



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе поехать на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

По условию  $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$  (a-цифра,  $a \neq 0$ )

Заметим, что 11- простое и 101- простое

Значит,  $A \cdot B \cdot C \div 101$  (т.к.  $A \div 101$ )

Но  $A \cdot B \cdot C$  - полный квадрат, значит,  $A \cdot B \cdot C \div 101^2$  (т.к. 101- простое)

т.к.  $A \div 101$ , но  $A \nmid 101^2$ , то  $B \cdot C \div 101$

т.к.  $C < 100$ , то  $C \nmid 101$ , значит,  $B \div 101$

получается,  $B \in \{101; 202; 303; \dots; 909\}$

условию удовлетворяет только  $B = 101$

таких образам,  $B \nmid 11$

т.к.  $A \div 11$ , то  $A \cdot B \cdot C \div 11$ , значит,  $A \cdot B \cdot C \div 11^2$ , т.к. 11- простое

но  $A \nmid 11^2$ ;  $B \nmid 11$ , значит,  $C \div 11$

т.е.  $C \in \{11; 22; 33; \dots; 99\}$

условию удовлетворяет только  $C = 55 = 11 \cdot 5$

т.к.  $C \div 5$ , то  $A \cdot B \cdot C \div 5 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \div 5^2$  (как полный квадрат), 5- простое

но  $C \nmid 5^2$ ;  $B \nmid 5$ , значит,  $A \div 5$

$A = 101 \cdot 11 \cdot a \div 5$ , это возможно только при  $a = 5$  ( $a \neq 0$ )

значит

значит,  $A = 101 \cdot 11 \cdot 5$ ;  $B = 101$ ;  $C = 11 \cdot 5$

$A \cdot B \cdot C = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$  - полный квадрат

тройка  $(A; B; C)$  единственная (исконая тройка)

Ответ:  $(5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№2

по условию  $K' = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$  -  $K$  ~~когда уменьшили  $x$  на 3 и увеличили  $y$  на 3~~

~~$K = K'$~~   
 ~~$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$~~   
 ~~$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)+1}$~~

~~$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$  (1)~~

~~ОДЗ:  $\begin{cases} xy \neq 0 \\ (x-3)(y+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq 0 \\ y \neq -3 \end{cases}$~~

~~если  $x+y+1=0$ , то (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \neq 3 \\ y=0 \\ y \neq -3 \end{cases}$~~

~~если  $x+y+1 \neq 0$ , то~~

~~(1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ xy \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{cases}$~~

~~соответственно, на ОДЗ~~

~~(1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \neq 0 \\ x+y+1 \neq 0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \neq 0 \\ xy = xy - 3y + 3x - 9 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$~~

~~т.к.  $x$  и  $y$  - положительные и  $(x-3)$  и  $(y+3)$  - положительные,~~

~~то ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x-3 \neq 0 \\ y+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ y > 0 \end{cases}$~~

~~тогда на ОДЗ (при  $x > 3; y > 0$ )  $\begin{cases} x+y+1 \neq 0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$~~

~~но  $x+y+1 > 3+0+1=4 > 0$  при  $x > 3; y > 0$ , значит,  
 $K \neq K' \Leftrightarrow x-y-3 \neq 0$  при  $x > 3; y > 0$~~

$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

после того уменьшили  $x$  на 3 и увеличили  $y$  на 3  
 $K \leq \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

соответственно,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$   
 $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$  (1)

при  $x > 0, y > 0$   $x+y+1 > 0$ , значит, (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ (x-3)(y+3) \neq 0 \\ xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 3 \end{cases}$  (т.к.  $x > 0, y > 0$ )  $\begin{cases} x-y=3 \\ x \neq 3 \end{cases}$  (2)

при  $x=3$   $x-y=3 \Leftrightarrow 3-y=3 \Leftrightarrow y=0$ , это невозможно по условию

значит, (2)  $\Leftrightarrow x-y=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2 (продолжение)

тогда получаем,  $K = K'$  ( $K$  не изменяется при уменьшении  $x$  на 3 и увеличении  $y$  на 3)  $\Leftrightarrow$   ~~$x = y$~~   $x - y = 3$   
 $y = x - 3$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x =$$

$$= \underline{x^3 - x^3} + \underline{9x^2} - \underline{27x} + \underline{27} - \underline{9x^2} + \underline{27x} = 27$$

$$M = 27$$

значит,  $M = 27$  при любых  $x > 0, y > 0$ , удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 27



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ & \sin^2 \pi x - \sin(\pi y) \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos(\pi y) \cos \pi x \\ & -(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \cos(\pi y) \cos \pi x + \sin(\pi y) \sin \pi x \\ & -\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - 2\pi x) &= \cos(\pi x - \pi y) \\ \begin{cases} \pi - 2\pi x = (\pi x - \pi y) + 2\pi n \\ \pi - 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} & \begin{cases} 1 - 2x = x - y + 2n \\ 1 - 2x = y - x + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2n \\ y = 1 - x - 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} (k; 3k - 1 + 2n) - \text{решение} \\ (k; 1 - k - 2n) - \text{решение}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ:  $(k; 3k - 1 + 2n); (k; 1 - k - 2n), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R}$

$$\text{б)} \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Заметим, что область определения функции  $f(t) = \arccos t$  равна  $D(f) = [-1; 1]$

а область значений  $E(f) = [0; \pi]$

тогда неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$$

Значит, из всевозможных пар  $(x; y)$  не подходит только пара  $(-4; -9)$

Теперь посмотрим, какие из решений уравнений удовлетворяют ОДЗ неравенства

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

а именно нас интересуют пары  $(x; y): (k; 3k - 1 + 2n); (k; 1 - k - 2n), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} -4 \leq k \leq 4 \\ -9 \leq 3k - 1 + 2n \leq 9 \\ -4 \leq k \leq 4 \\ -9 \leq 1 - k - 2n \leq 9 \end{cases}$$

Для каждого  $x = k, k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$  рассмотрим все  $y$ :

$x = -4$ :  $y = -13 + 2n, n \in \mathbb{Z}$ , соответственно  $y \in \{-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\}$ , т.е.  $y$  - любое нечетное от  $-9$  до  $9$  включительно, это логично, т.к.

$2n$  - любое четное число

$x = -3$ :  $y = -10 + 2n, n \in \mathbb{Z}$  аналогично вышенаписанному  $y$  - любое четное от  $-9$  до  $9$  включительно



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

также для  $x = -2$   $y$  - любое нечетное от  $-9$  до  $9$  включительно  
для  $x = -1$   $y$  - любое четное от  $-9$  до  $9$  включительно  
и так далее

В итоге:

для  $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$   $y$  - любое нечетное от  $-9$  до  $9$  включительно  
т.е. 10 различных  $y$

для  $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$   $y$  - любое четное от  $-9$  до  $9$  включительно  
т.е. 9 различных  $y$

Соответственно, 9 областей допустимых значений удовлетворяют  $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 86$  различным пар  $(x; y)$  (целочисленным)

А самому неравенству удовлетворяют все пары  $(x; y)$ , кроме  $(-4; -9)$ , которая входит в ~~86~~ посчитанные нами 86 пар

значит, ровно 85 пар целых чисел  $(x; y)$  удовлетворяют одновременно и уравнению и неравенству.

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Рассмотрим на количество всевозможных способов раздать 4 билета среди  $a$  человек:

(пусть одноклассников было  $a$  человек)

$$C_a^4$$

из них благоприятных для нас (когда 2 билета достанься конкретно двум людям (Тете и Вась) будет:

$$C_{a-2}^2 \quad (2 \text{ билета среди } (a-2) \text{ человек})$$

$$\text{Тогда вероятность искомого исхода} \quad \frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}}{\frac{a!}{4!(a-4)!}} = \frac{1 \cdot 2}{a \cdot (a-1)} = \frac{12}{a(a-1)}$$

Пусть же вероятность посчитаем для некоторого количества билетов  $k > 4$ .  
Всего исходов:  $C_a^k$

Благоприятных исходов:  $C_{a-2}^{k-2}$

$$\text{вероятность искомого исхода:} \quad \frac{C_{a-2}^{k-2}}{C_a^k} = \frac{\frac{(a-2)!}{(k-2)!(a-k)!}}{\frac{a!}{k!(a-k)!}} = \frac{1}{a(a-1)} = \frac{k(k-1)}{a(a-1)}$$

По условию в начале месяца вероятность в 3,5 раза меньше, чем в конце, т.е.  $3,5 \cdot \frac{12}{a(a-1)} = \frac{k(k-1)}{a(a-1)}$

$$k(k-1) = 42$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$\begin{cases} k=7 \\ k=-6 \end{cases}$$

$$k=7, \text{ т.к. } k > 4$$

\* Искомый исход - Тетя и Вась вместе пойдут на концерт

Значит, в конце месяца должно выдано 7 билетов

Заметим, что одноклассников было хотя бы 7, т.к. если  $a=7$ , то  $3,5 \cdot \frac{12}{a(a-1)} > 3,5 \cdot \frac{12}{7 \cdot 6} = 3,5 \cdot \frac{12}{42} = 1$ , т.е. вероятность того, что Тетя и Вась вместе пойдут на концерт в конце месяца больше 1, что невозможно.

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

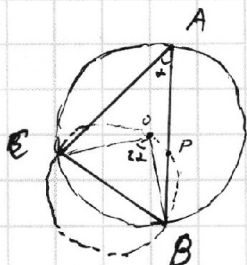
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Пусть  $\omega_2 \cap AC = K$

$AC \cdot AK = AP \cdot AB$  - произведение отрезков секущих

$$AK \cdot 4 = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$AK = \frac{104}{25}$$

$AK > AC \Rightarrow K$  за точкой C

Решение:

$$AB = AP + PB = \frac{26}{5}$$

1.  $\angle COB = 2 \angle BAC = \alpha$  - радиант

тогда  $\widehat{BC} = 2\alpha$ , значит,  $\angle BOC = 2\alpha$   
(окружности  $\omega_2$ )

$\angle CPB = \angle COB = 2\alpha$  - опирается на одну дугу

2.  $\triangle ABC$

$$\text{по т. косинусов } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \quad (1)$$

3.  $\triangle BPC$

$$\text{по т. косинусов } BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos \angle BPC \quad (2)$$

из (1) и (2)

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$$

$$\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 2^2 + PC^2 - 2 \cdot 2 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha \quad (3)$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos \angle PAC \quad \text{— из } \triangle APC \text{ по т. косинусов}$$

$$PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$(3): \frac{676}{25} + 16 - \frac{208}{5} \cos \alpha = 4 + \left(\frac{256}{25} + 16 - \frac{128}{5} \cos \alpha\right) - 4 \sqrt{\frac{256}{25} + 16 - \frac{128}{5} \cos \alpha} \cdot \cos 2\alpha \quad | \cdot 25$$

$$676 + 400 - 1040 \cos \alpha = 100 + 256 + 400 - 640 \cos \alpha - 100 \sqrt{256 + 400 - 640 \cos \alpha} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\text{из } \triangle BPC \quad 320 - 400 \cos \alpha = -20 \sqrt{656 - 640 \cos \alpha} \cdot \cos 2\alpha$$

$$16 - 20 \cos \alpha = -\sqrt{656 - 640 \cos \alpha} \cdot \cos 2\alpha$$

$$4 - 5 \cos \alpha = -\sqrt{41 - 4 \cos \alpha} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\begin{cases} 16 - 40 \cos \alpha + 25 \cos^2 \alpha = (41 - 4 \cos \alpha) \cos^2 2\alpha \\ 4 - 5 \cos \alpha \leq 0 \end{cases}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\varphi(\alpha): \begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

(2)  $x^2+y^2 \leq 9$  - график - круг с центром в точке  $(0;0)$  и радиусом 3 (включая граничные точки)

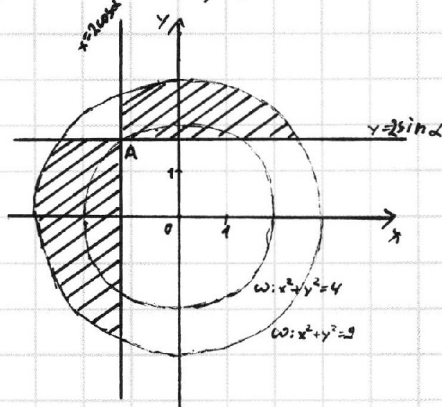
$$(1) \begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \\ x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

- графиками системы является объединение двух четвертоугольников, ограниченных прямыми  $x=2\cos\alpha$  и  $y=2\sin\alpha$

(а именно: I (правая верхняя) и II (левая нижняя))

Также заметим, что точка пересечения прямых  $x=2\cos\alpha$  и  $y=2\sin\alpha$   $A(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$  лежит на окружности с центром  $O(0;0)$  и радиусом 2, т.к.  $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4$  - истина по основному тригонометрическому тождеству,

фигура  $\varphi(\alpha)$  представляет собой ~~объ~~ пересечение фигур (1) и (2)



$\varphi(\alpha)$  - заштрихованная фигура, ограниченная окружностью  $\omega: x^2+y^2=9$  и прямыми  $x=2\cos\alpha; y=2\sin\alpha$

Рассмотрим её периметр, он состоит из ~~нес~~ двух частей:

I две дуги, заключенные между перпендикулярными прямыми, их сумма градусного мер составляет  $180^\circ$ , т.е. постоянна и не зависит от  $\alpha$

II хорды окружности, лежащие на прямых  $x=2\cos\alpha$  и  $y=2\sin\alpha$   
 Интересно заметить, что прямая  $x=2\cos\alpha$  пересекает  $\omega: x^2+y^2=9$  в точке с абсциссой



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Посмотрим на точки пересечения прямой  $x = 2\cos\alpha$  и окружности  $x^2 + y^2 = 9$

$$(2\cos\alpha)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - 4\cos^2\alpha \quad y = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$y = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}, \text{ тогда точки пересечения } (2\cos\alpha; \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha})$$

$$(2\cos\alpha; -\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha})$$

и аналогично, длина этой хорды равна  $2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$

аналогично для прямой  $y = 2\sin\alpha$  длина хорды будет:  
 $2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$

Тогда периметр  $P(\varphi(\alpha))$  напрямую зависит от суммы  
 $P = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$   
 $\begin{cases} 9 - 4\sin^2\alpha > 0 \\ 9 - 4\cos^2\alpha > 0 \end{cases}, \text{ т.к. } \begin{cases} -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \end{cases}$

Посмотрим на квадрат этого выражения:

$$P^2 = 4(9 - 4\sin^2\alpha) + 8\sqrt{(9 - 4\sin^2\alpha)(9 - 4\cos^2\alpha)} + 4(9 - 4\cos^2\alpha) = 36 + 16\sin^2\alpha + 36 - 16\cos^2\alpha + 8\sqrt{(9 - 4\sin^2\alpha)(9 - 4\cos^2\alpha)}$$

$$= 36 + 36 - 16 + 8\sqrt{45 + 16\sin^2\alpha - 16\sin^4\alpha}$$

$P(\varphi(\alpha))$  принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда  $P^2(\varphi(\alpha))$  принимает наибольшее значение, а это происходит тогда и только тогда, когда  $\sqrt{45 + 16\sin^2\alpha - 16\sin^4\alpha}$  принимает наибольшее значение, которое достигается при и только при наибольшем значении  $45 + 16\sin^2\alpha - 16\sin^4\alpha$

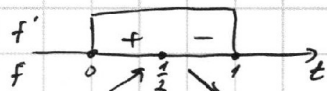
$$t = \sin^2\alpha, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(t) = 45 + 16t^2 - 16t^4, \quad f'(t) = -32t + 16, \quad D(f) = [0; 1]$$

$$f(t) = 45 - (4t + 5)(4t - 9)$$

$$f'(t) = -32t + 16, \quad D(f') = (0; 1) - \text{критических точек нет}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -32t + 16 = 0 \quad t = \frac{1}{2} - \text{стационарная точка}$$



$t = \frac{1}{2}$  - точка максимума, а т.к. на  $[0; 1]$  равно одна точка экстремума, то  $f(\frac{1}{2})$  - наибольшее значение

Значит,  $\varphi(\alpha)$  - наибольшее при  $t = \frac{1}{2} \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \quad \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

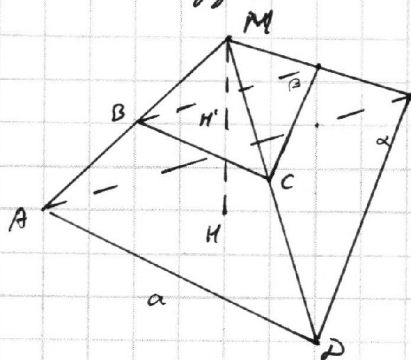
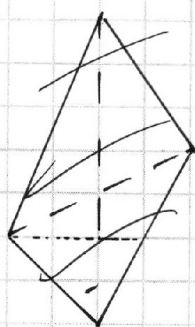
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 7.

Для удобства будем рисовать треугольную усеченную пирамиду, при этом не пользуясь никакими ее свойствами



$ABCD$  - боковая грань пирамиды

$M$  - вершина полной пирамиды для усеченной

$HH'$  - высота пирамиды ;  $MH$  - высота полной пирамиды

$SL$  касается всех ребер пирамиды, значит, если

$SL_1$  - пересечение  $SL$  с  $ABC$ , то  $SL_1$  - вписана в  $ABC$  (плоскостное основание)

тогда центр  $SL_1$  - центр вписанной окружности,

$$R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{2n}, \quad n - \text{количество сторон основания}$$

аналогично для верхнего основания  $r = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{2n}$

$ABCD$  - описанная трапеция, т.к.  $SL \cap (ABC) = SL_1$ ,

$SL_1$  касается  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ ;  $DA$

$$BE + A \quad BC + AD = AB + CD$$

$$AB = \frac{a+b}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

1.  $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$  101 - простое  
 $B =$  11 - простое

$ABC: 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C: 101^2$

$B: 101^2 \Rightarrow B = 101$

$C: 11 \Rightarrow C = 55$

$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$

$5a = \text{квадрат}$   
 $a = 5$

Ответ: (5555; 101; 55)

2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy(x-3)(y+3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1 & y=-x-1 \\ x-y-3=0 & x-y=3 \end{cases}$$

$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$

$$\begin{cases} x^2(-x-1)^2 - 3x(-x-1) \\ x^3 - (x-3)^3 - 3x(x-3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x^2(-x-1)^2 + 3x^2 + 3x \\ x^2 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 3x^2 + 9x \\ 6x^2 + 6x^2 + 6x + 9 \\ 6x^2 - 18x + 27 \end{aligned}$$

$y = x-3$

3.

$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\sin \pi x - \sin \pi y = \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2} + \frac{\pi x - \pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2} - \frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = \sin \pi x + \cos \pi x - \sin \pi y - \cos \pi y$

$= 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2}$

4.

Дано  $a$  и  $a$  равно...

$\frac{4}{a} \cdot \frac{3}{a+1} = \frac{12}{a(a+1)}$

$K(K-1) = 3 \cdot 5 \cdot 12 = 42$

$C_a^4 C_{a-2}^2$

$K = 7$

$5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

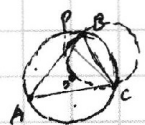
$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

$6: 1 - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)(a-3)}{2}}{\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}} = \frac{12}{a(a-1)}$

$a = 7 \cdot \frac{12}{7 \cdot 6}$

5.



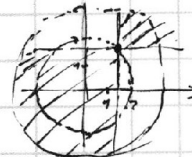
$S_{ABC} \cdot AP \cdot AB = \frac{16}{5} \cdot \frac{24}{5}$

6.

$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$

$2 \cdot 3 \sin\alpha + 2 \cdot 3 \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$



$a_1 a_2 = b_1 b_2$   
 $a_1 a_2 + b_1 b_2 = ?$

7.

$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$

$\sin^2 \pi x - \cos \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$

$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$

$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$

$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi x + \pi y + 2\pi n \\ \pi - 2\pi x = -(\pi x + \pi y) + 2\pi n \end{cases}$

$(K; 1-3K-2n), n \in \mathbb{Z}, K \in \mathbb{R}$   
 $(K; K-1+2n), n \in \mathbb{Z}, K \in \mathbb{R}$

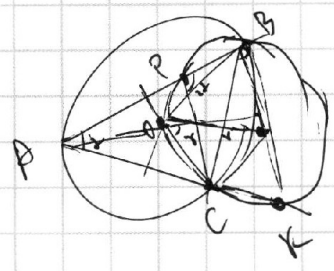


$AB = \frac{BC + AD}{2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$AK \cdot AC = AD \cdot AP$

$AK = 4 = \frac{16}{5} \cdot \frac{24}{5}$

$AK = \frac{104}{25}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

