



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

1.  $ABC$  - палиндром  $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$

2.  $A$  - 4-значное с одинаковыми цифрами  $\Rightarrow A = 1111 \cdot x$ ,  $x \in [1; 9]$  ( $x \in \mathbb{N}$ )

3.  $ABC = x \cdot 1111$ ,  $BC = x \cdot 11 \cdot 101$ ,  $B \cdot C = n^2 \Rightarrow n : 101$  (101-кратно).

$C$  не имеет члена делителя 101  $\Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = y \cdot 101$ ,  
 $y \in [1; 9]$  ( $y \in \mathbb{N}$ )

4.  $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot y \cdot 101 \cdot C = n^2$ .  $B$  имеет цифру 6  $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6$ ,  $B = 606$ .  $x \neq 11 \Rightarrow C : 11$ , т.е.  $ABC = n^2$ .

$C = z \cdot 11$ ,  $z \in [1; 9]$  ( $z \in \mathbb{N}$ ), причем в  $C$  есть 3  $\Rightarrow z = 3$ ,  
 $C = 33$

5.  $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = n^2 = x \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2 \cdot m^2$ ,  $x \in [1; 9] \Rightarrow x = 2$  или  $x = 8 = 2 \cdot 2^2$ .

Отсюда  $(A; B; C) = (2222; 606; 33)$  или  $(A; B; C) = (8888; 606; 33)$

Ответ:  $(2222; 606; 33)$  и  $(8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$a) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}; x, y > 0$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2) + (x-2) + 5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} y+x+5=0 & ① \\ xy=(x-2)(y+2) & ② \\ x \notin \{0; 2\} \vee y \notin \{-2; 0\} \end{cases}$$

$$① \quad y+x+5=0 \Leftrightarrow y+x=-5, \text{ но } x, y > 0 \Rightarrow \text{невозможно.}$$

$$② \quad xy=(x-2)(y+2) \Leftrightarrow xy=xy-2y+2x-4 \Leftrightarrow 2x-2y-4=0$$

$$x-y-2=0 \Rightarrow x-y=2$$

$$\begin{aligned} M &= x^2 - y^2 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 + 2xy + \\ &+ 2y^2 - 6xy = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2 \cdot \\ &\cdot (x-y)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \end{aligned}$$

Ответ:  $M=8$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) + \cos \pi y \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) - \cos^2 \pi x = 0$$

$$\sin\left(\pi y + \frac{\pi}{2} - \pi x\right) - \cos 2\pi x = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi \ell, & \ell \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x + \pi y = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x - \pi y = 2\pi \ell, & \ell \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2\ell, & \ell \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решают любую пару, где  $y = (2k - x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  или  $y = (3x - 2\ell)$ ,

$\ell \in \mathbb{Z}$

$$b) \arcsin \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin \alpha + \arcsin \beta \leq \pi,$$

при этом равенство достигается только если  $\arcsin \alpha =$

$$= \arcsin \beta = \frac{\pi}{2}$$

$\arcsin$  существует  $\Rightarrow x \in [-6; 6]$  и  $y \in [-2; 2]$ . Уг





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рассуждения выше записана единственная пара —  
 $(x, y) = (6; 2)$  (именно при этой паре  $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \pi$ ). Заметим, что из решения пункта а  
выходит, что при  $x$  — чётное,  $y$  тоже чётное, а при  
 $x$  — нечётное,  $y$  — нечётное.

[Пояснение:  $2\text{к} - \text{Чёт} = \text{Чёт}$ ;  $2\text{к} - \text{Нечёт} = \text{нечёт}$ ;  ~~$3\text{к} - \text{Чёт} = \text{нечёт}$~~

$3 \cdot \text{Чёт} - 2\text{к} = \text{Чёт}$ ;  $3 \cdot \text{Нечёт} - 2\text{к} = \text{нечёт}$ ]

Т.н.  $x \in [-6; 6]$ ,  $y \in [-2; 2]$ , то  $x$  имеет 7 чётных  
значений, 6 нечётных, а  $y$  имеет 3 чётных, 1 нечётное.

Тогда пар:  $7 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 1 = 21 + 12 - 1 = 32$  пар  
(-1, т.н. убрали пару  $(6; 2)$ )

Ответ: а)  $(x, y) = (x_0; 2\text{k} - x_0)$  или  $(x, y) = (x_0; 3x_0 - 2\ell)$ ,

где  $x_0$  — любое действительное,  $\text{k}, \ell \in \mathbb{Z}$

б) 32 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$n$  - количество учеников ;  $x$  - добавленное к концу месяца количество билетов.

$$p(\text{П и В попадут в начало месяца}) = p(\text{П и В начало}) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$p(\text{П и В попадут на конец месяца}) = p(\text{П и В конец}) = \frac{C_{n-3}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-3-x)}{(2+x)!} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-3-x)}{(4+x)!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

Из условия:  $6 \cdot p(\text{П и В начало}) = p(\text{П и В конец})$

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$$6 \cdot 4 \cdot 3 = (4+x)(3+x) = 12 + 3x + 4x + x^2$$

$$x^2 + 7x + 12 - 72 = 0$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$(x+12)(x-5) = 0$$

$$\begin{cases} x = -12 \\ x = 5 \end{cases}$$

Т.к. билетов добавили  $\geq 1$ , то  $x > 0 \Rightarrow \Rightarrow x = 5$

В конце месяца имеет  $4+x = 4+5 = 9$  билетов

Ответ: 9 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☒

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{по сумме углов: } \angle PH_P C = 180^\circ - \angle H_P P C - \angle H_P C P = \\ = 180^\circ - \beta - (\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

$\angle OH_P C = 90^\circ \Rightarrow H_P$  - середина  $AC$  (ср. пер.  $AC$  проходит через  $O$ ). Тогда  $AH_P = \frac{AC}{2} = 17,5$

Получим высоту  $BH$  в  $\triangle ABC$ . По подобиям

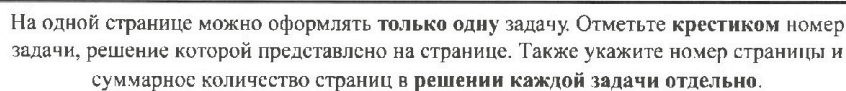
$$\triangle ABH \sim \triangle APH_P \text{ (по 2 угла)} : BH : PH_P = BA : PA = \\ = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

$$PH_P = \sqrt{25^2 - 17,5^2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{\frac{6}{5} PH_P \cdot 35}{2} = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{25^2 - 17,5^2} = \\ = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot (10^2 - 7^2)} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{2} \sqrt{51} = \\ = 52,5 \sqrt{51}$$

Ответ:  $52,5 \sqrt{51}$ .

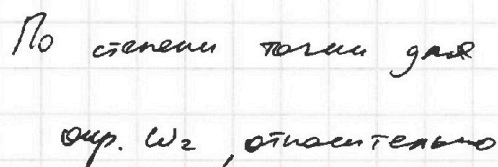




7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 35.$$


т.А:  $AP \cdot AB = AC \cdot x$

3е х - расчетные данные

AC, где AC пересечет  $\omega_e$

$$x = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{150}{7} < 35 \Rightarrow T.D \in AC, \text{ too}$$

$$AD = x, \quad \omega_2 = (\beta \rho O D C)$$

2) 0-yeyp on. oap.  $\triangle ABC$ :  $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ ;  $\angle OAC =$   
 $= \angle OCA = \beta$

Из равнобедренности:  $\angle PBO = \angle PCO = \alpha$ ;  $\angle OPC = \angle OBC = \gamma$

$\angle BOC = 2 \angle BAC$ , т.к. центральный угол в окр.  $\omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = 2(\alpha + \beta)$ . Попробуй перпендикуляр из  $O$  на  $BC$

(основание - т.  $H_0$ ). Тогда, т.к.  $\triangle BOC$  р/с, то  $\angle BOH_0 =$

$$\Rightarrow \angle COH_0 = (\alpha + \beta) ; \quad \angle OH_0B = 90^\circ$$

Из  $\triangle OK_0B$  получаем, что  $(\alpha, \beta) + \gamma = 90^\circ$

Если продлить  $PO$  до пересечения с  $AC$  (т.  $H_p$ ), то в  $\triangle PCH_p$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13^2 - 50 \sin^2 \beta, 13^2 - 50 \cos^2 \beta > 0. \text{ Тогда надо}$$

$$\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} = \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$13^2 - 50 \sin^2 \beta = 13^2 - 50 \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \beta = \cos^2 \beta, \quad \beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin \beta = \cos \beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

Итак, max достигается при  $\beta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} M &= 13\pi + 2 \left( \sqrt{13^2 - 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{13^2 - 50 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right) = \\ &= 13\pi + 4 \sqrt{169 - 25} = 13\pi + 4 \cdot \sqrt{144} = 13\pi + 4 \cdot 12 = \\ &= 48 + 13\pi \end{aligned}$$

Достигается при  $\beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Также достижимо при симметричных отн. оси  $x$  или  $y$ , т.е.

$$\beta = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \beta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \beta = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$\text{Итого: } \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \beta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \beta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ \beta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \xrightarrow{\text{вероятно } \alpha} \begin{cases} \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = \beta - \pi} \text{ Ответ: } M = 48 + 13\pi;$$

$$\alpha \in \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно решать в условиях  $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , ~~т.е.~~ (в первом квадранте), т.е. решения, достигающие макс. значения  $M$  — это симметричные относительно оси  $x$ , или  $y$ , или обеих сразу осями.

Зашифрованные области на картинке — наша фигура  $\Phi(\alpha)$ . Сначала посчитаем длину дуг  $ABC$  и  $DE$ .

$BCEF$  — параллелограмм  $\Rightarrow \angle BCF = \angle EFC$ .  $\triangle ADD$  — равнобедренный  $\Rightarrow \angle ADB = \angle BDC$ . Тогда  $\angle ABC + \angle CDE = \angle ABD + \angle BCF + \angle CDE = \angle BDC + \angle CDE + \angle EFC$  — попарно равны. Длина =  $\pi \cdot 13$ .

Остаток посчитаем  $AO + OX + OD + OE$ . Это тоже, что

$$2(AO_y + CO_x)$$

$$AO_y = \sqrt{13^2 - (55 \sin \beta)^2}; \quad CO_x = \sqrt{13^2 - (55 \cos \beta)^2}$$

$$\max(2AO_y + 2CO_x) = 2 \max(\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} + \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta})$$

$$f(\beta) = \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} + \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$f'(\beta) = \frac{-50 \cdot 2 \sin \beta \cos \beta}{2 \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} + \frac{-50 \cdot 2 \cos \beta (-\sin \beta)}{2 \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}} = \frac{50}{2} \sin(2\beta) \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} \right) = 0 \quad (\text{где поиска макс})$$

$$1) \sin(2\beta) = 0, \quad \beta \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} - \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}}{\sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta} \cdot \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

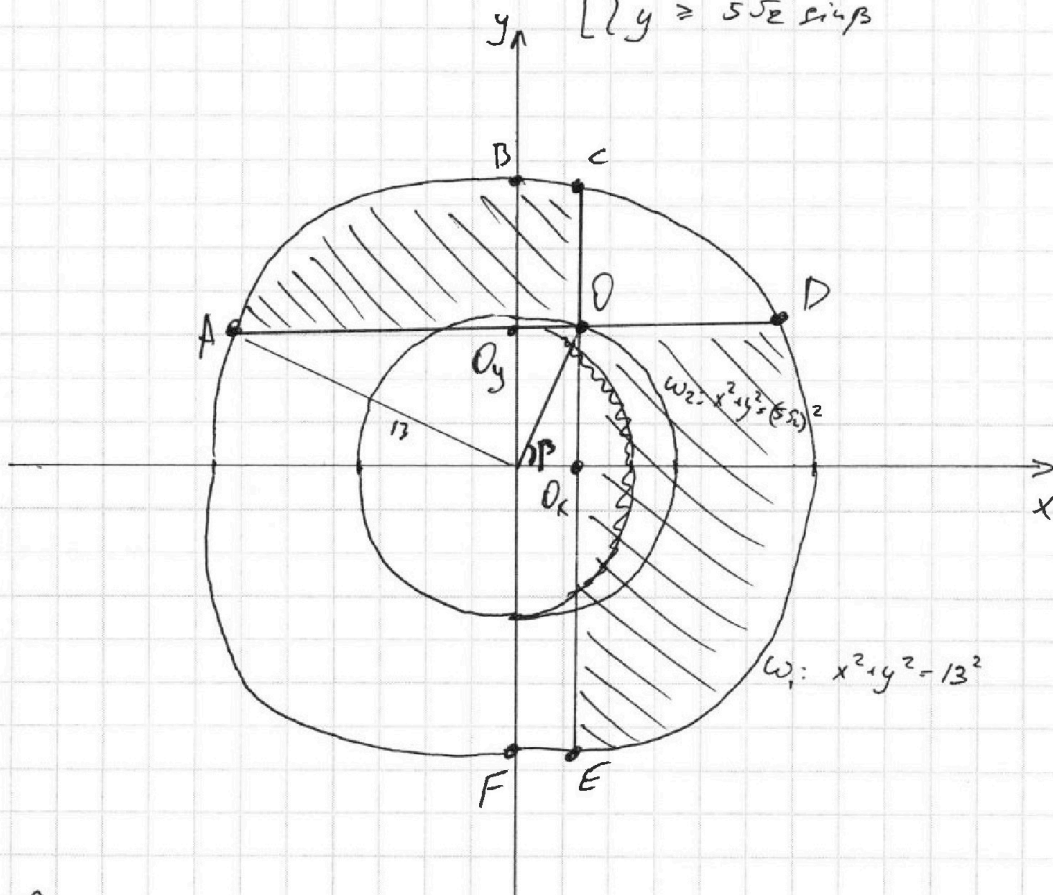
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 165 \end{cases}$$

Изобразим решение данной системы на графике.

$$\beta = \pi + \alpha : \cos \beta = -\cos \alpha ; \sin \beta = -\sin \alpha$$

Решение первой уравнения:

$$\begin{cases} x \geq 5\sqrt{2} \cos \beta \\ y \leq 5\sqrt{2} \sin \beta \\ x \leq 5\sqrt{2} \cos \beta \\ y \geq 5\sqrt{2} \sin \beta \end{cases}$$



Получим окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  радиуса 13 и  $5\sqrt{2}$  соотв.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} + \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta} = f(\beta) \quad \beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(\beta) = \frac{-50 \cdot 2 \sin \beta \cos \beta}{2 \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} + \frac{-50 \cdot 2 \cos \beta \cdot (-\sin \beta)}{2 \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}} = 50 \sin \beta \cos \beta$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta}} \right) = 0 \quad \boxed{2\beta = \frac{\pi}{2}} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} - \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$\sqrt{13^4 - 13^2 \cdot 50 \cos^2 \beta + 50^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta} = 0$$

$$\sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} = \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$50 \sin^2 \beta = 50 \cos^2 \beta \quad \sin^2 \beta = \cos^2 \beta \quad \sin \beta = \cos \beta \quad \beta = \frac{\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$PH = \sqrt{25^2 - 17,5^2}$$

$$\sin \pi y = \cos(\frac{\pi}{2} - \pi x)$$

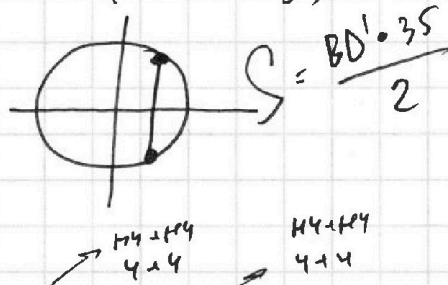
$$BD' = \frac{6}{5} \cdot PH$$

$$\sin \pi y \cos(\frac{\pi}{2} - \pi x) + \cos \pi y \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x) = \sin(\pi y + \frac{\pi}{2} - \pi x) = \cos^2 \pi x -$$

$$- \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - (\pi x - \pi y)) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$



$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = -\pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \rightarrow y + x = 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x = \pi y + 2\pi l, & l \in \mathbb{Z} \rightarrow 3x + y = 2l, & l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

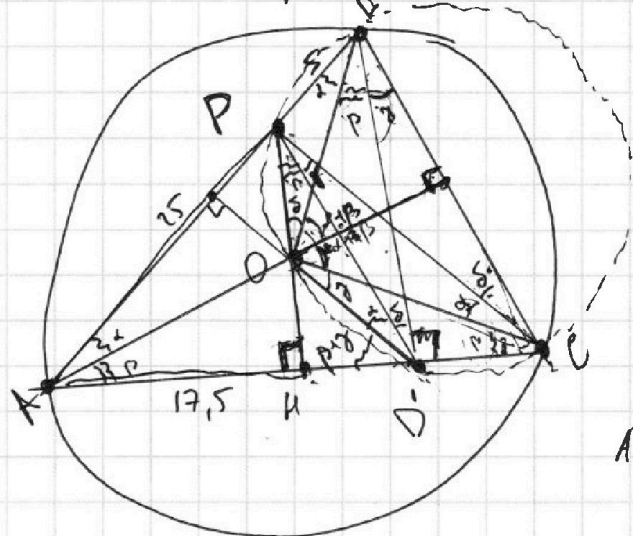
$$2H4 \quad 3y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\text{Зарег. координаты: } (x, y) = (6; 2)$$

$$6H4 \quad 7x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\arccos \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$3 \cdot 7 + 6 \cdot 2 - 1 = 21 + 12 - 1 = 32$$



$$\frac{AD}{AP} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AC}$$

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 90^\circ - 2\beta$$

$$2\alpha + \beta + \delta = 90^\circ$$

$$AP:PB = AH:HD' = 5:1$$



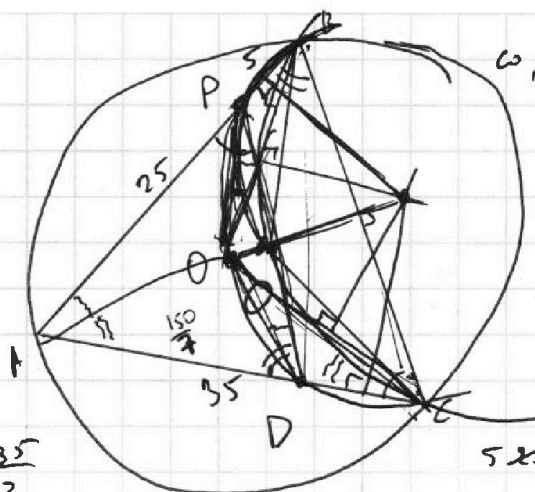
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7



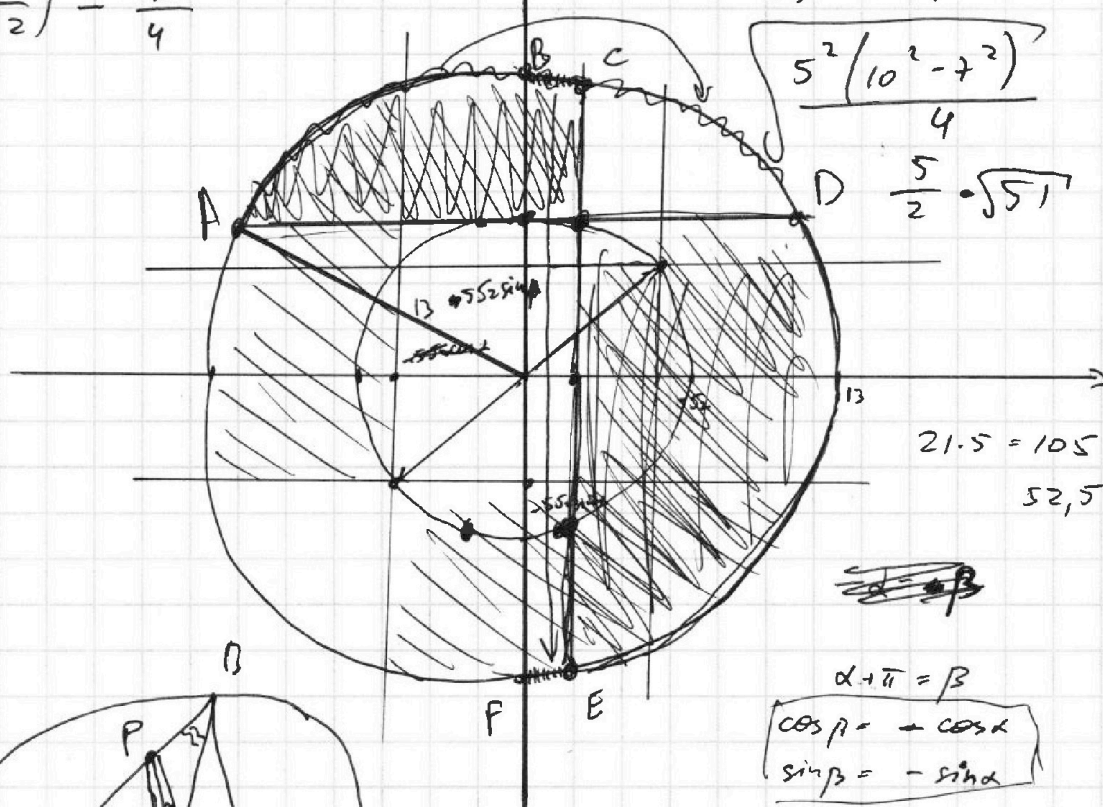
$$\begin{aligned} 2 \cdot 35 &= 245 \\ 3(3+11) &= 480 \\ 3+11 &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17,5 & \quad \frac{35}{2} \\ \left(\frac{50}{2}\right)^2 &= \frac{35^2}{4} \end{aligned}$$

$$5 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \frac{35}{7} \cdot x \quad x = \frac{150}{7}$$

$$CD = 25 - \frac{150}{7} = \frac{95}{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5^2(10^2 - 7^2)}{4} \\ &\frac{5}{2} \cdot \sqrt{51} \end{aligned}$$

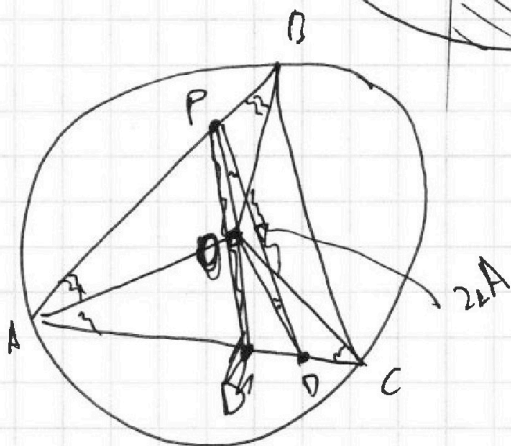


$$\begin{aligned} 21,5 &= 105 \\ 52,5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha + \pi &= \beta \\ \cos \beta &= -\cos \alpha \\ \sin \beta &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 2 \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 \beta} + 2 \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 \beta} + \\ &+ \frac{\pi \cdot 13}{\cos \alpha} \end{aligned}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 \cdot x \quad x \in [1; 9]$$

11 · 101 - простое

$$ABC = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot x \cdot B = n^2 \quad n:101$$

$$B:101$$

$$B = 101 \cdot y \quad y \in [1; 9] \quad B - \text{закруга } B \Rightarrow B = 6 \cdot 101$$

$$x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot C = n^2 = 101^2 \cdot n_2^2$$

$$C:11 \quad 3\text{-закруга } C \quad C = 33$$

$$x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \quad x = 2 \text{ или } 8$$

$$\begin{matrix} 8888; 606; 33 \\ 2222; 606; 33 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2) + (x-2) + 5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x+y+5=0 \rightarrow x+y=-5 \quad [?] \\ xy = (x-2)(y+2) = xy - 2y + 2x - 4 \rightarrow x-y-2=0 \end{cases} \quad x-y=2$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy \quad 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x-y)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$n \text{ 33-классическое} \quad P_n(P_n B) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

(4+x) биномов

$$P_n(P_n B) = \frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot (n-3-x)}{(2+x)!}}{\frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-3-x)}{(4+x)!}}$$

$$P_n(P_n B) = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$$P_n(P_n B) = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3}{4(4-1)} = \frac{(4+x)(3+x)}{4(4-1)} \rightarrow 72 = 12 + 3x + 4x + x^2$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$5+4=9$$