



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = k \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \cdot k, k \in [1; 9], k \in \mathbb{Z}$$

11, 101 - простые и k на них делиться не может

$$\Rightarrow B \cdot C : 1111 \quad B \neq 1111 \text{ т.к. 3-знач } C \neq 101 \text{ т.к. 2-знач}$$

$$\Rightarrow C : 11, B : 101 \Rightarrow B = 101 \cdot l, l \in [1; 9], l \in \mathbb{Z} \text{ в } B \text{ дел-}$$

на 11 есть $1 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow B = 101$ ^{т.к. 10 · 101 не 3-знач.}

$$C = 11 \cdot t, t \in [1; 9], t \in \mathbb{Z} \text{ т.к. } 10 \cdot 11 \text{ не 2-знач.}, \text{ в } C \text{ есть } 5 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow C = 55$$

$$A \cdot B \cdot C = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 - \text{квадрат} \Rightarrow \text{единицств.}$$

уже подходит. $k = 5 \Rightarrow \begin{cases} A = 5555 \\ B = 101 \\ C = 55 \end{cases}$

$$\text{Ответ: } (A; B; C) = (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} - \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x+y+1=0, & x, y > 0 \Rightarrow \text{А} \\ xy = (x-3)(y+3) \Rightarrow 0 = 3x - 3y - 9 \end{cases}$$

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3$$

$$M = \cancel{x^3} \cdot \cancel{(x-3)^3} - \cancel{yx \cdot (x-3)} \quad x^3 - y^3 - yxy = x^3 - (x-3)^3 - yx \cdot (x-3) =$$
$$= 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \alpha = \pi x \quad \beta = \pi y$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \cdot \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\pi - \beta) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi - 2\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \pm(\pi - 2\alpha) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x - \pi y = \pm(\pi - 2\pi x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 - 2x + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3x - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = 2x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 1 - x - 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Все пары y удовлетворяющие этой совокупности подходят.

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Rightarrow \frac{x}{4} \in [-1; 1] \quad \frac{y}{9} \in [-1; 1]$$

$$\arccos t \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \geq 2\pi, \text{ только когда}$$

$$\frac{x}{4} = -1; \quad \frac{y}{9} = 1 \Rightarrow x = -4, y = 9 \text{ (такими они быть могут)}$$

Заметим, что если $x, y \in \mathbb{Z}$, то они разной

чётности, на отрезке $[-4; 4]$ 5 чётных чисел и 4

нечётных числа, а на отрезке $[-9; 9]$ 9 чётных чисел и

10 нечётных. Итого $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9$ пар, одна из которых лишняя

$$\Rightarrow \text{всего } 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность до добавления билетов:

$$P_1 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^2} = \frac{\frac{(N-2)!}{2! \cdot (N-4)!}}{\frac{N!}{4! \cdot (N-4)!}} = \frac{12}{N \cdot (N-1)}$$

Пусть добавили k билетов, тогда вероятность стала:

$$P_2 = \frac{C_{N-2}^{k+2}}{C_N^{k+4}} = \frac{\frac{(N-2)!}{(N-k-4)! \cdot (k+2)!}}{\frac{N!}{(N-k-4)! \cdot (k+4)!}} = \frac{(k+4) \cdot (k+3)}{N \cdot (N-1)}$$

По условию

$$3,5 P_1 = P_2$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{N \cdot (N-1)} = \frac{(k+4) \cdot (k+3)}{N \cdot (N-1)} \Rightarrow (k+4)(k+3) = 42$$

$$k^2 + 7k - 30 = 0$$

$$(k-3) \cdot (k+10) = 0$$

$$k \neq -10 \text{ or } k > 0 \Rightarrow k = 3$$

$$k+4 = 7$$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

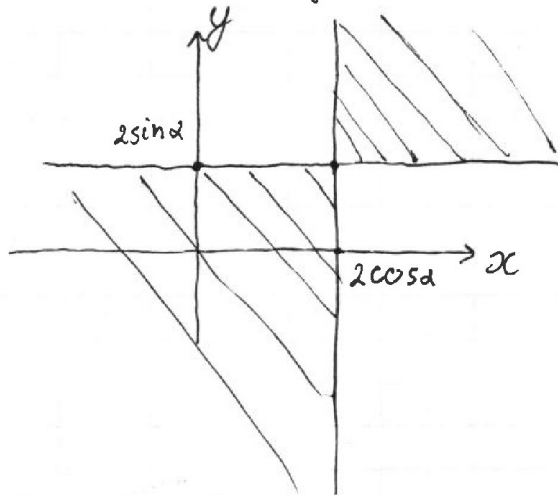
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓6

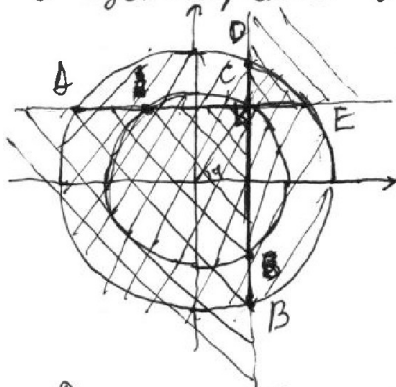
График

$$\sqrt{(x - 2\cos\alpha) \cdot (y - 2\sin\alpha)} \geq 0 \quad \text{имеет вид:}$$



Заметим, что все точки пересечения прямых $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$ лежат на окружности с радиусом 2 и центром в $(0,0)$

График $x^2 + y^2 \leq 9$ имеет вид круга радиуса 3 с центром в $(0,0)$



$$M = AE + EB + |AB| + |DE|$$

$$\text{как } \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AB \text{ — диаметр} \\ \Rightarrow |AB| = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

$$AC = 6\cos\alpha, CB = 6\sin\alpha$$

$$AC = 6\cos\alpha, CB = 6\sin\alpha, AB = 6\cos\alpha \sin\alpha$$

$$AC_{\max} = 6\cos\frac{\pi}{4} = 6\sin\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$$

$$CB_{\max} = 6\sin\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$$

$$M_{\max} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + \pi R$$

$$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow |AB| + |DE| = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} AE = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \sin \alpha\right)^2} \\ BD = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cos \alpha\right)^2} \end{cases} \begin{cases} AE = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \sin \alpha\right)^2} \\ BD = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cos \alpha\right)^2} \end{cases}, \text{ т.к. } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$AE + BD$ ~~н~~ ^е ~~максимально~~, когда C находится на прямой $y=x$ т.к. если это не так, то точку C можно поворачивать так, что один отрезок убывает медленнее, чем возрастает другой. Если C на $y=x$, то $AE = BD = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow M = 4\sqrt{5} + 3\pi$$

Ответ: $4\sqrt{5} + 3\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

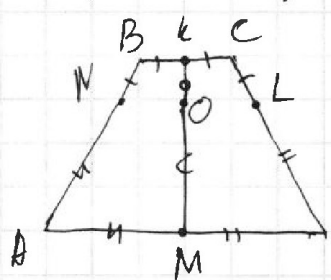
СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также будем называть расстояние от центра правильного N -угольника до стороны его высотой

Рассмотрим боковую ^{грань} ~~сторону~~ фигуры. Это $р\text{и}б$ трапеция.



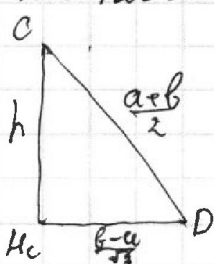
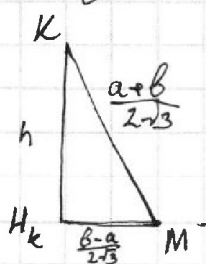
O - точка касания ω она очевидно лежит на оси симметрии и KO, O, M = высота верха и низа N -угольников

K, L, M, N - точки касания ω

$$BK = BN = KC = CL, NA = AM = MB = DL$$

KM - сумма высот N -угольников, CD - половина стороны. Заметим, что в N -угольнике высота $\angle$ половина стороны, только если $N=3 \Rightarrow \Rightarrow N=3$

Пусть $BC = a$ $AD = b$. Опустим из C, k высоты ^{ниже} CH_c и kH_k на ~~наклон~~ AD -^{мб.} $h = CH_c = kH_k$



$H_k M \perp AD; KM \perp AD \Rightarrow \angle KMH =$ исключенный угол 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = \frac{b-a}{b+a}$$

$$h^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{6} \Rightarrow \frac{b-a}{b+a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$ 45. N

$$P_r = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^k} = \frac{(N-2)!}{\frac{N!}{4! \cdot (N-4)!}} = \frac{12}{N(N-1)}$$

$$3,5 P_r = P_2$$

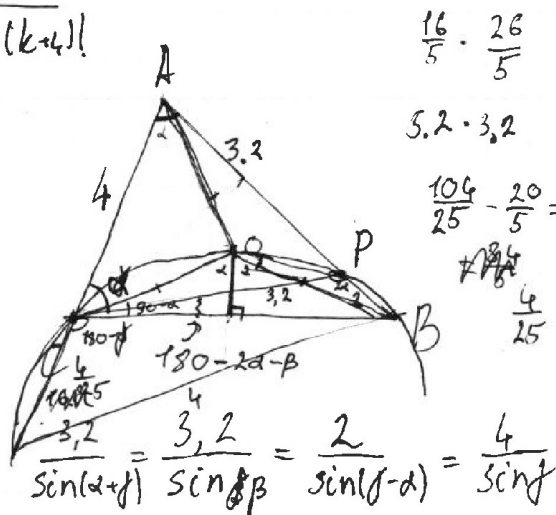
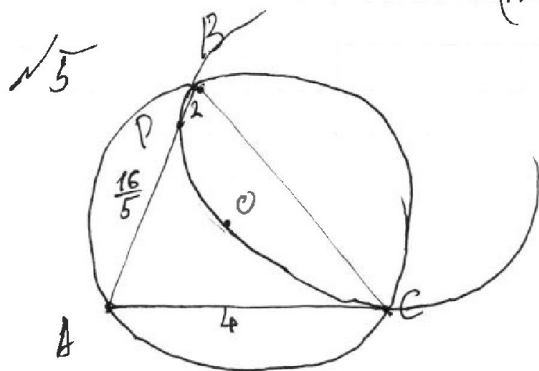
$$3,5 \cdot \frac{12}{N \cdot (N-1)} = \frac{(k+3)(k+4)}{N \cdot (N-1)}$$

$$k^2 + 7k + 12 = 42$$

$$k^2 + 7k - 30 = 0$$

$$(k-3)(k+10) = 0 \Rightarrow k = 3$$

$$\frac{C_{N-2}^{k+2}}{C_N^{k+4}} = \frac{(N-2)!}{(N-k-4)! \cdot (k+2)!} = \frac{(k+3) \cdot (k+4)}{N \cdot (N-1)}$$



$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

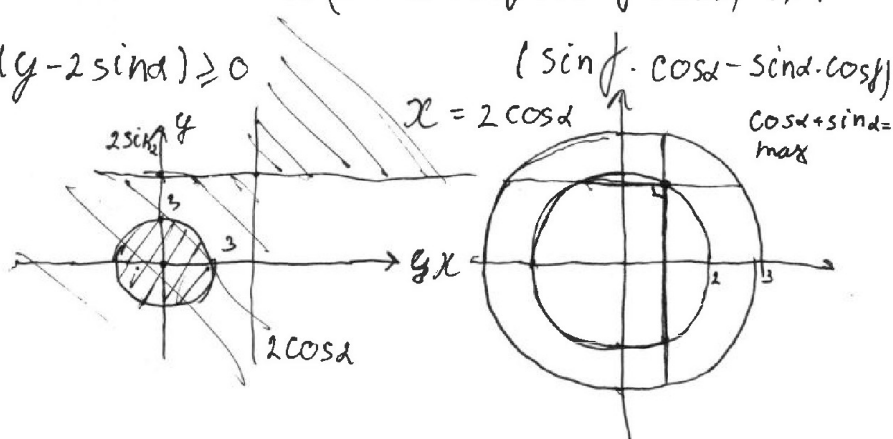
$$5,2 \cdot 3,2$$

$$\frac{104}{25} - \frac{20}{5} = \frac{4}{25}$$

$$2(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha) = 3,2$$

$\sqrt{6}$

$$\begin{cases} (x-2\cos \alpha)(y-2\sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{1} abc = \frac{t^2}{abc}$$

$$a = k \cdot 1111 = 11 \cdot 101$$

$$b = 5$$

$$b = 101$$

$$a \pm c = 55$$

$$\sqrt{2} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) \neq 0$$

$$0 = 3x - 3y - 9 \quad x - y - 3 = 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$y = x - 3$$

$$M = x^3 - (x-3)^3 - 9x \cdot (x-3)$$

$$\sqrt{3}$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \cdot \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\alpha - \beta = \pm (\pi - 2\alpha) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x - \pi y = \pm (\pi - 2\pi x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 - 2x + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3x - 1 + 2k \\ x - y = 2x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 1 - x - 2k \end{cases}$$

$$x - y = 2x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 1 - x - 2k$$

неч. x. неч. y

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \in [2\pi]$$

$$x \in [-4; 4] \quad y \in [-9; 9]$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{9} \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$



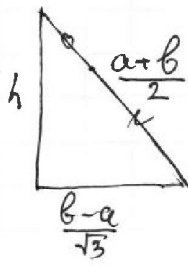
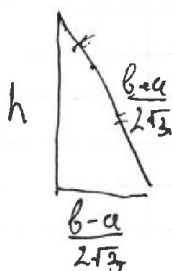
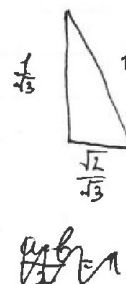
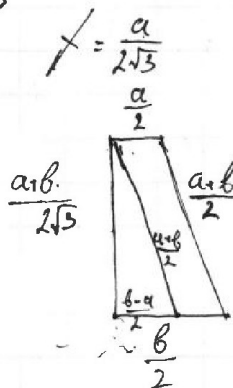
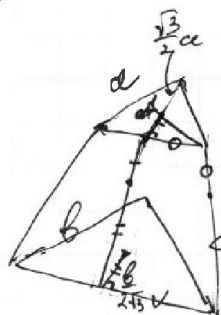
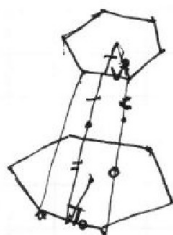
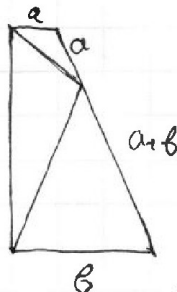
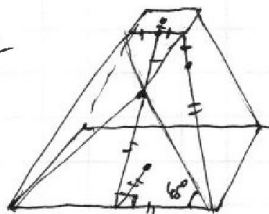
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$



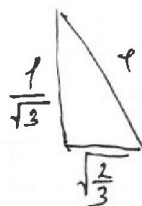
$$\frac{b+a}{b-a} = ?$$

$$\frac{(b+a)^2}{12} - \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(b+a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2}{3}$$

$$(b+a)^2 \cdot \frac{1}{6} = (b-a)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{b+a}{b-a} = \sqrt{\frac{6}{4}} =$$

$$\frac{b-a}{b+a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$





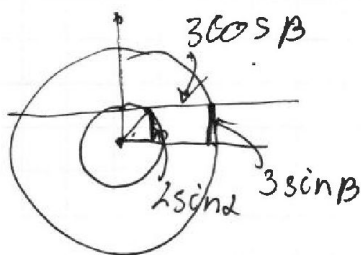
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - (x^3 - 9x^2 + 17x - 27) - 9x^2 + 17x = 27$$



$$3 \cos \beta = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{2 \sin \alpha}{3}\right)^2}$$
$$6 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \sin \alpha\right)^2}$$

$$\frac{3,2}{\sin(2\alpha)} = \frac{2}{\sin(\alpha)} = \frac{4}{\sin \alpha}$$

$$\frac{3,2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$