y \neq -4$$

II

$$-\frac{20}{2} \leq n \leq (3 \cdot 5 + 4 - 1) \cdot \frac{1}{2}; \quad -10 \leq n \leq 9$$

$$\text{т.е. } n \neq (3 \cdot 5 + (-4) - 1) \cdot \frac{1}{2} = 5 \rightarrow \begin{cases} -10 \leq n \leq 9 \\ n \neq 5 \end{cases}$$

* Сначала рассмотрим $-10 \leq n \leq -1$:

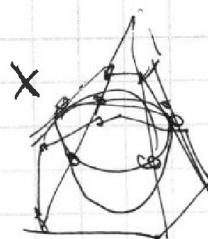
$$n = -10 \quad n = -9 \quad n = -8 \quad n = -7 \quad n = -6 \quad n = -5 \quad n = -4 \quad n = -3 \quad n = -2 \quad n = -1$$

$$3x + y = -19$$

$$3x + y = A$$

$$y > 4$$

$$x = 1$$



$$2,5 \text{ под}_1 = \text{под}_2$$

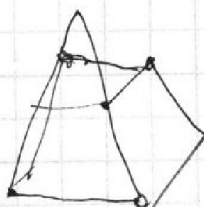
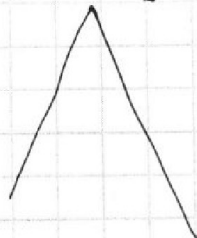
44

$$n = 9$$

$$x = 4$$

$$-10 \leq n \leq 9$$

$$x = 8$$



$$\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1}$$

$$2n(n-1) = 60$$

$$n(n-1) = 30$$



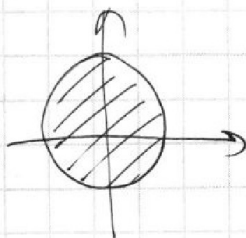
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

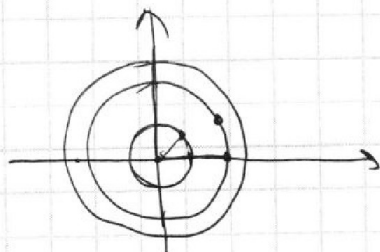
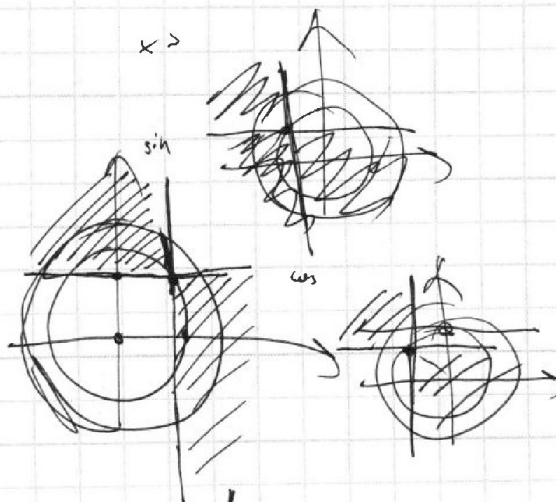
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6

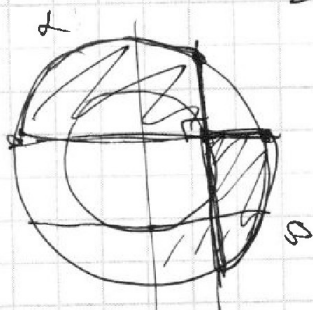
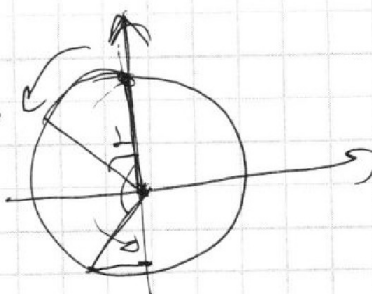


$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha$$



$$\alpha + \beta = 180$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90$$



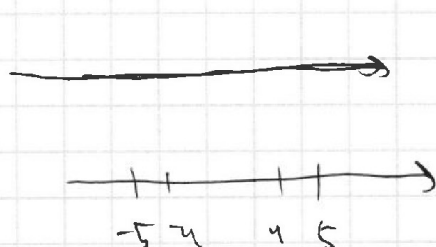


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x - y = 2k + 1$$

$$\begin{aligned} x - y &= 2k + 1 \\ -5 &\leq x \leq 5 \\ -4 &\leq y \leq 4 \end{aligned}$$

$$5 + 9 = 2k + 1$$

$$-4 \leq k \leq 3$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

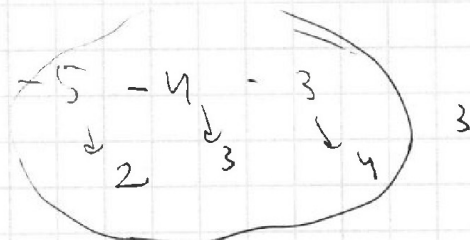
$$x - y = 2k + 1$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x - y = -7$$

$$x - y = -7$$

$$x - y =$$



$$x - y = -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II $3x+y=1+2n$

$-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$

$x \neq 5$
 $y \neq -4$

это условие значит, что $n \neq (5-4-1) \cdot \frac{1}{2} = 5$

генерируем

заменим:

$3x = t$

тогда

$\leq t \leq$

$3x+y-1=2n$

$-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$

kkkk :

$\frac{1111}{11} \mid \frac{11}{101}$

$101 \cdot 11$

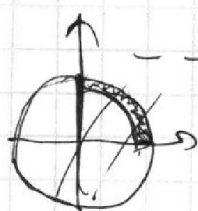
$1111 \cdot k$

$(101) \cdot 11 \cdot k \cdot x^2 + y^2 \geq 12$

$101 \cdot 303 \cdot 11 \cdot k \cdot 22$

$x^2 \geq 12 \sin^2 \alpha$

$x \geq 2\sqrt{3} \sin \alpha \quad y^2 \geq 12 \cos^2 \alpha$



$x \leq 3\sqrt{2}$

$1111 \cdot k \cdot x$

тогда:

$\sin \alpha > 0$

$\cos \alpha > 0$

$(11) \cdot (101) \cdot k$

$x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha$

$(3, 2)$
 $(4, 1)$
 $(5, -4)$

$3x+y=11$

$(-5, 4)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

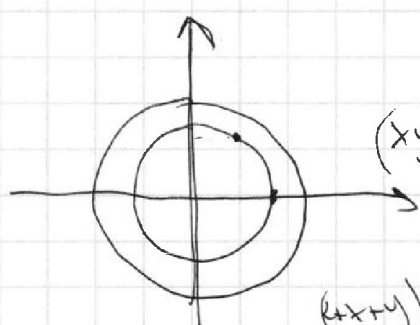
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$



$$10x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1$$

$$(xy+1)^3 \quad xy(xy-1) \quad (x-y)^3$$

$$\begin{aligned} y &\neq -1 \\ x &\neq 1 \\ x, y &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 3xy \\ (x+y)(x-y) - 3xy \\ x-y = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{2+x+y}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} \quad x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x+y)^3$$

$$x^3 + y^3$$

$$(x+y)^3$$

$$\begin{cases} 2+x+y=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \\ xy = xy + x - y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y-1)=0 \\ 2+x+y=0 \end{cases}$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

$$(x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy$$

$$(x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = ?$$



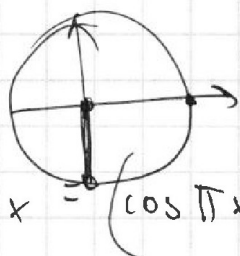
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W-3



$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \dots \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos \dots \leq \pi$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Сумма косинусов.

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\pi x = \alpha + \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = -12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$-12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\pi y = \alpha - \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi x + \pi y}{2} \quad x - y = 1 = 2k \quad = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} =$$

$$\arcsin \frac{2k+y+1}{5} + \arccos \frac{y}{4} = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0$$

$$25 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\arcsin \dots \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} = \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$



$$\cos \left(\pi x + \frac{\pi(x+y)}{2} \right) = 0$$

$$2 \sqrt{25 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} x$$



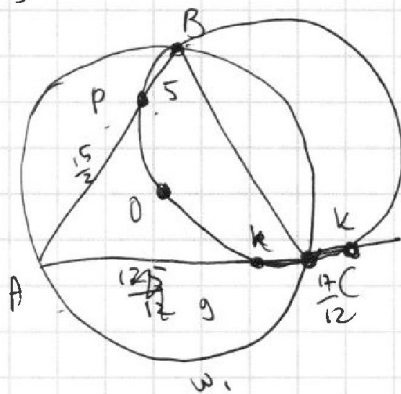
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

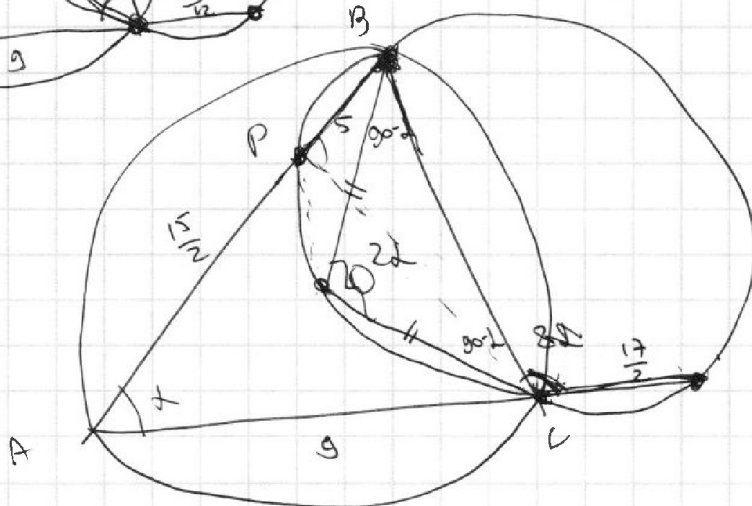
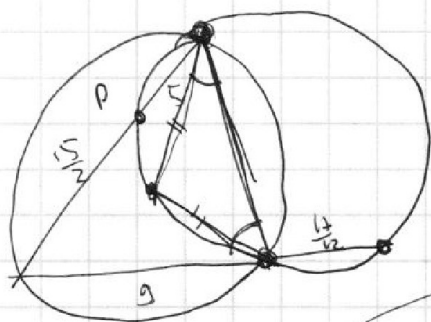
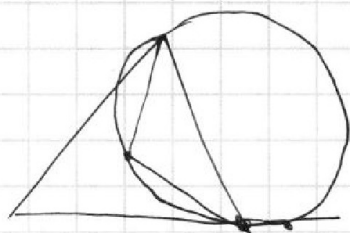
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 5



$\times 12$
 $\frac{125}{12}$

BL.



S_{ABC}

$$AB = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot \frac{15}{2} = AK \cdot 9$$

$$AK = \frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2 \cdot 3}$$

$$9 \cdot AK = \frac{125}{12} - 9 = \frac{125 - 108}{12} = \frac{17}{12}$$

$$9 \cdot \frac{9 \cdot 12 + 17}{12} = \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right)$$

$$\frac{25 \cdot 5 \cdot 125 \cdot 9}{12 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 15}{4}$$

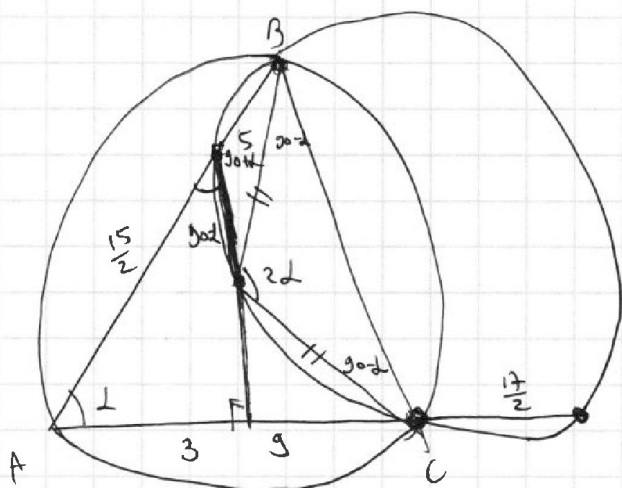


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

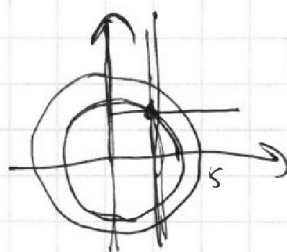


$$2L + 90 - L$$

$$90 + L$$

$$\sin L = \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

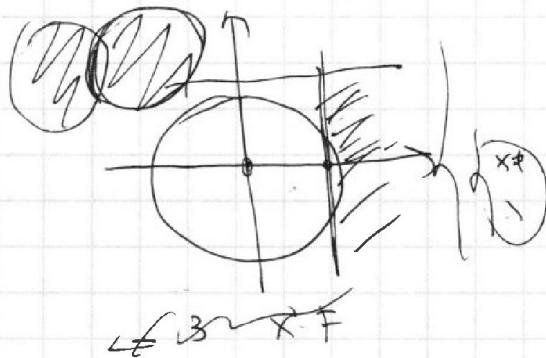
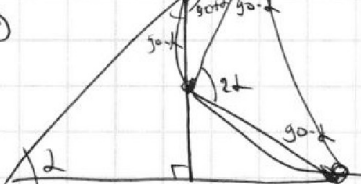
$$L = \frac{1}{2}$$



$$3\sqrt{2} \sin L$$

$$3\sqrt{2} \cos L$$

$$9 \cdot 2 \leq 25$$



A, B, C

$$a a a a = A$$

$$N = 6$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$3x + y = A > 0$$

$$k \geq l$$

$$l \geq k$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin L \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos L \leq 0 \end{cases} \quad \text{B} \quad \begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin L \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos L \geq 0 \end{cases}$$

$$3x + y = A$$

$$(x - 3\sqrt{2} \sin L)(y - 3\sqrt{2} \cos L) \leq 0$$

