



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a} = a \cdot 1111$$

$$B = \bar{b}\bar{c}\bar{d} - \text{каждая цифра}$$

$$C = \bar{e}\bar{f} - \text{каждая цифра}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$(A \cdot B \cdot C) = ?$$

$$1) A \cdot B \cdot C =$$

$$= a \cdot 1111 \cdot (100b + 10c + d) \cdot (10e + f)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 11 \overline{) 101} \\ \underline{-11} \\ 0 \end{array}$$

n^2	ст	ст / 11
1	1	
4	4	
9	9	
16	5	
25	3	
36	3	
	5	
	9	
	4	
	0	
	...	

$$2) A : 11 \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11$$

$$\text{призн. : 11 : } \sum_{\text{цифры}} \text{чет} - \sum_{\text{цифры}} \text{нечет} : 11$$

$$n_{\max} < 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 10^9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$K' = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{\frac{x}{3} \cdot 3y}$$

$$K' = K$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

все возм. M - ?

Задача 1/2.

$$1) K' = K \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

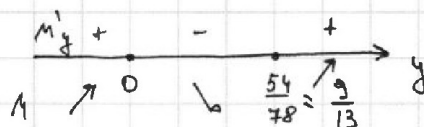
$$\frac{x}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$x = 3y$$

$$2) M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= 27y^3 - y^3 - 27y^2 = 26y^3 - 27y^2$$

$$M'_y = 78y^2 - 54y > 0$$



Т.к. $y > 0$ и $x > 0$ то $M(y)$ имеет минимум в т. $\frac{9}{13}$, её максимум $+\infty$

$$\text{Тогда } M_{\min} = M\left(\frac{9}{13}\right) = 26 \cdot \frac{9^3}{13^3} - 27 \cdot \frac{9^2}{13^2} = 2 \cdot \frac{9^3}{13^2} - 3 \cdot \frac{9^3}{13^2} = -\frac{9^3}{13^2} = -\frac{729}{169}$$

$$\text{Ответ: } M \in \left[-\frac{729}{169}; +\infty\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{R}$$

Задача 1/3.

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) \sin \pi x = \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) \cos \pi x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right)$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \cos \pi x$$

$$x-y = 1-2x+2m$$

$$3x-y = 1+2m$$

$$x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 1+2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1+2k-x, k \in \mathbb{Z}$$

Пары вида: $(x; 1+2k-x), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

$$y = 3x-1-2m, m \in \mathbb{Z}$$

$(x; 3x-1-2m), \text{ где } m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

$$b) \cos \frac{x}{4} + \cos \frac{y}{4} < 2\pi, x, y \in \mathbb{Z}$$

1) т.к. $\cos \left(\frac{x}{4} \right) \in [0; 1]$, то пер-во эквивалентно:

$$\begin{cases} -1 < \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 < \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \quad 2) \text{ Рассмотрим пары 1-го вида:}$$

$$\begin{cases} -4 < x \leq 4, x \in \mathbb{Z} \\ -4 < 1+2k-x \leq 4, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < x \leq 4 \\ -10-2k < -x \leq 8-2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \\ 10+2k > x \geq 2k-8, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < x \leq 4 \\ -4 < y \leq 4 \end{cases}$$

ищем k, при кот. выполн.

2-е двойное пер-во:

$$x = -3$$

$$x = -2$$

$$x = -1$$

$$\begin{cases} 10+2k > -3 \\ -3 \geq 2k-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+2k > -2 \\ -2 \geq 2k-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -\frac{11}{2} \\ k \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -\frac{13}{2} \\ k \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -6 \\ k \leq 3 \end{cases}$$

3 рещ. k

Нельзя записать, что при k=... второе двойное пер-во выполняется только в сл. комбинациях 1-го

$$k = \{-6, -5, \dots, 2\}$$

$$k = \{-5, -4, \dots, 3\}$$

$$x = 0$$

3 рещ. k

3 рещ. k

$$\begin{cases} k > -5 \\ k \leq 4 \end{cases}$$

3 рещ.

$$\begin{cases} k > -\frac{3}{2} \\ k \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

3 рещ

$$\begin{cases} k > -4 \\ k \leq 5 \end{cases}$$

3 рещ

$$\begin{cases} k > -\frac{7}{2} \\ k \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

3 рещ

Всего 9 пар 1-го вида

2-го вида 3-7 = 63

реш.

Гранич. на стр. 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №3.

б) 2) Для пар 1-го вида решений: 63

Для пар 2-го вида:

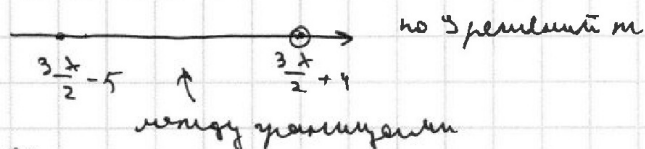
$$\begin{cases} -4 < x \leq 4 & x \in \mathbb{Z} \\ -9 < 3x - 1 - 2m \leq 9 & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$-8 + 2m < 3x \leq 10 + 2m$$

$$\begin{cases} m < \frac{3x}{2} + 4 \\ m \geq \frac{3x}{2} - 5 \end{cases}$$

Решение $\forall x \in \mathbb{Z}$



Значит для пар второго вида также 63 решения 3 целых числа. Точек

Всего решений $(x; y)$: $63 + 63 = \boxed{126}$

Ответ: а) $(x; 4 + 2k - x), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ б) 126.
 $(x; 3x - 1 - 2m), m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

В начале:

4 бм., x - "кл.

P_1 - вероятность

В конце:

4 бм., x - "кл.

3,5 P_1 - вероятность

1) Всего сочетаний «классиков, получивших

билет: в начале в конце
 C_x^4 C_x^y

2) Тети и Вовы выделяются
 выбранными в случайном
 4 бм.

$n + 8$
 $x-2$ "кл.

C_{x-2}^{y-2}

В конце:
 4 бм

$n + 8$
 $x-2$ "кл.
 C_{x-2}^{y-2}

выбрать еще двоих

из $x-2$ «классиков»

$$3) \text{ Тогда } P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}; \quad 3,5 P_1 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^{y-2}}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)!}{2! \cdot 4!} \cdot 3,5 \cdot \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^{y-2}} \cdot \frac{C_x^1}{C_x^{3,5}}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{(x-2)!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{x!}{y! \cdot (x-y)!} = \frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2! \cdot y!} = \frac{1}{(y-2)! \cdot 4!} \quad y^2 - y - 42 = 0$$

$$\frac{7}{4} \cdot 4! \cdot (y-2)! = y!$$

$$7 \cdot 6 = (y-1)y$$

$$\begin{cases} y = -6 \\ y = 7 \end{cases}$$

по смыслу $y = 7$

Ответ: 7 билетов



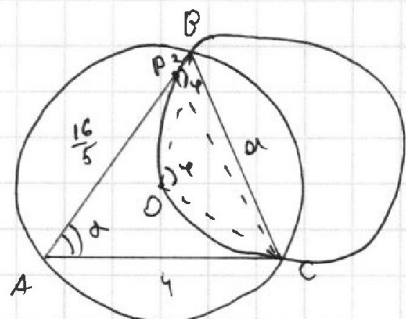
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



ω_1 ABC-
окружность.

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$S_{ABC} = ?$$

1) т.к. $\angle BPC$ опир. на $\cup BC$ окр. ω_2
и $\angle BOC$ опир. на $\cup BC$ окр. ω_2
то $\angle BPC = \angle BOC = \varphi$

$$2) \triangle APC: \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{PC}{\sin \alpha} \Leftrightarrow 4 \sin \alpha = PC \sin \varphi$$

$$\triangle BOC: 2R \sin \frac{\varphi}{2} = \alpha$$

R - радиус ω_1

по Th. Синусов:

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{\alpha}{2R} = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \alpha$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$3) \text{ Имеем: } \begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \alpha \rightarrow \frac{\varphi}{2} = \alpha \text{ или } \pi - \frac{\varphi}{2} = \alpha \\ 4 \sin \alpha = PC \sin \varphi \\ PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$\varphi = 2\alpha \text{ или } \varphi = 2(\pi - \alpha)$

Значит:

$$\sin \varphi = \sin 2\alpha \text{ т.к. } \angle \varphi \text{ и } \angle 2\alpha \text{ в } \triangle ABC \text{ опир. на } \cup AC$$

$$\sin \varphi = \sin 2\alpha$$

$$\sin (2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$

$$\sin \varphi = \begin{cases} \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha \end{cases}$$

$\triangle ABC$ - остроу.

$$\Rightarrow 0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$2\alpha < \pi$$

$$\sin (2\alpha) > 0$$

противоречие

$$4) \text{ т.е. } \varphi = 2\alpha$$

$$\text{Значит } \angle ACP = \varphi - \alpha = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle ACP = \angle PAC$$

$$\Rightarrow AP = PC$$

$$5) S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{8} =$$

$$\frac{26}{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{4} = \frac{13\sqrt{35}}{10}$$

Ответ: $S_{APC} = \frac{13\sqrt{35}}{10}$

$$\text{Также } AP \cos \alpha = \frac{AC}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{35}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Phi(z)$:

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

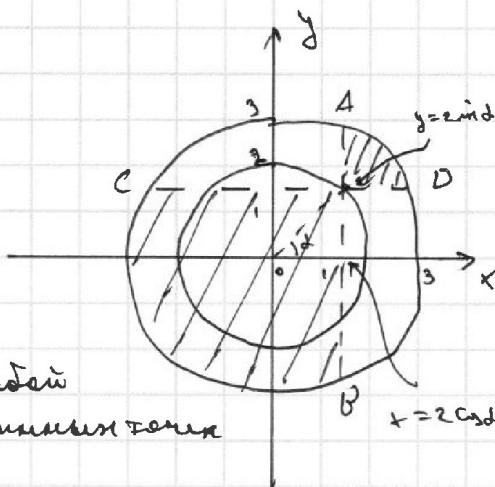
M - периметр $\Phi(z)$

$M_{\max}$ - ?

$\alpha(M_{\max})$ - ?

Задача 1/6.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x - 2 \cos \alpha \geq 0 \\ y - 2 \sin \alpha \geq 0 \\ x - 2 \cos \alpha \leq 0 \\ y - 2 \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$



$\Phi(z)$ - представляет собой
мн-во заштрихованных точек

2) Найдите $M(z)$:

$$M(z) = \overline{AB} + AB + CD + \overline{AD} + \overline{CB}$$

по Th. Синусов: $\frac{2}{\sin j} = \frac{3}{\sin(30^\circ + \alpha)}$
 $\sin j = \frac{2}{3} \cos \alpha$

$$AB = 2 \cdot 3 \cos j = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

по Th. Синусов: $\frac{2}{\sin \varphi} = \frac{3}{\sin(180^\circ - \alpha)}$

$$CD = 2 \cdot 3 \cos \varphi = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$\Theta_1 = 360^\circ - 270^\circ - j - \varphi = 90^\circ - j - \varphi$$

$$\Theta_2 = 360^\circ - (360^\circ - 90^\circ - \varphi - j) = 90^\circ + \varphi + j$$

тогда $\overline{AD} = 3 \Theta_1$
 $\overline{CB} = 3 \Theta_2$

$$\begin{aligned} M(z) &= 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} + 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} + 3 \left(\frac{\pi}{2} - j - \varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi + j \right) = \\ &= 6 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \right) + 3\pi \end{aligned}$$

Продолжение на стр. 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи 6

3) Мы получим: $M(\alpha) = 6\left(\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}\right) + 3\pi$

$$M'_{\alpha} = 6\left(\frac{-\frac{4}{9} \cdot 2\cos\alpha \cdot (-\sin\alpha)}{2\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha}} + \frac{-\frac{4}{9} \cdot 2\sin\alpha \cos\alpha}{2\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}}\right) = 0$$

получим.

$$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

т.к. при

остаточный α

функции $\Phi(\alpha)$

симметричны

функциям при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\cos\alpha \sin\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}}\right) = 0$$

$$\left[\alpha = 0 \text{ или } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ или } \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha} - \sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha} = 0\right]$$

$$1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \\ 2 = \frac{4}{9} - \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\text{в } \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases} - \text{экстремумы } M(\alpha)$$

$$M(0) = 6\left(\sqrt{1 - \frac{4}{9}} + \sqrt{1}\right) + 3\pi = 6\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1\right) + 3\pi$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(\sqrt{1} + \sqrt{1 - \frac{4}{9}}\right) + 3\pi = 6\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1\right) + 3\pi$$

$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot 2}\right) + 3\pi = 12\frac{\sqrt{2}}{3} + 3\pi = 4\sqrt{2} + 3\pi$$

$$\text{Значит } M_{\max} = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$4\sqrt{2} \cup 6\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1\right)$$

$$M_{\max} = 4\sqrt{2} + 3\pi$$

$$4\sqrt{2} \cup 2\sqrt{5} + 6$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \dots$$

$$16 \cdot 7 \cup 4 \cdot 5 + 12\sqrt{5} + 36$$

$$112 \cup 56 + 12\sqrt{5}$$

$$56 \cup 12\sqrt{5}$$

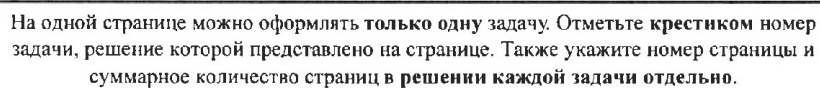
$$8^2 \cdot 7^2 \cup 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$4 \cdot 49 \cup 3^2 \cdot 5$$

$$196 > 45$$

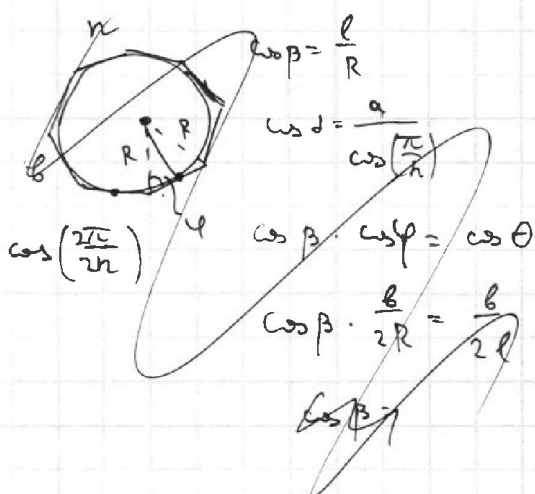
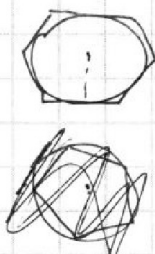
Ответ: $M_{\max} = 4\sqrt{2} + 3\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \beta \cdot \cos \frac{\pi}{h} \approx \frac{b}{2d}$$

$$ad f \stackrel{10}{\equiv} n^2$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a} \cdot \bar{a} \bar{a}\bar{a}\bar{a}, a \neq 0 \quad (A; B; C) \rightarrow ?$$

$$B = \bar{c}\bar{d}\bar{e}, \text{ одинаковые}$$

$$\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{d}\bar{e} \cdot \bar{f}\bar{g} = n^2$$

$$C = \bar{f}\bar{g}, \text{ одинаковые}$$

$$n^2 : 3$$

$$n^2 \equiv 1/0$$

$$4x : 3$$

$$ABC = n^2$$

$$1 \quad 1$$

$$4x \equiv 1/2/0$$

$$4 \quad 1$$

$$\text{Еще } n^2 \equiv 0:$$

$$4 \quad 1$$

$$1/2/0 \cdot 0/1/2 \cdot$$

$$8 \quad 2$$

$$9 \quad 0$$

$$12 \quad 0$$

$$16 \quad 1$$

$$16 \quad 1$$

$$25 \quad 1$$

$$20 \quad 2$$

$$36 \quad 0$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{\pi}{2}(1+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} x+y = \pi x \\ x-y = \pi y \end{cases}$$

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} =$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy}$$

$$2x = \pi x + \pi y$$

$$x = \frac{\pi}{2}(1+y)$$

$$y = \frac{\pi}{2}(1-x)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$M = 27y^3 - y^3 - 27y^2 =$$

$$= 26y^3 - 27y^2 =$$

$$= y^2(26y - 27)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y}(1 - \frac{1}{3})$$

$$\frac{x}{2} = y \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = 3y$$

$$\sin(\pi x) - \sin(\pi y) = \sin \pi x$$

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) =$$

$$= 2\cos x \cos y + \sin x \sin y + \sin x \sin y$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = \begin{cases} x-y = \varphi \\ x+y = \delta \end{cases}$$

$$= 2\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$= 2\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\sin(\pi x) - \sin(\pi y) =$$

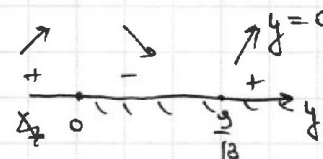
$$= 2\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$2\cos \frac{\pi}{2}(1+y) \sin \frac{\pi}{2}(1-x) \sin \pi x = 2\cos \frac{\pi}{2}(1+y) \cos \frac{\pi}{2}(1-x) \cos \pi x$$

$$M'_y = 78y^2 - 54y = 0$$

$$78y - 54 = 0$$

$$y = \frac{54}{78} = \frac{27}{39} = \frac{9}{13}$$



$$M_{\min} = M\left(\frac{9}{13}\right) = 26 \cdot \frac{9^3}{13^3} - 27 \cdot \frac{9^2}{13^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{9^3}{13^2} - 3 \cdot \frac{9^3}{13^2} =$$

$$= -\frac{9^3}{13^2}$$

$$\sin(x+y) \mp \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$2\cos x \sin y \quad 2\cos x \sin y$$

$$CO \cdot OD = AO \cdot OG$$

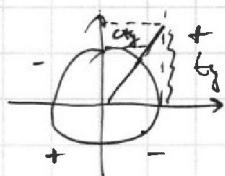


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - d\right) = \frac{\cos d}{\sin d} = \cot d = \tan(-d)$$

$$\cot d = \tan\left(\frac{\pi}{2} - d\right)$$

$$\tan d = \tan \beta$$

$$d = \beta + \pi K$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$\max(\arccos x) = \pi$$

$$\begin{cases} x \neq -4 & x \in (-4; -1) \cup (-1; +\infty) \\ 1 + 2K - x \neq -3 \end{cases}$$

$$x \neq 10 + 2K$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{3} \neq -1 \\ x \neq -4 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

$$-1 < \frac{x}{4} \leq 1$$

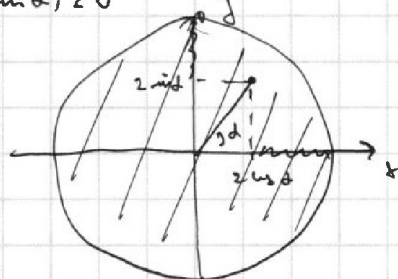
$$-1 < \frac{1 + 2K - x}{3} \leq 1$$

$$1 < x \leq 4$$

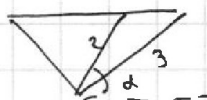
$$-10 < 2K - x \leq 8$$

$$-1 < x \leq 4$$

$$\begin{cases} (x - 2 \cos d)(y - 2 \sin d) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

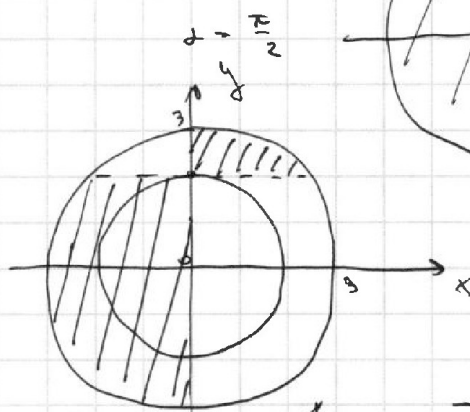


$$\begin{cases} x \geq 2 \cos d \\ y \geq 2 \sin d \\ x \leq 2 \cos d \\ y \leq 2 \sin d \end{cases}$$



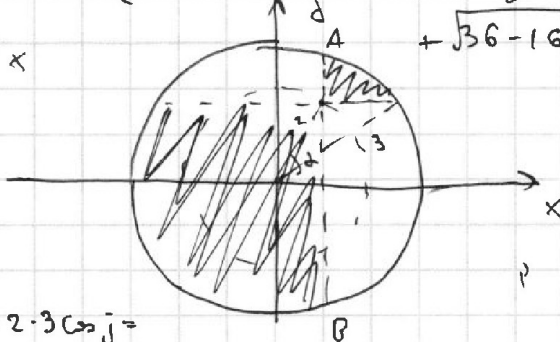
$$d = \frac{\pi}{2}$$

$$P = 2 \sin d \sqrt{36 - 16 \cos^2 d} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 d}$$



$$\begin{aligned} \frac{3}{\sin(\pi + d)} &= \frac{2}{\sin j} \\ \sin j &= \frac{2}{3} \cos d \\ \cos j &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{AB} &= 2 \cdot 3 \cos j = \\ &= \sqrt{36 - 16 \cos^2 d} \end{aligned}$$



$$\frac{16}{9} - \frac{16}{9} \cos^2 d + 25 =$$

$$\frac{36}{9} \cdot \frac{C^2}{C^2} - \frac{C^2}{C^2} - \frac{C^2}{C^2} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3, 5. \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^4}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



$$C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{a^2}{4R^2} = \frac{(1 - \cos \gamma)^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{R^2} = 1 - \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{a}{R}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} = a$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} = a$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{PC}{\sin \beta} \quad \frac{a}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{PC}{\sin \beta}$$

$$PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha$$

$$a^2 = \left(\frac{16}{5} + 2\right)^2 + 4^2 - 2 \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cos \alpha$$

$$\frac{16^2}{5} + 16 - \frac{8 \cdot 16}{5} \cos \alpha$$

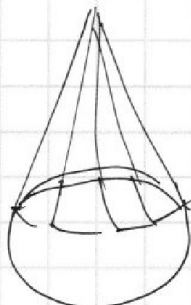
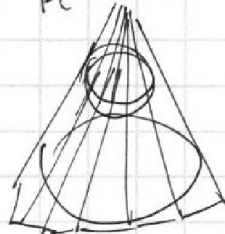
$$\sin \gamma = \frac{a \sin \beta}{PC} = \frac{4 \sin \alpha}{PC}$$

$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} + \left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 = 1$$

$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} + (1 - 2 \sin \alpha)^2 = 1$$

$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} = 4 \sin \alpha (1 - 4 \sin \alpha)$$

$$\frac{4 \sin \alpha}{PC^2} = (1 - 4 \sin \alpha)$$



$$t = PC^2(1 - t)$$

$$t = \frac{PC^2}{1 + PC^2}$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{PC}{\sin \alpha}$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} = a$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha$$

$$PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha$$