



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) A = 2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$$

Аналогично с (1).

$$\left. \begin{array}{l} B = 606 \\ C = 33 \end{array} \right\} \text{— всевозм. варианты}$$

$$ABC = 2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = \\ = 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 11^2 \text{ — перм. кв.}$$

3) Заметим, что число ABC делится на 2, значит, число A делится на 2 либо в степени 1, либо в степени 3. (в 5 раз не делится, т.к. A число не будет. Проверка закончена.)

$$\Rightarrow \text{расшир } A = 8888 = 2^3 \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = 606$$

$$C = 33$$

$$ABC = 2^3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = \\ = 2^4 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \text{ — перм. кв.}$$

Вывод: $(2222; 606; 33), (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $A = 1111$ № 1.
 $A: 1111 = 11 \cdot 101$ — разделили на произв.

Т.к. ABC — квадрат \Rightarrow его площадь
является полным сумм. в четной
степени.

\Rightarrow среди $B \cdot C$ полный сумм.
является 11 и 101 .

Очевидно, что 101 не может быть
является (т.к. это двузначное).

\Rightarrow 101 явл. является B .

Но 11 также не может явл. явл.

B , т.к. $101 \cdot 11$ уже не трехзначное.

\Rightarrow 11 явл. явл. C .

Но уже в B есть две одинаковые цифры 6.

Такое число 606 — единственное: 101 .

Аналогично C может быть только 33 .

Проверим: $ABC = 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$
 $= 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2$ — не явл. перм. кв.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x+2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} + 2x - 2y - 4$$

$$y = x - 2, \quad x > 2, \quad \text{и } y \geq 0$$

$$x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

\Rightarrow выражение принимает только одно значение — 8

Ответ: {8}



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi. \quad -6\pi \leq x \leq 6\pi.$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2k - x. \end{cases}$$

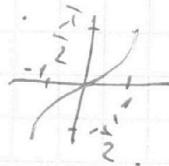
$$-2\pi \leq 3x - 2\pi \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} y = \pi - 3x. \\ \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{3x - 2\pi}{2} \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2k - x. \\ \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{2k - x}{2} \leq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$E_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



\Rightarrow

$$\begin{cases} \frac{x}{6} \neq 1 \\ \frac{3x - 2\pi}{2} \neq 1 \\ \frac{2k - x}{2} \neq 1 \\ -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{3x - 2\pi}{2} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{2k - x}{2} \leq 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 .

(a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y - (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) - \cos 2\pi x = 0$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$3\pi x - \pi y = 2\pi n$$

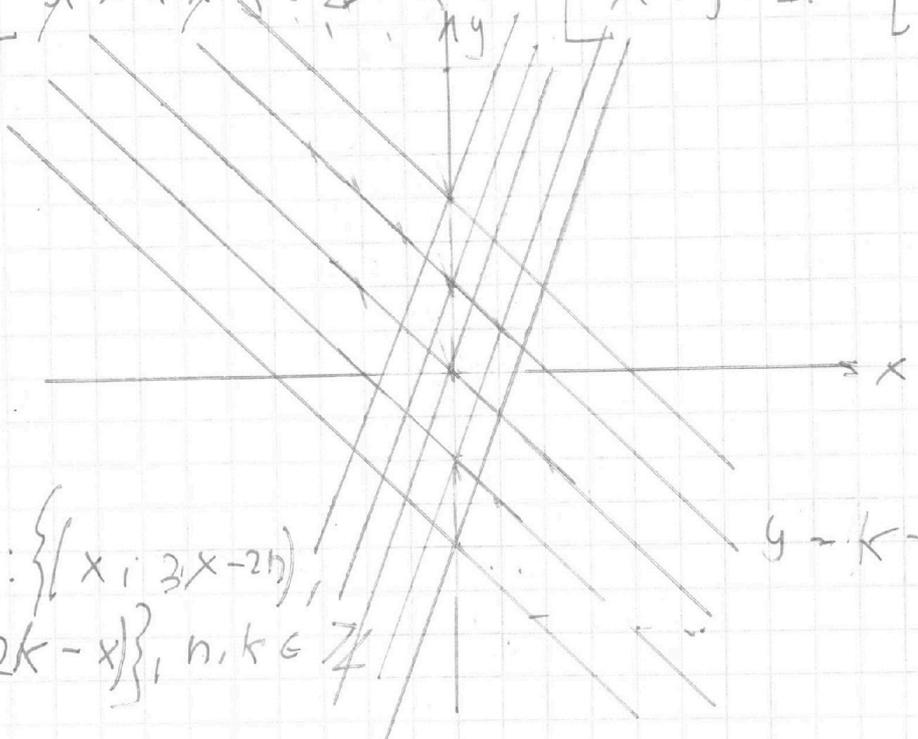
$$\pi x + \pi y = 2\pi k$$

$$3x - y = 2n$$

$$x + y = 2k$$

$$y = 3x - 2n$$

$$y = 2k - x$$



Ans: $\{(x, 3x - 2n),$

$(x, 2k - x)\}, n, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть n - кол-во элементов. $n > 1$.

a - элементов в конце месяца.

Вероятность оказаться в конце в нач.

мес: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$.

В конце мес: $\frac{a}{n} \cdot \frac{(a-1)}{n-1}$

$$\frac{\frac{a}{n} \cdot (a-1)}{n-1} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \cdot 6, \quad n > 1$$

$$a^2 - a - 72 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 9 \\ a = -8 \end{array} \right.$$

$$a = -8$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 9 \\ a = -8 \\ a > 0 \end{array} \right\}$$

$$a = 9$$

Ответ: 9.

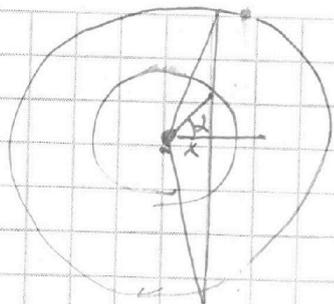


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$L_1 = 2\sqrt{R^2 - x^2}, \text{ где } x = r \cos \alpha.$$

$$L_2 = 2\sqrt{R^2 - y^2}, \text{ где } y = r \sin \alpha.$$

$$\Rightarrow P_{\text{guard}}(\alpha) = L_1 + L_2 = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$P'_{\text{guard}}(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} \cdot 100 \sin \alpha \cos \alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} \cdot 100 \sin \alpha \cos \alpha \right) =$$

$$= 2 \cdot 50 \cdot \sin 2\alpha = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} \right)$$

Нули производной

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \end{cases}$$

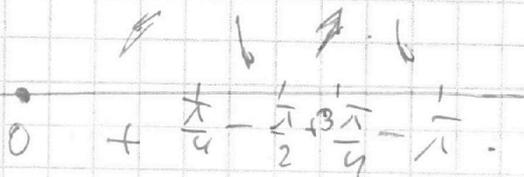
$$\begin{cases} 2\alpha = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin \alpha = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$$

$$T = \pi$$

Решим на

$[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$



$$P'_{\text{guard}}\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \text{m. max.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

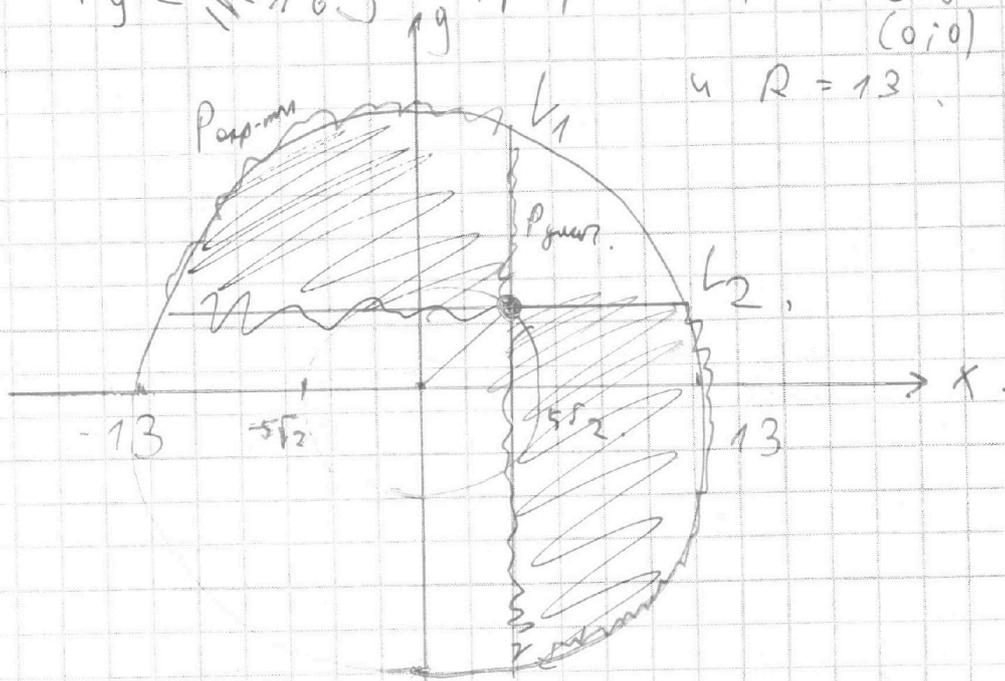
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) = 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

График — окруж. с ц. в м. (0;0) и R = 13.



Заметим, что графиком пер-ва (1) явл. 2 области, окр. прямыми. $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$
 $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$.

прям. перес. м. $(-5\sqrt{2} \cos \alpha; -5\sqrt{2} \sin \alpha)$, радиусы $\in \omega$ с ц. в м. (0;0) и $r = 5\sqrt{2}$.

Максимизируем периметр. $P_{\text{обл}} = P_{\text{ар-мм}} + P_{\text{угла?}}$.

$$P_{\text{ар-мм}} = \text{const} = \pi R.$$

$$P_{\text{угла?}} = l_1 + l_2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

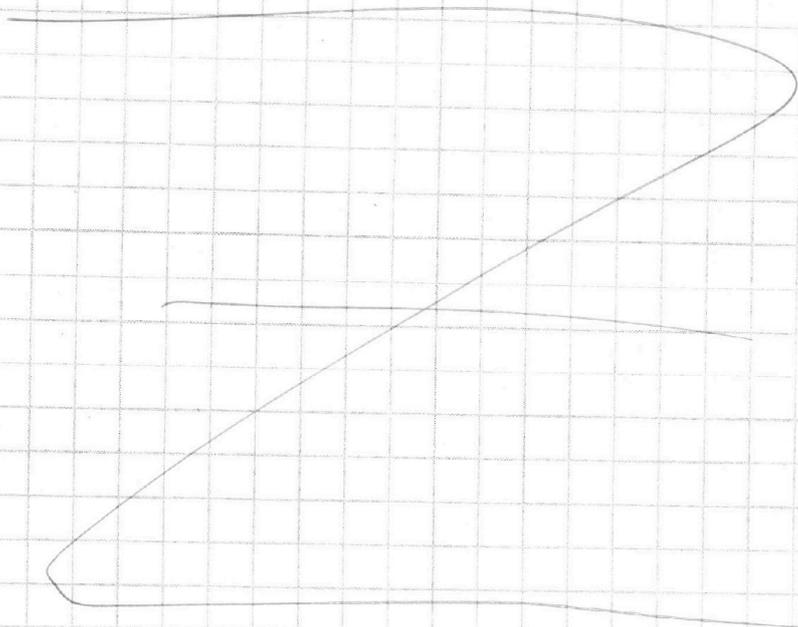
$$P_{\text{мин}} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\sqrt{169 - 25} + \sqrt{169 - 25} \right) =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 12 = 48.$$

$$P_{\text{max}} = 13\pi + 48.$$

длина. πr $L = \frac{\pi}{4} + \pi \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

(из соображений симметрии
окр-ти)

Ответ: $P_{\text{max}} = 13\pi + 48$, при $L \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черта

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$y = x - 2$$

$$a = \frac{x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2)}{x^2 + x(x-2) + (x-2)^2}$$

$$2(3x^2 - 6x + 4) - 6x^2 + 12x$$

$$-((x^2 - 4x + 4)(x-2)) = -(x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8) =$$

$$-(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

$$x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 6x^2 + 12x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черм по 4

n - кол-во уч. a - сумма в классе

1) Висент: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$

2) Висенто: $\frac{a}{n} \cdot \frac{(a-1)}{n-1}$

$\frac{a}{n} \cdot \frac{(a-1)}{n-1} = \frac{4 \cdot 3}{n \cdot (n-1)} \cdot 6$

$a^2 - a = 72$

~~$a^2 - a - 2 = 0$~~

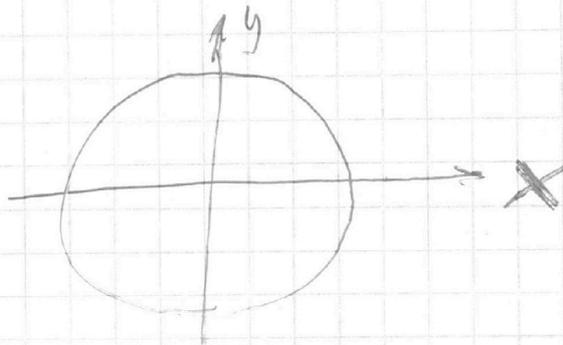
~~$(a-2)(a+1)$~~

$a^2 - a - 72 = 0$

$(a-9)(a+8) = 0$

$D = 1 + 288 = 289$
 $a_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{2}$
 $a_1 = 9$
 $a_2 =$

$\frac{4}{n} \cdot \frac{3 \cdot 6}{n-1} = \frac{9 \cdot 3}{n \cdot (n-1)}$ ✓





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вопрос

$$f(x) = \sqrt{169 - 50 \cos^2 x} + \sqrt{169 - 50 \sin^2 x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 x}} \cdot (-100 \cos x) \cdot (-\sin x) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 x}} \cdot (-100 \sin x) \cdot \cos x =$$

$$= 2 \left(\frac{2}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 x}} \cdot 100 \sin x \cos x - \frac{2}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 x}} \cdot 100 \sin x \cos x \right)$$

$$= 2 \cdot 50 \sin x \cos x \left(\frac{2}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 x}} - \frac{2}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 x}} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{169 - 50 \cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 x}} \right) \cdot \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 x \\ \sin x = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 3x - 2n \neq 2 \\ 2k - x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{2+2n}{3} \\ x \neq 2k-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ 2+2n \leq 3x \leq 2+2n \\ -2 \leq x - 2k \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ \frac{-2+2n}{3} \leq x \leq \frac{2+2n}{3} \quad (1) \\ 2k-2 \leq x \leq 2k+2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{2+2n}{3} \leq 6 \quad 2+2n \leq 18 \quad (n \leq 8)$$

$$-2 \leq \frac{-2+2n}{3} \leq -6 \quad -2+2n \geq -12$$

$$(2) \quad -2 \leq k \leq 2 \quad (n \geq -8)$$



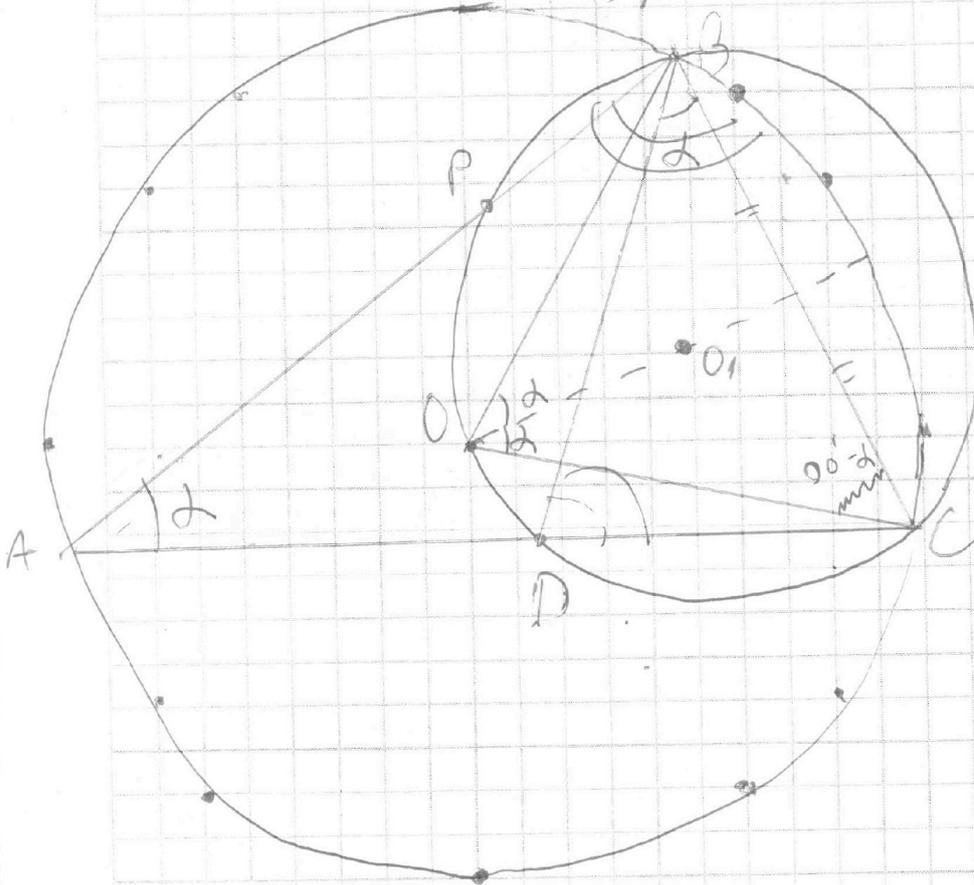
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черт.



$$\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{BD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черныш

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 7 \overline{) 31} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 19} \\ 101 \\ \hline 89 \\ 89 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 101 \\ \hline 101 \\ 1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

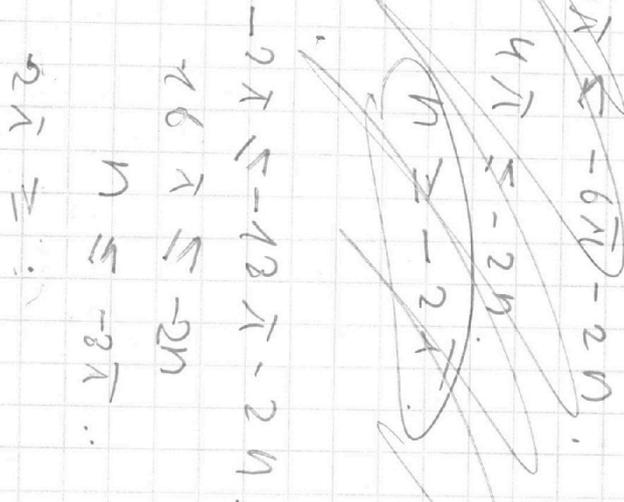
$$2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$$

$$3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$$

$$11 \cdot 101$$



$$2 \cdot 11 \cdot 101$$



$$(2) \quad \begin{aligned} 2k-2 &\geq -6 \\ k &\geq -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k+2 &\leq 6 \\ k &\leq 2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 *Упр*

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) - \cos(2\pi x) = 0$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} 3\pi x - \pi y = 2\pi n \\ -\pi x - \pi y = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 2n \\ x + y = 2k \end{cases}$$

$$4x = 2(n + k)$$

$$x = \frac{n+k}{2}$$

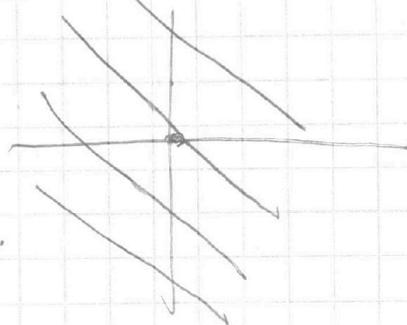
$$\begin{aligned} y &= 3x - 2n = \\ &= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}k - 2n = \\ &= \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

$$2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$2x = x - y + 2n$$

$$x = 2n - y$$

$$\arcsin \frac{2n-y}{6} + \arcsin y \leq \pi$$



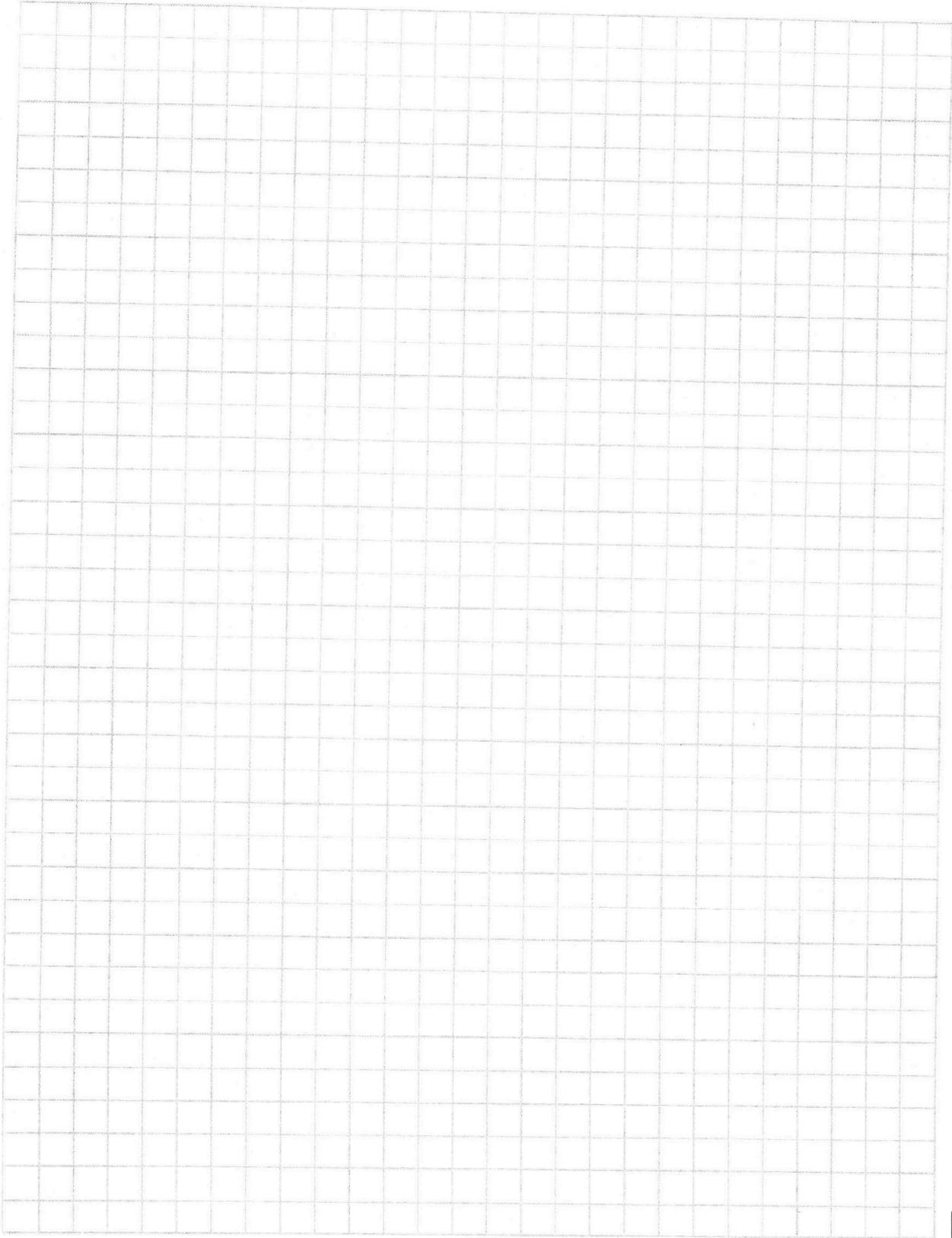


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

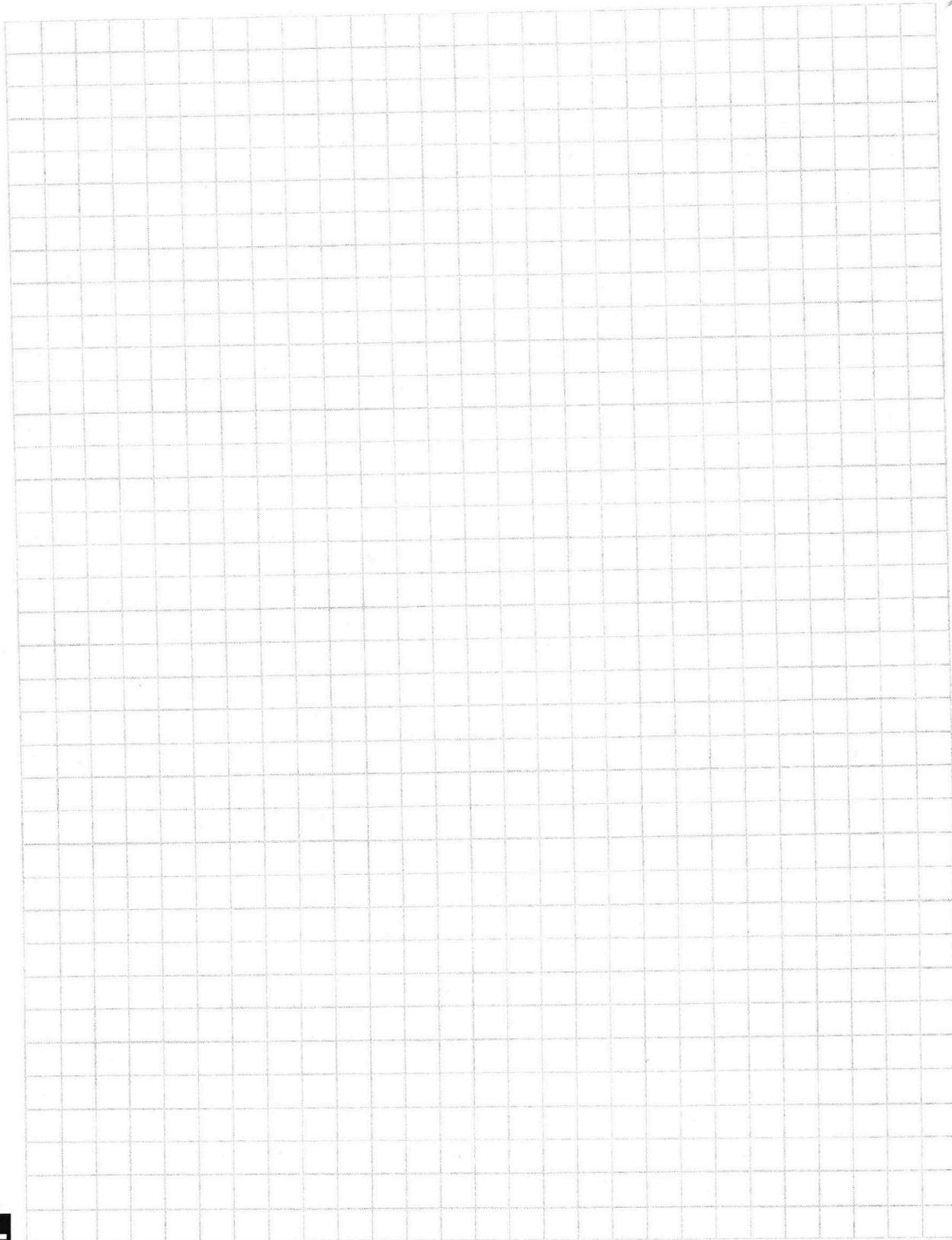
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





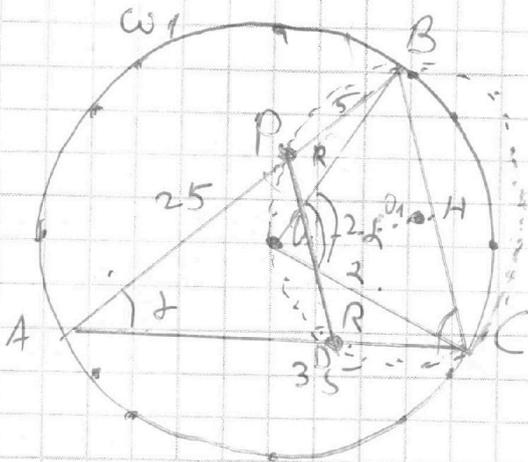
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черт. № 5.



$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

~~$$r = R \sin \alpha$$~~

$$r = \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$r = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$

$$AB \cdot AP = AC \cdot AD$$

$$30 \cdot 25 = 35 \cdot AD \quad AD = \frac{150}{7}$$

$$\frac{25}{30} = \frac{\frac{150}{7}}{\frac{600}{7}} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

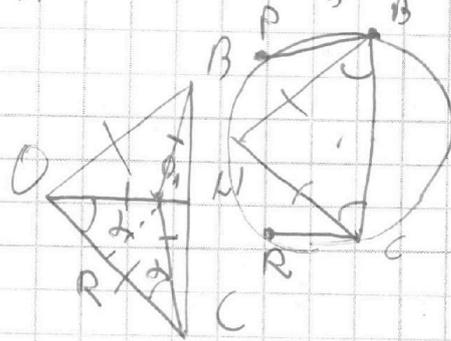
$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$BC = 2r \sin 2\alpha$$

$\triangle ABC - ?$

$$AP = 25 \quad PB = 5$$

$$AC = 35 - 5$$



$$OO_1 = \frac{R}{2} = r$$

$$r = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

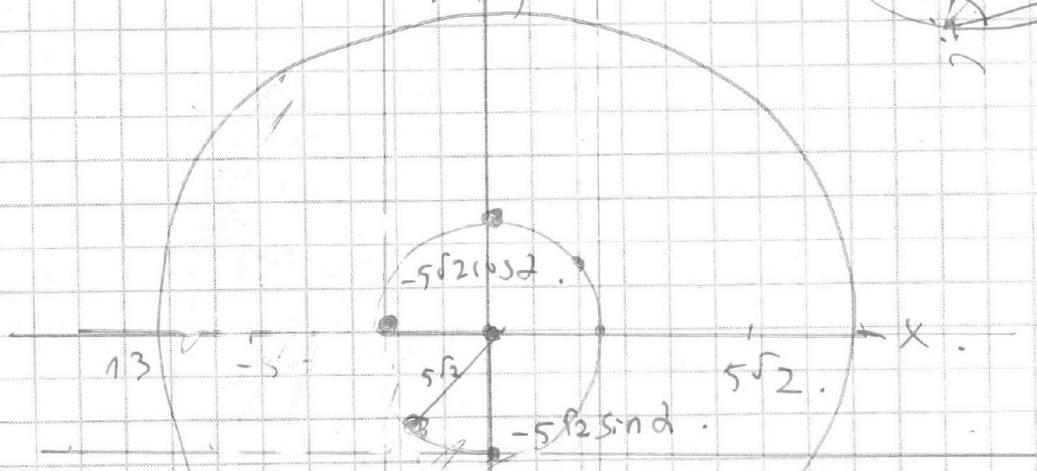
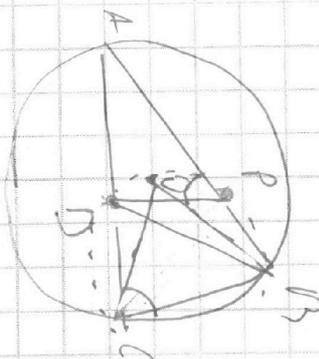
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

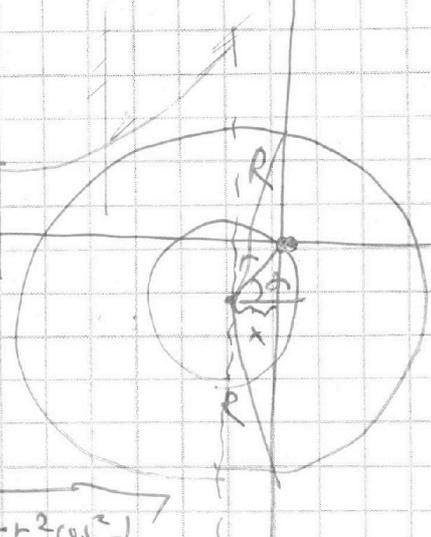
№ 6 Чрп.

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha) / (y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) = 50 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

Дан: $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$
 $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$



$$2 \left(\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \right)$$



$x = r\cos\alpha$
 $y = r\sin\alpha$

$$L_1 = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha}$$

$$L_2 = 2\sqrt{R^2 - y^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2\sin^2\alpha}$$