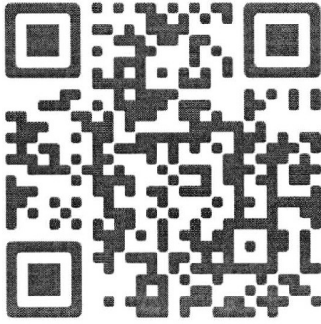




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in [1; 9]; A = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a;$$

$$1111 = 11 \cdot 101;$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C \text{ — квадрат некоторого натурального числа}$$

11, 101 — простые. Их степень в разложении  $A \cdot B \cdot C$  на простые множители должна быть чётной, т.к.  $A \cdot B \cdot C$  — квадрат.

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C$$

$$\div 11^n \div 101^k, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, n > 0 \\ k \in \mathbb{Z}, k \geq 2, k > 0$$

$$(a \cdot B \cdot C) \div 11 \text{ и } \div 101$$

$$a \in [1; 9] \Rightarrow a \not\div 11, a \not\div 101 \Rightarrow B \div 101 \quad (*)$$

$$B \in [10; 99] \Rightarrow B \not\div 101$$

Заметим, что  $B$  не может одновременно делиться на 11 и на 101, т.к.

$$\begin{cases} B \div 11 \\ B \div 101 \end{cases} \Leftrightarrow B \div 1111, \text{ но } B \in [100; 999] \Rightarrow B \not\div 1111;$$

(11, 101 — простые)

$$B \div 101 \text{ из } (*), B \not\div 11 \Rightarrow B \div 11;$$

$$\begin{array}{l} C \text{ — двузначное} \\ C \div 11 \\ C \text{ содержит цифру 3} \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \text{единств. подходящее} \\ \text{знач. } C = 33; \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$B \in [100; 999]$   
 $B: 101$   
 $B$  содержит цифру 2

$\Rightarrow$  единств. знач. для  $B = 202$

$A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot a}_A \cdot \underbrace{2 \cdot 101}_B \cdot \underbrace{3 \cdot 11}_C$  — квадрат <sup>натур.</sup> числа  
2, 3 — простые;  $\Rightarrow$  все степени входящие в разложение на простые множители  $A \cdot B \cdot C$  должны быть четными.

$11 \nmid 2, \nmid 3$   
 $101 \nmid 2, \nmid 3$

$a: 2, a: 3 \Rightarrow a: 6$   
 $a \in [1; 9]$

$a = 6;$

$A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot 6}_A \cdot \underbrace{2 \cdot 101}_B \cdot \underbrace{3 \cdot 11}_C = 6^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$  — квадрат числа  $6 \cdot 11 \cdot 101;$

$(A; B; C) = (6666; 202; 33);$

Ответ:  $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy};$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1}{(x-1)(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} =$$

$$= \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)};$$

По условию значение выражения  $K$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  увеличить на 1; Тогда это условие можно записать следующим образом:

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x+y > 0$$

(по условию)

$$x+y+2 > 0$$

$$x-y+2 > 0; \quad \text{Положим обе части ур-ния на } (x+y+2)$$

$$\frac{1}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{xy}; \quad xy = (x-1)(y+1);$$

$$(значения \neq 0 \text{ по услов.}) \quad \cancel{xy} = \cancel{xy} - y + x - 1;$$

$$x-y = 1; \quad (*)$$

Рассм. выражение  $M = x^3 - y^3 - 3xy =$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy =$$

(по  $(*)$ )

$$= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \stackrel{(по \text{ } (*)}{=} 1^2 = 1; \quad \text{Ответ: } 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☒4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

по формуле суммы синусов      по формуле суммы косинусов

$$\left[ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad (1) \right. \\ \left. \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \quad (2) \right]$$

Ур-ние (1):  ~~$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$~~   $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$ ;  $\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0; \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad | : \pi / 2$$

$$x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad (*)$$

Ур-ние (2):  $\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$

$$\frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) - \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) + \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) \right);$$

по формуле произвед. синусов      по формуле произвед. косинусов

$$\cancel{\cos \left( \frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} - \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = \cancel{\cos \left( \frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} + \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right)$$

$$2 \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = 0; \quad \cos \left( \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = 0;$$

$$\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad | : \pi / 2$$

$$3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \quad (**)$$

$U_3 (*) \cap (**)$ : пересечение все пары действ. чисел удовлетв. совокупности

$$\begin{cases} x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б) целые  $(x; y)$  такие что удовлетв. ур-нию и

нер-ву:  $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; (3)$

$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1; -5 \leq x \leq 5; -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1; -4 \leq y \leq 4;$

$\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}];$   
 $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$

Единственная пара  $(x; y)$ , такая что

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$

Пара  $(5; -4)$  не удовлетв. нер-ву (3); ~~все остальн~~

Все другие пары  $(x; y)$  ( $x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$ ) удовлетв. нер-ву (3)

Найдём целые  $(x; y)$  удовлетв. ур-нию;

По п.а решению ур-ния являются пары  $(x; y)$ , такие

что:  $\begin{cases} x-y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$  ~~выражен~~

Заметим, что обе части являются некоторыми

целыми числами, причем правая часть -

нечётное число.  $\Rightarrow \begin{cases} x-y - \text{нечётно} \\ 3x+y - \text{нечётно} \end{cases}$  такое может быть, только если  $x, y$  - числа разной чётности;

Учитывая все наложенные условия выберем все целые пары  $(x; y)$  такие что:

$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ (x; y) \neq (5; -4) \\ x \not\equiv y \pmod{2} \end{cases}$

~~выберем эти пары:~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого нечётного  $x$  (кроме  $x=5$ ) найдётся 5 чётных значений  $y: \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

Для  $x=5$ :  $y \in \{-2; 0; 2; 4\}$  — 4 значения;

Для каждого чётного  $x$  найдётся 4 нечётных значения  $y: \{-3; -1; 1; 3\}$ ;

Нечётных знач.  $x$  (кроме  $x=5$ ) — 5 знач.  
 $\{-5; -3; -1; 1; 3\}$

Чётных знач.  $x$  — 5 значений  $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$ ;

$$\text{Всего пар: } \underbrace{5 \cdot 5}_{\substack{\text{пары вида} \\ (H; 4)}} + \underbrace{5 \cdot 4}_{\substack{\text{пары} \\ \text{вида} \\ (4; H)}} + \underbrace{4}_{\substack{\text{пары} \\ \text{вида} \\ (5; 4)}} = 25 + 20 + 4 = 49;$$

$H$  — нечётный

$4$  — чётный

Ответ: а)  $\begin{cases} x-y \geq 1+2n, n \in \mathbb{Z}; \\ 3x+y \geq 1+2k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$  б) 49;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть  $P(A)$  - событие "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"~~

Пусть  $P(A)$  - вероятность события "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"

Все исходы распределение билетов равновероятны, поэтому  $P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ , где  $n$  - кол-во билетов; ( $n \geq 4$ )

$C_n^4$  - все исходы,  $C_{n-2}^2$  - кол-во вариантов распределения билетов, где Геня, Вера и еще 2 человека пойдут на концерт.

$$P(A) = \frac{(n-2)!}{(n-4)! 2!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2(n-1)n} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Пусть  $P(B)$  - вероятность события "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"

$k$  - кол-во билетов, которые будут выданы в конце месяца;  $k \geq 4$

Все исходы равновероятны, поэтому

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! (k-2)!} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

По условию:  $P(B) = 2,5 P(A)$ ;  $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2,5 \cdot 12}{n(n-1)}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{30}{n(n-1)} \mid \cdot n(n-1), n(n-1) \neq 0, \text{ т.е. } n > 4;$$

$$k^2 - k \geq 30; \quad k^2 - 30 - k \geq 0;$$

$$k^2 - k - 30 \geq 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 30 = 121 = 11^2;$$

квадратн. уравне  
 $A=1, B=-1, C=-30$

коэфф. квадратного  
трёхчлена

дискриминант

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{1 \pm 11}{2} = \frac{1 \pm 11}{2};$$

$$k \neq 1 \pm \begin{cases} k \geq 6 \\ k \geq -5 \end{cases}$$

$$k \geq 4 (\text{по условию}) \Rightarrow k \geq 6;$$

Было выдано 6 билетов в конце месяца

Ответ: 6

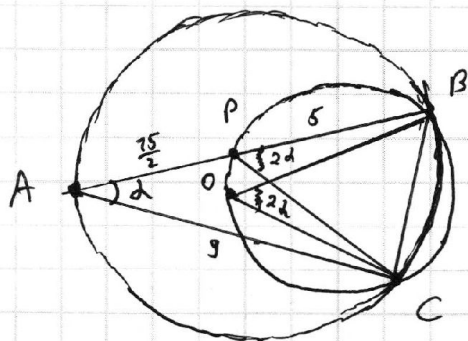


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:  
 $\triangle ABC$  - остроуг.  $\Rightarrow$  п. О  
лежит внутри  $\triangle ABC$

1) Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ;

$\angle BAC$  - вписанный  
в  $\omega_1$

$\angle BOC$  - центральный  
в  $\omega_1$ ;

$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$  (по св-ву вписанного  
угла);

2)  $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$  (как вписанные,  
опирающиеся на одну дугу);

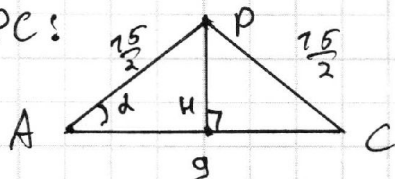
$\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$   
(как смежные углы)

$\angle ACP = 180^\circ - \angle PAC - \angle APC = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha$ ;

$\angle ACP = \angle PAC = \alpha \Rightarrow \triangle APC$  - р/б (по двум углам);

$AP = PC = \frac{15}{2}$ ;

3)  $\triangle APC$ :



Ответили  $PH \perp AC$   
 $PH$  - медиана (по св-ву  
р/б  $\triangle$ );  $AH = HC = \frac{9}{2}$ ;

$\triangle AHP$  - прямоугольный;  $AH^2 + HP^2 = AP^2$  (по т. Пифагора)

$PH = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{2} \cdot \frac{24}{2}} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$ ;

$\sin \angle PAC = \sin \alpha = \frac{HP}{AP} = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{15} = \frac{4}{5}$ ;

4)  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} =$   
 $= 45$

Ответ: 45;

Дано:  
 $\triangle ABC$  - остроуг.  
 $\omega_1(O_1; R)$  описана  
около  $\triangle ABC$ ;  
 $\omega_2(O_2; r)$   
описана около  
 $\triangle BOC$ ;  
 $\omega_2 \cap AB = P$ ;  
 $AP = \frac{15}{2}$ ;  
 $BP = 5$ ;  
 $AC = 9$ ;

Найти:  
 $S_{\triangle ABC}$ ?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для дальнейших рассуждений обозначим точки  $A, B, C, D, E$  на графике.

Тогда  $P_{\Phi(2)}$  — периметр фигуры;

~~$P_{\Phi(2)}$~~

Обозначим  $l_{AB}$  — длину отрезка  $AB$ ;

$l_{BC}$  — длину отрезка  $BC$ ,  $l_{DE}$  — длину отрезка  $DE$ ;

$l_{FE}$  — длину отрезка  $FE$ ;  $l_{BD}$  — длину отрезка  $BD$ ;

$l_{DP}$  — длину отрезка  $DP$ ;  $l_{BP}$  — длину отрезка  $BP$ ;

$$P_{\Phi(2)} = l_{AB} + l_{BC} + l_{DE} + AD + CE;$$

Заметим, что в силу симметрии  $BC = FE$ ;

$l_{BC} = l_{FE}$ ; Аналогично:  $AB = BD$ ;  $l_{AB} = l_{BD}$ ;

$$P_{\Phi(2)} = l_{AB} + \underset{l_{FE}}{l_{BC}} + l_{DE} + AD + CE = \underset{l_{BD}}{l_{AB}} + \overset{l_{DP}}{l_{FE}} + l_{DE} + AD + CE =$$

$$= l_{AB} + l_{DP} + AD + CE = l_{BD} + l_{DP} + AD + CE =$$

$$\underset{\text{длина отрезка}}{= l_{BF}} + AD + CE = \frac{2\pi \cdot 5}{2} + AD + CE = 5\pi + AD + CE;$$

~~$P_{\Phi(2)}$  зависит от длины отрезка~~ Обозначим точки  $Q, S$  (см. график)

т.  $Q(3\sqrt{2}\sin 2; 3\sqrt{2}\cos 2)$ ;  $\triangle OQA$  — прямоугольный;

$Q(0; 3\sqrt{2}\cos 2)$ ;

$AQ^2 + OQ^2 = AO^2$  (по г. Пифагора);

$S(3\sqrt{2}\sin 2; 0)$ ;

$$AQ = \sqrt{25 - 18\cos^2 2};$$

Аналогично  $\triangle OSE$  — прямоугольный.  $OS^2 + SE^2 = OE^2$  (по г. Пифагора);

$$SE = \sqrt{25 - 18\sin^2 2};$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

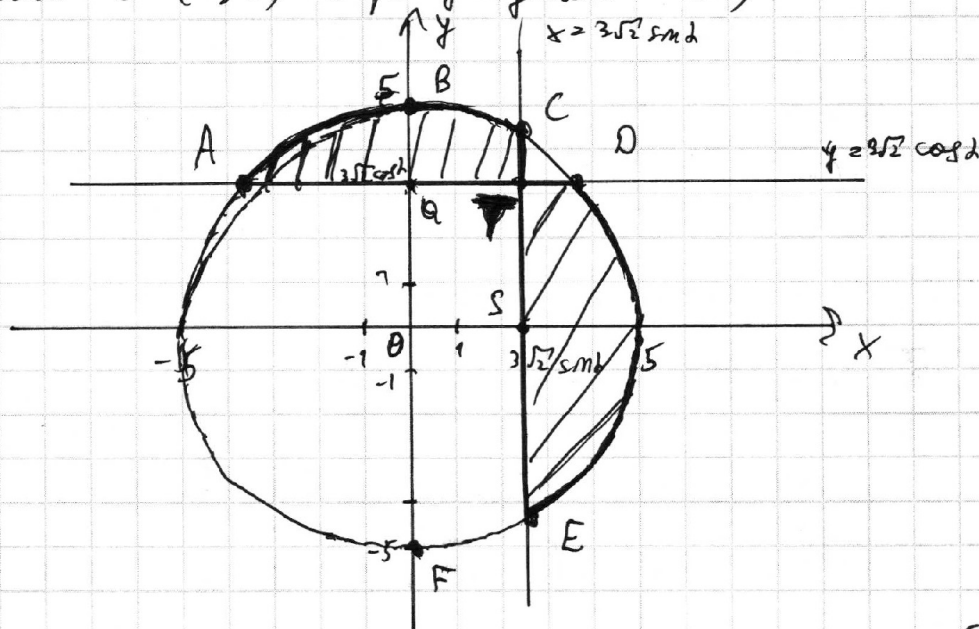
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0; & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25; & (2) \end{cases}$$

Введём НДСК и в координатах  $(XOY)$  построим график системы;

$$(1): (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0;$$

Графиком являются две области, ограниченные прямыми  $x = 3\sqrt{2} \sin 2$  и  $y = 3\sqrt{2} \cos 2$ ;  
 $x = 3\sqrt{2} \sin 2$  — вертикальная прямая  
 $y = 3\sqrt{2} \cos 2$  — горизонтальная прямая

(2)  $x^2 + y^2 \leq 25$ ; графиком является внутренняя область окружности с центром в  $(0,0)$  и радиусом  $\geq 5$ ;



Штриховкой обозначена область, заштрихованная фигурой  $P(2)$ , штриховыми линиями показаны её границы  $3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow$  прямые всегда п ок-тв (2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AQ = QD = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha};$$

$$SE = SC = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha};$$

$$AD + CE = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{25 + 18 \sin^2 \alpha - 18} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ (по основн. тр-т-ву)}$$

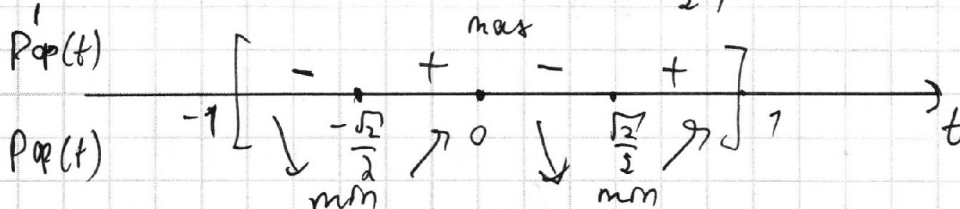
$$P_{\varphi}(\alpha) = 5\pi + 2\sqrt{25 + 18 \sin^2 \alpha - 18} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}; \text{ пусть } t = \sin \alpha, t \in [-1; 1];$$

$$P_{\varphi}(t) = 5\pi + 2\sqrt{25 - 18t^2 - 18} + 2\sqrt{25 - 18t^2}; \quad D_{P_{\varphi}(t)} = [-1; 1]$$

$$P'_{\varphi}(t) = 2 \cdot \frac{36t}{2\sqrt{7+18t^2}} + 2 \cdot \frac{-36t}{2\sqrt{25-18t^2}} = 36t \left( \frac{\sqrt{25-18t^2} - \sqrt{7+18t^2}}{\sqrt{7+18t^2} \cdot \sqrt{25-18t^2}} \right)$$

$$P'_{\varphi}(t) = 0; \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ \sqrt{25-18t^2} = \sqrt{7+18t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ 25-18t^2 = 7+18t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 36t^2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$P_{\varphi}(0) = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10;$$

$$P_{\varphi}(-1) = 5\pi + 10 + 2\sqrt{7};$$

$$P_{\varphi}(1) = 5\pi + 10 + 2\sqrt{7};$$

$$M = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10; \text{ достигаемо при } \begin{cases} t \geq 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha \geq 0 \\ \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \in \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } M = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



п. Черныш.

К34

$$n \frac{C_{n-2}^2}{C_n} = 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a;$$

$$B = \overline{bcdc} = 1000b + 100c + 10d + c \rightarrow 1000b + 100c + 10d + c \rightarrow 1000b + 100c + 10d + c$$

$$C = \overline{ef} = 10e + f$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \overline{) 101} \\ \underline{01} \end{array}$$

$$(11 \cdot 101)$$

$$(B.C) : 11^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$62 \sin 4y \sin 5y$$

$$\frac{42}{(n-3)(n-2)}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 31} \end{array}$$

$$xy(1-2n)$$

$$(C=33)$$

$$B = 101, 202, 303$$

$$404, 505, 606, 707, 808$$

$$B : 101$$

$$(B=202)$$

$$x=20, n=0$$

$$(101)$$

$$11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 2 = 101 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$\frac{xy}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{1+2xy}{xy}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\text{range}[-4+4; 4+4] \quad xy - y + x - 1$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ y=102n-34 \end{cases}$$

$$\frac{xy-2xy}{xy} = \frac{x-2xy}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$(x-y=1)$$

$$x=1-2n \in [-4; 4]$$

$$M = (x-y)(x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2) - 3xy; \quad x \in [-5; 5]; \quad y \in [-4; 4]$$

$$n \in [-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}] \quad x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x;$$

$$\frac{\sin \pi x + \sin \pi y}{2} \cos \pi x = \frac{\cos \pi x + \cos \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2}) - \cos(\frac{3\pi x + \pi y}{2})) = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}) + \cos(\frac{\pi x - \pi y}{2}))$$

$$\cos(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}) = 0; \quad \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad 3xy = 102n;$$



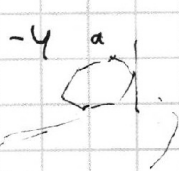
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

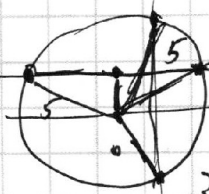
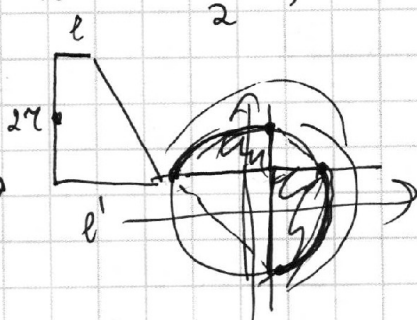


$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} &\geq \frac{9}{3}, 0, 5 \\ y &= x - 1 - 2n \\ y &= 1 - 2n - 3x \end{aligned}$$



$$n = \frac{y - x - 1}{2} = \frac{8 - 4 - 1}{2}$$

$$n = \frac{y - 3x - 1}{2};$$



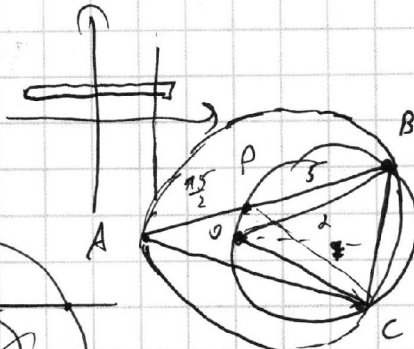
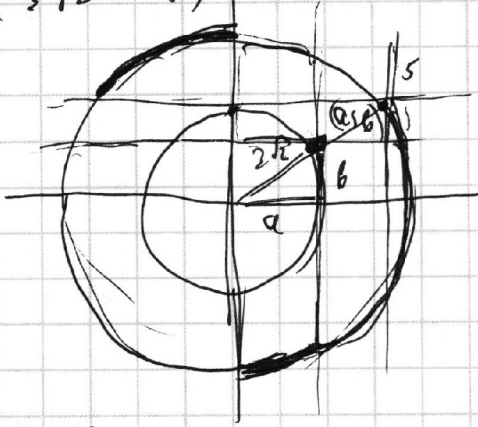
$$3\sqrt{2} \cos 2$$

$$2\sqrt{25 - 18 \cos^2 2};$$

$$2\sqrt{2} \sin 2 \quad 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 2};$$

$$\begin{aligned} &(-\sqrt{25 - 18 \cos^2 2}; 3\sqrt{2} \cos 2); \\ &(3\sqrt{2} \sin 2; \sqrt{25 - 18 \sin^2 2}); \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2}$$



$$BC = 2R \sin 2$$

$$4R^2 \sin^2 2 = 25 - 18 - 90 \cos^2 2 + 90 \sin^2 2$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 18 \\ \begin{cases} x \leq a \\ y \geq b \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq a \\ b \leq y \end{cases} \end{cases}$$

$$X = a - b + P - a - P + b \in X$$