



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
\ из \

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{число } A = 1111 \cdot x, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq x \leq 9$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot x$$

простых

т.к. ABC - полный квадрат, то среди ~~простых~~ множителей

B и C должны быть 101 и 11 , т.к.

B - 3-х значное, C - 2-х значное, то B имеет вид $101 \cdot y$ ($y \in \mathbb{N}$), $C = 11 \cdot z$ ($z \in \mathbb{N}$)

т.к. B имеет в своей записи 7 , а $C = 11$, то
 $y = 7, z = 1$, т.е. $B = 707, C = 11$

также $ABC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot x$ - полный квадрат, т.к.

x - число, то $x = 7$

Ответ: единственная тройка - $(7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из условия:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad | \cdot xy(x-4)(y+4)$$

$$(xy + 4x - 4y - 16)y + (xy + 4x - 4y - 16)x + 3(xy + 4x - 4y - 16) =$$
$$= (y+4 + x-4)xy + 3xy$$

$$\cancel{xy^2 + 4xy - 4y^2 - 16y} + \cancel{x^2y + 4x^2 - 4xy - 16x} + \cancel{3xy + 12x - 12y - 48} = \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + 3xy$$
$$\cancel{-4y^2 - 16y - 12y} - 4y^2 - 28y + 4x^2 - 4x - 48 = 0$$
$$x^2 - y^2 - x - 7y - \frac{48}{12} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$-(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) = \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} 2y = 1 - x + y + 2k \\ 2y = x - y + 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2k & (1) \\ x = 3y - 1 - 2k & (2) \end{cases} \text{ — ответ (a)}$$

т.к. $\arccos x \in [0; \pi]$, $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \forall x$,

$$\text{то } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{возможно равенство } \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{также } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

(1) $-4 \leq 1 - x + 2k \leq 4$, $-5 \leq -x + 2k \leq 3$, $5 \geq x - 2k \geq -3$
 $2k - \text{цел} \Rightarrow$ для $\forall$ из 8 целых x найдется 5 пар (x, y) ,
 для $\forall$ из 7 целых x найдется 4 пары (x, y)
 всего $40 + 28 = 68$ пар

(2) $-7 \leq 3y - 1 - 2k \leq 7$, $-6 \leq 3y - 2k \leq 8$, $-\frac{2}{3} \leq y - \frac{2k}{3} \leq \frac{8}{3}$
 $\Rightarrow$ для $\forall$ из 4 целых y найдется 7 пар (x, y)
 для $\forall$ из 5 целых y найдется 8 пар (x, y) , всего $28 + 40 = 68$ пар

~~из каждой пары получается по одному значению, но пары (1) и (2) не пересекаются, т.к. иначе~~
 ~~$y = 1 - (3y - 1) + 2k_1 + 2k_2$, $4y + 2 = 2(k_1 + k_2)$, $2y + 1 = 2(k_1 + k_2)$~~
 ~~$(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пересечение (1) и (2):

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2k_1 \\ x = 3y - 1 - 2k_2 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - 3y + 1 + 2k_1 + 2k_2; 4y = 2 + 2(k_1 + k_2);$$

$$y = \frac{1 + k_1 + k_2}{2}$$

~~$$x = 1 - y + 2k_1$$~~

$$x = 1 - y + 2k_1 = \frac{2 - 1 - k_1 - k_2 + 4k_1}{2}$$

$$x = \frac{3k_1 - k_2 + 1}{2}$$

$$\begin{cases} -8 \leq 1 + k_1 + k_2 \leq 8 \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -14 \leq 3k_1 - k_2 + 1 \leq 14 \end{cases} \quad -22 \leq 4k_1 + 2 \leq 22;$$

$$-11 \leq 2k_1 + 1 \leq 11; \quad -12 \leq 2k_1 \leq 10; \quad -6 \leq k_1 \leq 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	билетов	людей	вероятность	(к. сколько добавили билетов)
I	4	m	$\frac{C_{m-2}^2}{C_m^4}$ - выбираем Петю, Васю и еще 2 чел.	
II	4+k	m	$\frac{C_{m-2}^{2+k}}{C_m^{4+k}}$ - выбираем 4 человека	

из условия: $\frac{C_{m-2}^2}{C_m^4} \cdot 11 = \frac{C_{m-2}^{2+k}}{C_m^{4+k}}$

$$\frac{(m-2)!}{2 \cdot (m-4)!} \cdot \frac{m!}{(4+k)! (m-k-4)!} \cdot 11 = \frac{m!}{24 \cdot (m-4)!} \cdot \frac{(m-2)!}{(2+k)! (m-k-4)!}$$

$$\frac{11}{2(k+3)(k+4)} = \frac{1}{24}, \quad 132 = k^2 + 7k + 12$$

$$k^2 + 7k - 120 = 0$$

$\Delta = 49 + 4 \cdot 120 = 529 = 23^2$; $k = \frac{-7 \pm 23}{2}$; $k = 8$
т.к. $k \geq 0$ всего было вог. $8+4=12$

Ответ: 12

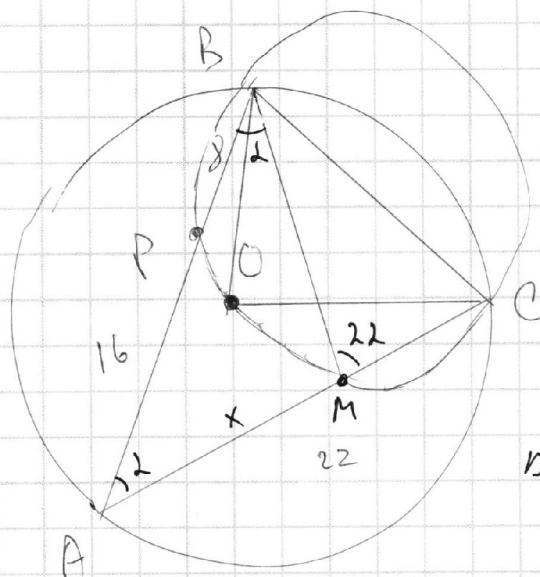


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
(из)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



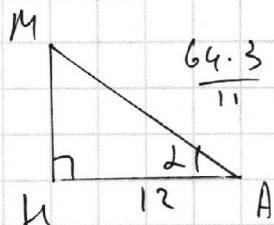
$$\text{Пусть } \omega_2 \cap AC = M$$

$$\text{Пусть } \angle BAC = 2, \text{ тогда } \angle BOC = 22 \text{ (центральный)} = \angle BMC \text{ (2 вписанных)}$$

$$\angle ABM = \angle BMC - \angle BAM = 22 - 2 = 20 \Rightarrow \triangle BMA - \text{р/с, } BM = AM$$

$$\text{из свойства точки } A: AP \cdot AB = AM \cdot AC;$$

$$16 \cdot 24 = AM \cdot 22; \quad AM = \frac{64 \cdot 3}{11}$$



проведем $MK \perp AB$

$$\cos 2 = \frac{12 \cdot 11}{64 \cdot 3} = \frac{11}{16}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 2}{2} = \frac{24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}}{2} = \frac{33 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \text{ - Ответ}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

замека ~~РЗ~~ $\angle = \beta - \frac{\pi}{2}$

$$1) \left(x + 4 \sin \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(y - 4 \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \leq 0$$

$$(x - 4 \cos \beta) (y - 4 \sin \beta) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \cos \beta \\ y \leq 4 \sin \beta \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4 \cos \beta \\ y \geq 4 \sin \beta \end{cases}$$

$$x = 4 \cos \beta \quad \text{и} \quad y = 4 \sin \beta$$

- где прямые, параллельные осям координат и пересекающиеся на окружности с центром в $(0,0)$ и радиусом 4

$$2) x^2 + y^2 \leq 36 - \text{круг с центром в } (0,0) \text{ и}$$

радиусом 6

$$\text{т.к. } \angle AOD = \text{const} = 90^\circ, \text{ то}$$

$$\angle AOB = \text{const},$$

$AC + DB = \text{const} \Rightarrow$ периметр зависит только от $CD + AB$

$$CO + OB' = 2 \cos \beta + 2 \sin \beta$$

$$D \Rightarrow CD + AB = \frac{6}{4} (2 \cos \beta + 2 \sin \beta) =$$

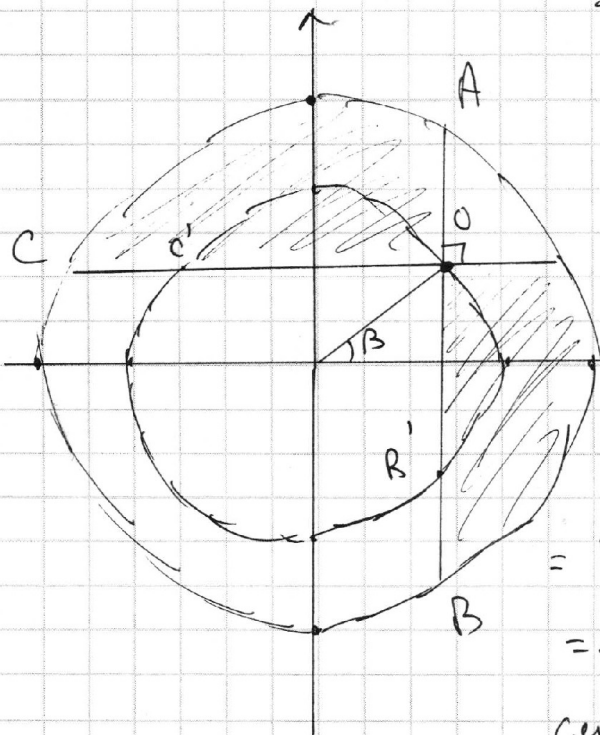
(окр: радиус 6, центр в $(0,0)$)

$$= 3(\cos \beta + \sin \beta) =$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos \beta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \beta \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 3\sqrt{2} \cos \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \leq 3\sqrt{2}$$

см. продолжение





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Итак периметр } P_{\max} = l_{AC} + l_{DB} + \max(CD + AB) =$$
$$= \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 + 3\sqrt{2} = 6\pi + 3\sqrt{2}$$

достигается при $\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) = 1$; $\beta - \frac{\pi}{4} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; Orbes (a)

$$2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2\pi k; \quad 2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Orbes (b)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

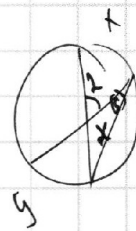
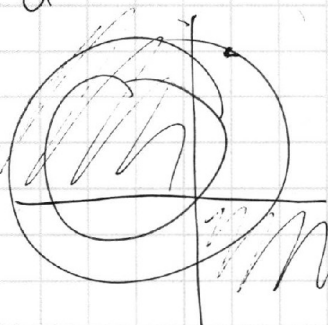
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 + 7y - x^2 - x + 12 = 0$$

$$D = 49 + 4(x^2 - x - 12)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad y_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{48}{1} = -\frac{49}{4}$$

$$\begin{cases} x > -4\sin 2 \\ y \leq 4\cos 2 \\ x \leq -4\sin 2 \\ y > 4\cos 2 \end{cases}$$



$$a^2 + b^2 = 16$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + 2$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} - 1$$

$$y = 4\cos 2$$

$$\begin{cases} y > -4\sin 2 \\ x \leq 4\cos 2 \\ y \leq -4\sin 2 \\ x > 4\cos 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 4\sin \beta \\ x \leq 4\cos \beta \\ y \leq 4\sin \beta \\ x > 4\cos \beta \end{cases}$$

$$r = 4(\sin \beta + \cos \beta) = 4(\sin \beta + \cos \beta)$$

$$x' = -y$$

$$y' = x$$

$$(-y + 4\sin \beta)(x - 4\cos \beta)$$

$$(y - 4\sin \beta)(x - 4\cos \beta)$$

$$-4\cos 2$$

$$-4\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~сделаю замену $X' = -y$, $y' = x$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$~~

1) ~~$(x' + 4 \sin \beta)(y' - 4 \sin(\beta - \frac{\pi}{2})) (1 - x' - 4 \cos(\beta - \frac{\pi}{2}))$~~

~~$= (y' - 4 \sin(\frac{\pi}{2} - \beta))(-x) \leq 0$~~

~~$(y' - 4 \sin(\frac{\pi}{2} - \beta))(x' + 4 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta)) \geq 0$~~

~~$(y' - 4 \cos \beta)(x' + 4 \sin \beta) \geq 0$~~

~~$y' + 4 \sin \alpha$~~

$\begin{cases} (x' + 4 \sin \alpha)(y' - 4 \cos \alpha) \leq 0 & (1) \\ x'^2 + y'^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$

~~замена $x = -y'$, $y = x'$~~

1) ~~$(-y' + 4 \sin \alpha)(x' - 4 \cos \alpha) \leq 0$~~

$\begin{cases} -y' \geq -4 \sin \alpha & y' \leq 4 \sin \alpha \\ x' \leq 4 \cos \alpha & x' \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$

$\begin{cases} -y' \leq -4 \sin \alpha & y' \geq 4 \sin \alpha \\ x' \geq 4 \cos \alpha & x' \geq 4 \cos \alpha \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - 9

B - ~~10~~ ~~10~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~9~~ ~~10~~

$$9 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + 9 + 9 + 8 + 1$$

$$4 =$$

$$X = 3 - 3X - 1$$

C - 2

$$X \cdot X \cdot X = 1111 \cdot X$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 10 \overline{) 1111} \\ \underline{10} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 11 \end{array}$$

$$4X = 2 + 2$$

B. 101

$$5 \geq 4 - 2k \geq -3$$

$$2X = 1 + k$$

C - 11

A - 9

B - 1 (702)

C - 1 (11)

$$702 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 = X = 101^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot X$$

$$M = X^3 - 4^3 - 12X4$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy}$$

$$(xy + 4x - 4y - 16) \cdot y + (xy + 4x - 4y - 16) \cdot X = (y + 4 + x - 4) \cdot xy$$

$$xy^2 + 4xy - 4y^2 - 16y + x^2y + 4x^2 - 4xy - 16x = x^2y + 4x^2 - 4xy - 16x$$

$$-4y^2 + 4x^2 - 16y - 16x = 0 \quad (1) \quad x = -y \quad M = 2X^3 + 12X^2$$

$$x^3 - y^3 - 4(x + y) = 0$$

$$x \neq y$$

$$y \neq -y$$

$$(x + y)(x - y - 4) = 0$$

$$2) \quad y = x - 4; \quad x^3 - (x - 4)^3 - 12x(x - 4) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 16 + 64) - 12x^2 + 48x$$

$$12x^2 - 48x - 64 - 12x^2 + 48x = -64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

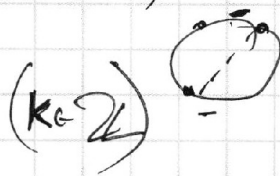
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

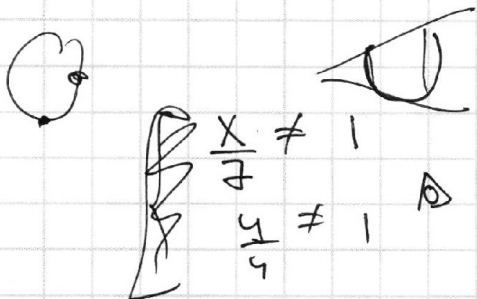
$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$- \cos 2\pi y = \cos (\pi - (x-y)\pi)$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi - (x-y)\pi + 2\pi k \\ 2\pi y = (x-y)\pi + \pi + 2\pi k \end{cases}$$



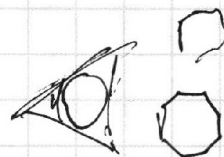
$$\begin{cases} 2y = 1 - x + y + 2k \\ 2y = x - y + 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x + 2k \\ x = 3y - 1 + 2k \end{cases}$$



$$x = 3y - 1 + 2k$$

$$x \neq 7$$

$$y \neq 4$$



~~дуга~~ ~~дуга~~ ~~дуга~~

I

дуга y

дуга m

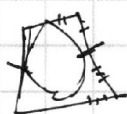
вер. C_{m-2}^2

$$\frac{C_{m-2}^2}{C_m^4}$$

11 =

$$\frac{C_{m-2}^{2+k} C_{4+k}^4}{C_m^{4+k}}$$

$$\frac{C_{m-2}^{2+k} C_m^4}{C_m^{4+k}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} \cdot \frac{n!}{(1+k)! (n-4-k)!} \cdot 11 = \frac{n!}{24 \cdot (n-4)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(1+k)! (n-4-k)!}$$

$$\frac{11}{2 \cdot (1+k)! \cdot (k+3)(k+4)} = \frac{1}{24(2+k)!}$$

$$11 \cdot 24 = 2 \cdot (k+3)(k+4)$$

$$132 = k^2 + 7k + 12; \quad k^2 + 7k - 120 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 120 = 23^2$$

$$k = \frac{-7 \pm 23}{2}$$

$$k = 8$$

(12)

$$xy - \dots 4 \cdot x \cos 2 + 4y \sin 2 + 16 \cdot \sin 2 \cos 2 \leq 0$$

$$x > -4 \sin 2$$

$$y > 4 \cos 2$$

$$\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 12 = \frac{1}{9}$$

$$y^2 + 7y + 12$$

$$x_0 = -\frac{7}{2}$$

$$a \in -4; 4$$

$$b \in -4; 4$$

193

$$+ (4+3)(4+4) \\ x(x-1)$$

$$x^2 - x + y^2 - 7y - 48 = 0$$

$$D = 1 - 4y^2 + 28y + 48 \cdot 4$$

$$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0 \\ D = 1 + 4(y^2 + 7y + 12)$$

$$D \geq 7 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

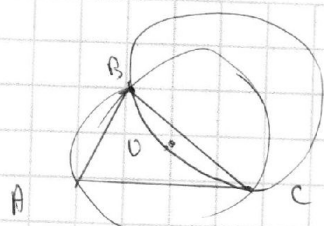


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

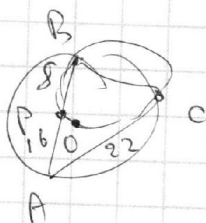
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



через 8
и 6 2



$$y = 1 - z + 2k$$

$$z = 12 - 2k$$

$$2k = 10$$

$$16 \cdot 24 = x \cdot 22$$

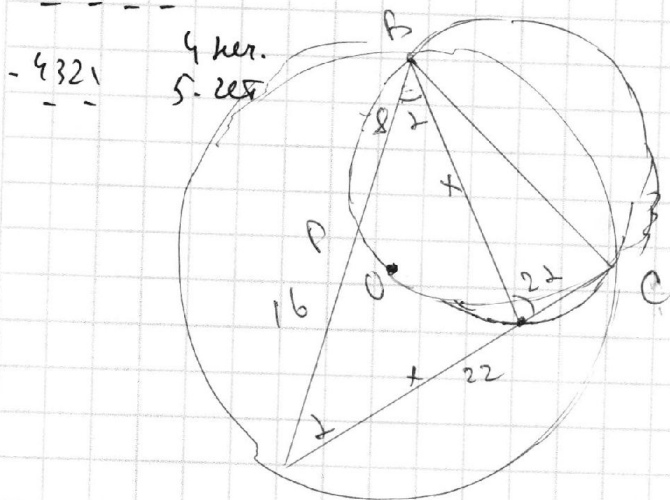
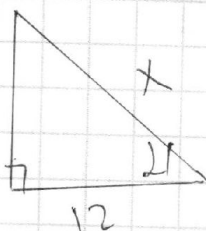
$$16 \cdot 24 = x \cdot 22$$

$$8 \cdot 24 = x \cdot 11$$

$$x = \frac{192}{11}$$

$$y = -6 + 2k$$

$$k = 5$$



$$y^2 + 7y - x^2 + x + 12 = 0$$

$$\frac{64 \cdot 3^2}{11^2} - \frac{12^2 \cdot 11^2}{11^2} = \frac{3 \cdot 4}{11} \sqrt{16^2 - 11^2}$$

$$-4 \leq 1 - x + 2k \leq 4$$

$$-5 \leq -x + 2k \leq 3$$

$$5 \geq x - 2k \geq -3$$

$$y = 1 - 3y + 1 + 2n$$

$$4y = 2 + 2n \quad 2y = 1 + n$$