



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

$$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad (a \in \{1; 2; \dots; 9\})$$

$$B = \overline{bc1} \text{ или } \overline{1bc} \text{ или } \overline{b1c}$$

глубина $\Rightarrow \leq 100$
 $\Rightarrow \nmid 101$

$$C = \overline{d5}, \overline{5d}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2, k \in \mathbb{N}$$

Заметим, что для того чтобы $A \cdot B \cdot C$ было полным квадратом при усл., что

$$A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad (a \in \{1; 2; \dots; 9\})$$

↑ ↑
простые

$B \cdot C$ хотя бы $11 \cdot 101$, но $A \cdot B \cdot C$ всегда имеет одну цифру 4, то

$C: 11 \Rightarrow$ т.к. в C есть хотя бы 1 "5"
то $C = 55$

Пусть $A = 1111 = 11 \cdot 101$

$$\Rightarrow C: 11 \Rightarrow C = 55$$

$B: 101 \rightarrow 1) B = \overline{1bc} \Rightarrow B = 101$

2) $B = \overline{b1c} \Rightarrow B = 101$

3) $B = \overline{bc1} \Rightarrow B = 101$

Если $C = 55$,
нам нужно, чтобы в $A \cdot B$ было "чет" кол-во пятёрок.

т.к.
 $B: 101$
 $B = \overline{1bc}$ или $\overline{b1c}$
 $\Rightarrow$ равнов. трёхзнач. число $\Rightarrow B = 101$

$A = 5555 = 5 \cdot 11 \cdot 101$
 $B = 101$
 $C = 55 = 5 \cdot 11$

$\Rightarrow (5555; 101; 55) (+)$

$A = 9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$
 $B = 101$
 $C = 5$

Ответ: (5555; 101; 55)

11 (11)
22 (11)
33
44
55
66
77
88
99

$C = 55$

101 (101)
202
303
404
505
606
707
808
909

$B = 101$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12 $xy > 0$ $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{x+y+1} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow xy + 3x - 3y - 9 = xy \Rightarrow x - y = 3 \quad \begin{matrix} x \neq 3 \\ y \neq -3 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

Найти: $M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$
 $= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy = 3(3xy + 9) - 9xy =$
 $\boxed{27}$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

д).

$$\begin{cases} y < \frac{9}{4}x \\ x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \\ y \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ y &= -x + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 + 2n < \frac{9}{4}x \\ -x + 1 + 2k < \frac{9}{4}x \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

при четных x и y будут четные
при нечет. $x \Rightarrow y$ - нечетные

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x < 1 - 2n \\ \frac{1}{4}x > 2k + 1 \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} - \frac{8}{3}n \\ x > \frac{8}{3}k + \frac{4}{3} \end{cases} (*)$$

$$x < \frac{4}{3} - \frac{8}{3}n \Rightarrow -1 \leq n \leq 1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{-1; 0; 1\}$$

Пусть $x=4 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 2n \\ y = 3 + 2k \end{cases}$
 $y \in \{-9; \dots; 9\}$
 $y < 9$
 $x=3$
 $y \in \{-9; \dots; 9\}$

можно получить все нечет. y

9 - кан-то
напр
удовл.

$$\begin{cases} x=3 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \\ y < \frac{9}{4}x = 6\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 + 2n \\ y = 2 + 2k \end{cases}$$

можно получить четные $y < 6\frac{3}{4}$

8

$$\begin{cases} x=2 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \\ y < 4\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 + 2n \\ y = -1 + 2k \end{cases}$$

7

$$\begin{cases} x=1 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \\ y < 2\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

6

$$\begin{cases} x=0 \\ y < 0 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow$$

5

$$\begin{cases} x=-1 \\ y < -2\frac{1}{4} \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow$$

4

$$\begin{cases} x=-2 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \\ y < -4\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

3

$$\begin{cases} x=-3 \\ y < -6\frac{3}{4} \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow$$

2

$$x=-4 \Rightarrow$$

1

д) Ответ: 43 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$\Rightarrow -\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\Rightarrow \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$



!
 $(t, 3t-1) \in \mathbb{R}$
 $(k, -k+1) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \pi - 2\pi x &= \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2\pi x &= \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow$$

a) $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} & (1) \\ y = -x + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$

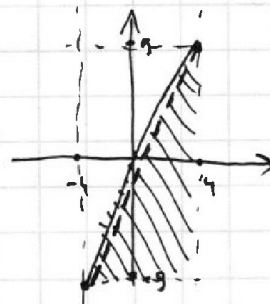
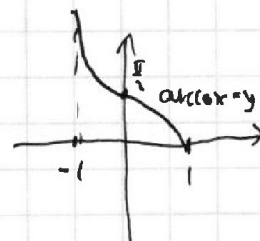
$$\cos(\arccos t) = t, t \in [-1; 1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ (\sin \pi x - \sin(3\pi x - \pi + 2\pi n)) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos(3\pi x - \pi + 2\pi n)) \cos \pi x \\ \Rightarrow y &= 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ (\sin \pi x + \sin 3\pi x) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos 3\pi x) \cos \pi x \end{aligned}$$

б).

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{9} \in [-1; 1] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{9} \in \cos(2\pi - \arccos \frac{x}{4}) \\ &\Rightarrow \frac{y}{9} < \frac{8}{9}x \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

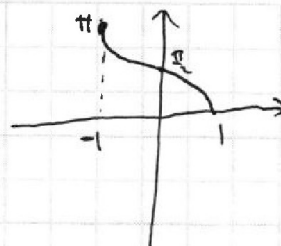
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Leftrightarrow \text{нельзя}$$

$$x \in [-4; 4] \quad f = \arccos \frac{x}{4} \quad E(f) = [0; \pi]$$

$$y \in [-9; 9] \quad g = \arccos \frac{y}{9} \quad E(g) = [0; \pi]$$



$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

не могут одновременно быть $(-4; -9)$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y \in \{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y \in \{-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \end{cases} \quad (9)$$

...

при чет. x будут купаться все четные $y \in [-9; 9]$

при четных x будут купаться все чет. $y \in [-9; 9]$, кроме точки $(-4; -9)$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10 \cdot 9 = 85 \text{ пар}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\begin{cases} 4 \text{ билета} \\ n \text{ людей в классе} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+k) \text{ билетов}, k \geq 1 \\ n \text{ людей} \end{cases}$$



Распределение 4 билетов на n людей $\Rightarrow$

$$C_n^4$$

в начале мес.

$$p_1 = \frac{12}{n(n-1)}$$

$\rightarrow$

в конце мес.

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_{n-4}^{k+4}} =$$

и у перш, и у вторш дво билета $\Rightarrow$ в кінці

$$= \frac{(n-1)! (n-k-1)! (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{(k+1)! (n-k)! \cdot n(n-1)} \Rightarrow p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! (n-1)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 4!}$$

$$\rightarrow 3,5 p_1 = p_2$$

$$\frac{42}{n(n-1)} = \frac{(k+4)(k+3)}{n(n-1)} \Rightarrow k=3$$

$$= \frac{(n-2)! (n-1)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 2 \cdot n(n-1)}$$

Ответ: всего было выдано 7 билетов в конце мес.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

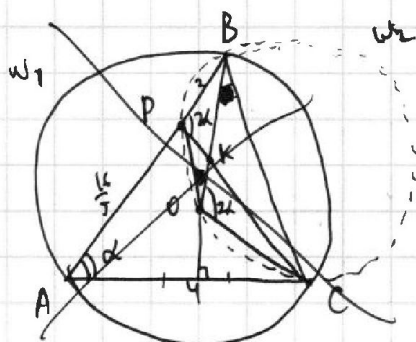
ОТ

$S_{ABC} = ?$

$AP = \frac{16}{5}$

$BP = 2$

$AC = 4$



$$\frac{PK}{KO} = \frac{BK}{KC}$$

O - центр ω_1

$\Rightarrow \angle BOC$ - центр.

3). По т. косинусов для $\triangle APC$:

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \left(\begin{array}{l} \triangle \text{ остроу.} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

1) Пусть $\angle BOC = 2\alpha$ (центральный в ω_1)

$\Rightarrow \angle BAC = \alpha$ (впис. отпр. на ту же дугу, что и центр в ω_1)

2). $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (впис. отпр. на одну дугу в ω_2)

$\Rightarrow \angle APC = \angle ACP = 2\alpha - \alpha = \alpha$ ($\angle BPC$ - внешний для $\triangle APC$)

$\Rightarrow \triangle APC$ - р/б по 2 углам.

$\Rightarrow PC = 16/5$

$$\left[\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{13\sqrt{39}}{10} \right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

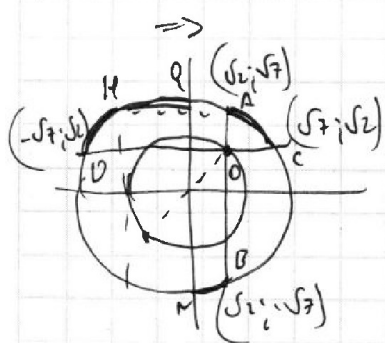
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16) Проверим, что $P_{\max}$ будет при $\cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



$\vec{DA} = \vec{AC}$
 $\vec{HQ} = \vec{MB}$ (векторы см.)

$$\Rightarrow P = \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{AC} + \vec{DB} =$$

$$= \vec{DC} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{DB} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\pi$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{2} + \vec{AC} + \vec{DB} = \\ &\text{Ответ: } P_{\max} = 4\sqrt{2} + 3\pi, \\ &\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

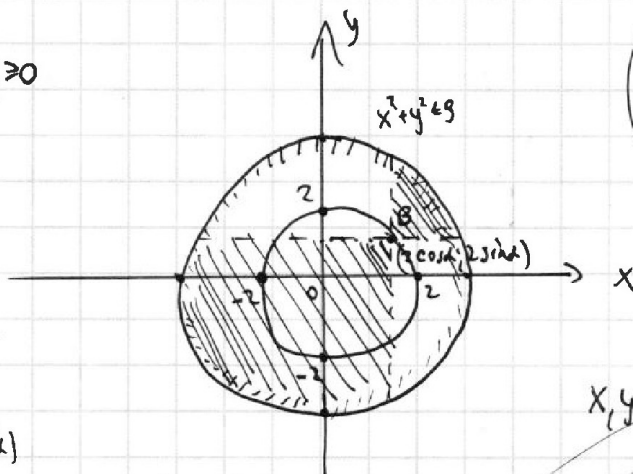
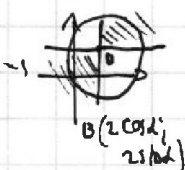
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2\cos\alpha \in [-2; 2] \\ 2\sin\alpha \in [-2; 2] \end{cases}$$

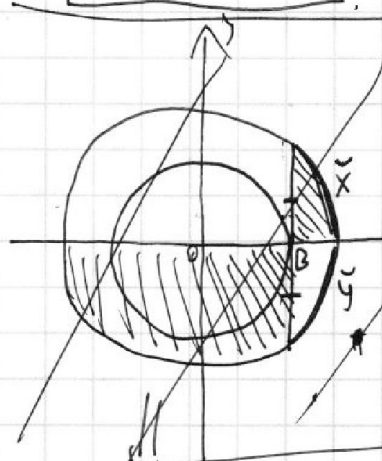
$$x, y: x^2 + y^2 = 84$$

$$P(0; B) = 2$$

$$\begin{cases} y = 2\sin\alpha \\ x^2 = 9 - 4\sin^2\alpha \\ x = 2\cos\alpha \\ y^2 = 9 - 4\cos^2\alpha \end{cases}$$

Все возможные (т. В) лежат на окр. с центром в (0;0) и R=2

$$P = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$



$$P = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

в симметрии
дуга x равна y.
= диаметр
дуги по окр.

Рассмотрим крайн. (т. В)
с координатами (2 cos alpha, 2 sin alpha)

по т. пересек. хорд ax:

$$a \cdot b = c \cdot d$$

$$\Rightarrow (\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2\cos\alpha)(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} - 2\cos\alpha) = (\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\sin\alpha)(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} - 2\sin\alpha)$$

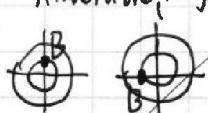
$$a \cdot b = c \cdot d = 5 \quad \begin{matrix} \text{max} \\ a+b=6, \text{ min } c+d=6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a+b \rightarrow \text{max} & a+\frac{5}{a} \rightarrow \text{max} \\ c+d \rightarrow \text{max} & c+\frac{5}{c} \rightarrow \text{max} \end{cases}$$

ОПТИМУМ, КОГДА

$$\text{или } \begin{cases} a=\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} c+d=6 \end{cases}$$

Аналогично, когда



(в симметрии)

$$P_{\text{max}} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6, \text{ при } \begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{cases}$$

т.е.

$$\text{Ответ: } P_{\text{max}} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6, \text{ при } \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

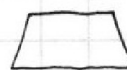
№7

$O_1 \in SO$
 $OO_1 \perp (ABC)$ пирамида

Пусть K - центр ω
 F - центр Ω

т.к. ω кас. всех граней усеч. пирамиды $\Rightarrow \omega \cap (ABC) = O$

$\omega \cap (DEF) = O_1$



$\Rightarrow$ центр ω лежит на $[OO_1]$: $KO = KO_1$

$\Rightarrow F = K$

• Ω кас. всех ребер $\Rightarrow$ центр Ω лежит на $[OO_1]$: $FO = FO_1$

$BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ Пусть $KO = x$

$ON = \frac{4\sqrt{3}}{6}$

$$BO = \sqrt{4x^2 + \frac{a^2}{3}}$$

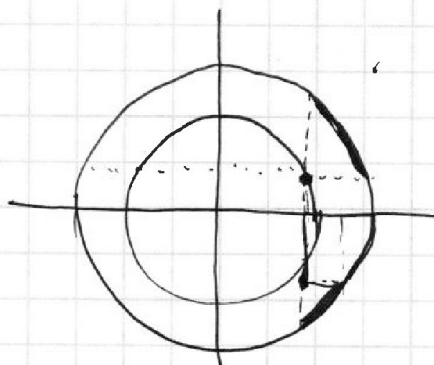


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin(\arccos \frac{x}{5})$$

$$\cos \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{9} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{81-y^2}}{9} < 1$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$xy - \sqrt{16-x^2} \cdot \sqrt{81-y^2} \geq 36$$

$$x^2 y^2 - 72xy + 36 \leq 16 \cdot 81 - 16y^2 - x^2 \cdot 81 + x^2 y^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(4y - 9x)^2 \leq 0$$

$$4y = 9x$$

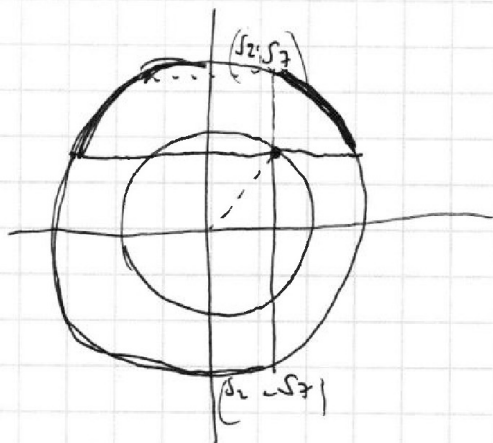
$$y = \frac{9x}{4}$$

$$\frac{9x}{4}$$

$$(5000)^2$$

$$2500 + 600 + 36$$

$$3136$$



$$2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{7}$$

$$36 + 20 + 24\sqrt{5} \vee 16 \cdot 7$$

$$56 + 24\sqrt{5} \vee 112$$

$$24\sqrt{5} \vee 56$$

$$24 \cdot \frac{7}{3} \vee 56$$

$$\frac{7}{3}$$

$$(2\frac{1}{3})$$

$$2980$$

$$(107 - 52)$$

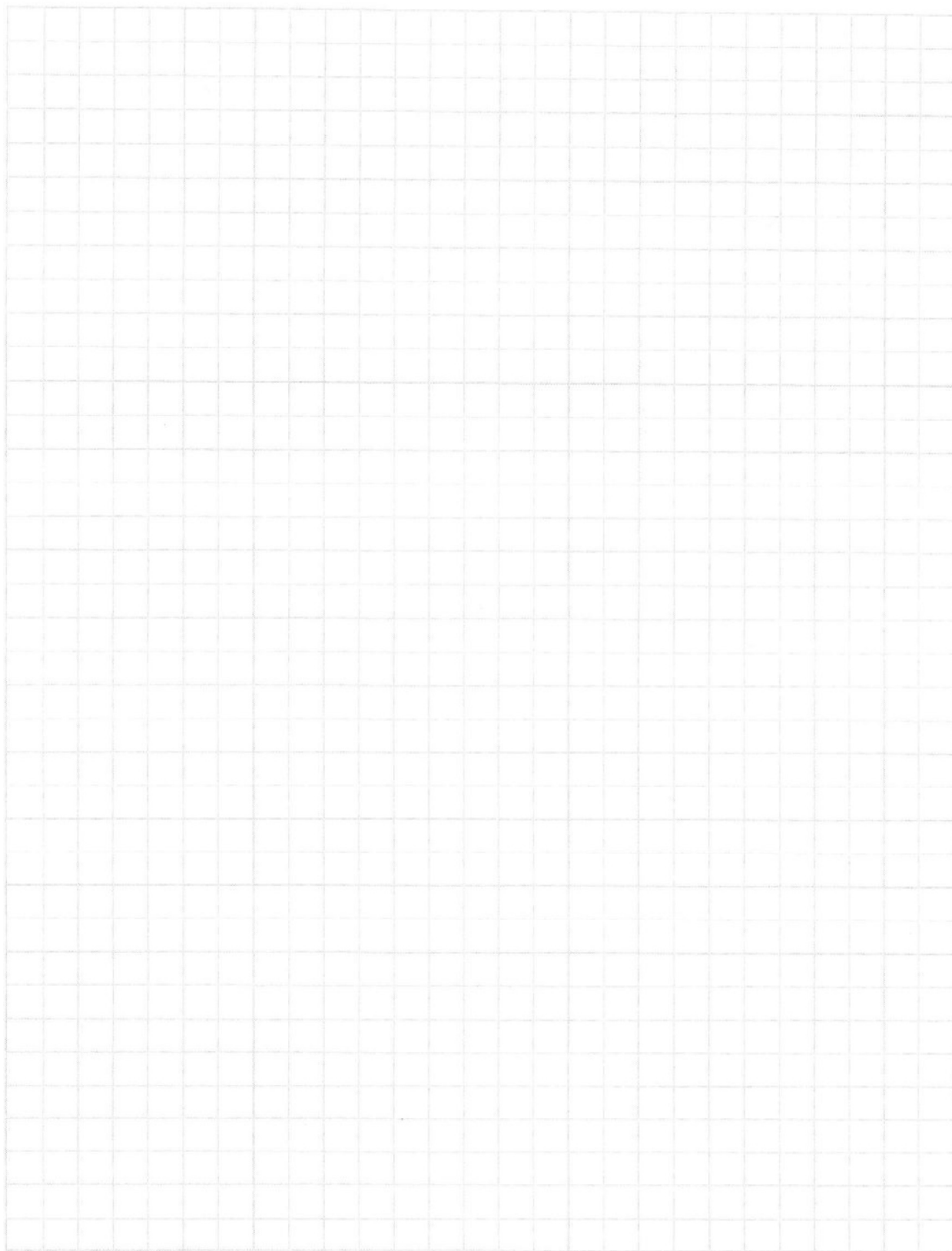


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

