



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и правая часть : 11, но 11 - простое $\Rightarrow$

$$k^2 : 11^2 \Rightarrow \text{левая часть} : 11^2$$

$$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot a \cdot b \cdot c = k^2$$

отсюда $C : 11$, т.к. $a < 11$; $b < 11$

(т.к. цифры) $\Rightarrow C = 11 \cdot c$

Заметим, что B содержит 2 цифр цифр
трехзнач. число : 101 и сод. 2 единиц.

101 202 303 404 505 606 707 808 909 $\Rightarrow b = 2$

Заметим, что C содержит 3 цифр цифр.

трехзнач. число : 11 и сод. 3 единиц.

11 22 33 44 55 66 77 88 99 $\Rightarrow c = 3$

То есть ~~101~~ $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 2 \cdot 3 = k^2$

Требуется всевозможные значения a

$a = 1; a = 2; a = 3; a = 4; a = 5; a = 6; a = 7; a = 8; a = 9$

не подходит	не подходит	не подходит	не подходит	не подходит	подходит	не подходит
$101^2 \cdot 11^2 \cdot 1$ - не кв.	$101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3$ - не кв.	$101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2$ - не кв.	$101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3$ - не кв.	$101^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ - не кв.	$101^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$ - кв.	$101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ - не кв.

Значит тройка окр. состоит $A = 6666; B = 202; C = 33$

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, где a какой-то цифра
от 1 до 9 (0 не может быть, т.к. число не ноль)

Заметим, что $1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow \overline{aaaa} = 1000a +$
 $+100a + 10a + a = 1111a = 101 \cdot 11 \cdot a$.

Рассмотрим произв. $A \cdot B \cdot C$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2; k \in \mathbb{Z}$$

т.к. ~~какая~~ левая часть $\div 101$ (т.к. есть

мн-ль 101), то и правая часть делится
на 101, но 101 - простое число $\Rightarrow$

$$k^2 \div 101^2, \text{ значит } 11 \cdot a \cdot B \cdot C \div 101$$

Раз 101 простое, то $B \div 101$, т.к.

$$11 < 101; a < 101; C < 101 \text{ (т.к. двуциф.)} \Rightarrow$$

т.к. цифра

$B = 101 \cdot b$, где b - цифра от 1 до 9 (но $b \neq 0$

т.к. число не ноль, с нуля/или там $b \neq 0$

т.к. B - трехциф. число, то есть

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11a \cdot 101 \cdot b \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot a \cdot b \cdot C = k^2$$

Раз левая часть $\div 11$ (т.к. есть мн-ль 11) то



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

~~Кружок не кружок~~

Если ум. x , то सब $x' = x-1$, а y - увелич.

$$y' = y+1, \text{ то } \text{знак } K \text{ не изм. } K' = K =$$

$$= \frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} + \frac{2}{x'y'} = \frac{x'+y'+2}{x'y'} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} (=) \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} (=) \frac{x+y+2}{xy}, \text{ т.к. } K=K'$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

Заметим, что раз $x, y > 0$ по условию, то $x+y+2 > 0 \Rightarrow$ можем сокр. обе части на $x+y+2$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x-1)(y+1) = xy \quad (\text{перем. члена})$$

$$xy + x - y - 1 = xy$$

$$x = y+1. \quad K' = K \text{ только при } x = y+1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 3xy$$

$$x-y=1 \Rightarrow M = x^2 + y^2 + xy - 3xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 = 1^2$$

Ответ $M = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б) Заметим, что решением пер-ва
 $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$ не будет только случай,
 в котором $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$, а $\arccos \frac{y}{4} = \pi$

Т.к. $0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$, а $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} < \frac{\pi}{2}$
 в других случаях $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2} + \pi =$
 $= \frac{3}{2}\pi$

Из а) решением будут

- 1) $\begin{cases} x = a + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = a \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = b \\ y = 1 - 3b + 2n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

но еще отм., что $(x; y)$ - число $\Rightarrow$
 $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}$ (отсюда и $a + 1 + 2k \in \mathbb{Z}$ и
 $1 - 3b + 2n \in \mathbb{Z}$)

Найдем значения при которых $\arcsin \frac{x}{5} =$
 $= \frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{y}{4} = \pi$

$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$ при $\frac{x}{5} = 1$, то есть $x = 5$

$\arccos \frac{y}{4} = \pi$ при $\frac{y}{4} = -1$, то есть $y = -4$

в 1) $y = -4$ $x = -4 + 1 + 2k = -3 + 2k; k \in \mathbb{Z}$ $k = 4$ без подбора
 и только
 2) $x = 5$ $y = 1 - 15 + 2n; n \in \mathbb{Z}$ $y = -14 + 2n; n \in \mathbb{Z}$ $n = 7$ подбора
 и только



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим, что решением будет

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{любое } x \in \{-5; -3; -1; 1; 3\} \\ \text{любое } y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\} \\ x = 5 \text{ и любое } y \in \{-2; 0; 2; 4\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{любое } x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\} \\ \text{любое } y \in \{-3; -1; 1; 3\} \end{array} \right.$$

Ответ: б)

а)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = a \\ x = b \\ y = 1 - 3b + 2n; n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ: а)

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a - \text{действ.} \\ x = \frac{1-a-2n}{3}; n \in \mathbb{Z} \\ x = a + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит ~~осталось~~ . Теперь найдем решение

углом, т.е. $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$, $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$



из 1) $y=4$
 x может быть
 $-4+1+2k; k \in \mathbb{Z}$
 $-3+2k; k \in \mathbb{Z}$
 $-5; -3; -1; 1; 3$
 $y=4$
 $x=-5, -3, -1, 1, 3$

из 2) $x=5$
 y м.б.
 $-4=1-3b+2n; n \in \mathbb{Z}$
 $-3=1-3b+2n; n \in \mathbb{Z}$
 $x=5=1+\frac{2}{3}n; n \in \mathbb{Z}$
 не подходит

из 1) $x=a+1+2k; k \in \mathbb{Z}$
 $y=4$

то есть $x; y$ -
 разных четности

из 2) $x=6$
 $y=1-3b-2n; n \in \mathbb{Z}$

$3b=1-y-2n; n \in \mathbb{Z}$
 $b=1+y-2n; n \in \mathbb{Z}$
 $x; y$ - разных четности

Покажем, что все ~~эти~~ ^{эти}

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

при разных четности $x; y$ достигается ^{из 1)}
 (кроме $x=5, y=4$, т.к. оно не является решением ^{из 2)}
 кр-ва)

Действительно, т.к. $k; n \in \mathbb{Z}$, то

при любых значениях x и y мы можем
 выбрать любые y отличные по четности
 от x (аналогично и для x)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \quad (1)$

Воспользуемся формулами суммы синусов и косинусов.

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 2 \sin \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi \frac{(x-y)}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 2 \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi \frac{(x-y)}{2}$$

Учтем:

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi \frac{(x-y)}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi \frac{(x-y)}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \pi \frac{(x-y)}{2} \neq 0$$

$$\cos \pi \frac{(x-y)}{2} = 0$$

$$\cos \pi \frac{(x-y)}{2} = 0$$

$$\pi \frac{(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 1 + 2k; k \in \mathbb{Z}$$

То есть пара $(x; y)$

$$x = a + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$y = a$$

а. действ. = погрешность.

$$\sin \pi \frac{(x+y)}{2} \sin \pi x = \cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi x$$

Воспользуемся формулами суммы синусов и косинусов

$$\sin \pi \frac{(x+y)}{2} \sin \pi x = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi(x+y)}{2} - \pi x) - \cos(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x))$$

$$\cos \pi \frac{(x+y)}{2} \cos \pi x = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi(x+y)}{2} - \pi x) + \cos(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x))$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так. $\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) + \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x$

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} - \pi x\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} - \pi x\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right)$$

$$-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right)$$

$$0 = \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x\right)$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} + x = \frac{1}{2} + n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y+2x = 1+2n; n \in \mathbb{Z}$$

$$3x+y = 1+2n; n \in \mathbb{Z}$$

то система разрешима любые числа $(x; y)$

$$\begin{cases} x = b \\ y = 1 - 3b + 2n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

b - действ.

Всегда если y -

$$3b = 1 - y - 2n; n \in \mathbb{Z}$$

$$b = \frac{1-y-2n}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

то есть, если c -действ. $\begin{cases} y \in \mathbb{C} \\ x = \frac{1-y-2n}{3}; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
(перепишем решение)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~узелков~~ узелков $n+2$, а билетов в конце месяца — k . Тогда благоприятные исходы в начале месяца C_n^2 (два билета "запиши" Тему и Васю, осталось выбрать еще 2 из ост. n человек)

Всего исх. выбора 4 билетов для $n+2$ человек

$$C_{n+2}^4 \Rightarrow P_1 \text{ (в начале вероятность)} P_1 = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^4}$$

Благоприятные исходы в конце месяца C_n^{k-2} (два билета "запиши" Тему и Васю, осталось два билета из n человек)

Всего исходов C_{n+2}^k (выбрать k билетов из $n+2$ человек)

$$P_2 = \frac{C_n^{k-2}}{C_{n+2}^k} = \frac{\frac{n!}{(n-k+2)! (k-2)!}}{\frac{(n+2)!}{(k+2-k)! k!}} = \frac{k(k-1)}{(n+2)(n+1)}$$

$$P_1 = \frac{12}{(n+2)(n-1)}$$

Также $2,5 P_1 = P_2$

$$\frac{30}{(n+2)(n-1)} \sim \frac{k(k-1)}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$$

(Пользуемся тем, что $n; k$ — целые (то есть натуральные) числа)

$$30 = k^2 - k$$

$$k^2 - k + 30 = 0, \text{ так как } k > 0, \text{ то } (k-6)(k+5) = 0, \text{ так как } k > 0, \text{ то } k = 6 \text{ Ответ: } 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle \text{Знамен} < \angle \text{ОИ} = \frac{1}{2} < \angle \text{ВОН} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \gamma = \gamma$$

(как угол)

$$< \angle \text{ВОН} = \gamma, \text{ тогда } \triangle \text{ВОН} \text{ равнобедренный} \\ \angle \text{ВОН} = \angle \text{ВНО} = 90^\circ \Rightarrow \angle \text{ОИ} = 2$$

Выразим ОИ:

$$\text{из } \triangle \text{ОИВ} \quad \angle \text{ОВИ} = \gamma \quad \angle \text{ОВИ} = \frac{\text{ОВ}}{\text{ОИ}}$$

$$\text{из } \triangle \text{ВОН} \quad \angle \text{ВОН} = \gamma \quad \angle \text{ВОН} = \frac{\text{ВН}}{\text{ОИ}}$$

$$\frac{\text{ОВ}}{\text{ОИ}} = \frac{\text{ВН}}{\text{ОИ}} \quad ; \quad \text{ВН} = \frac{1}{2} \text{ВВ} \text{ по гок-му} \Rightarrow \text{ВН} = \frac{15+5}{2} =$$

$$= \frac{25}{4} ; \quad \text{ОИ} = \text{ВН} - \text{ОВ} = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{\text{ОВ}}{\text{ОИ}} = 5 \quad (1) \Rightarrow \frac{\text{ОВ}}{\text{ОИ}} = \frac{1}{25}$$

Заменим $\angle \text{ОВИ}$ углом γ в $\triangle \text{ВОН}$.

$$\frac{\text{ВН}}{\sin \gamma} = \frac{\text{ОВ}}{\sin \gamma} = \frac{\text{ОН}}{\sin(\gamma + \gamma)} \quad (3)$$

Квадрат ОВ (1) отложим углом,

$$\text{из } (1) \quad 1 + \text{tg}^2 \gamma = \frac{1}{\cos^2 \gamma} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2 \gamma = \frac{1}{1 - \sin^2 \gamma} \Rightarrow \text{tg}^2 \gamma = \frac{\sin^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma}$$

$$(\text{tg} \gamma)^2 = 25 = \frac{\sin^2 \gamma (1 - \sin^2 \gamma)}{\sin^2 \gamma (1 - \sin^2 \gamma)} \Rightarrow 25 \sin^2 \gamma - 25 \sin^2 \gamma \sin^2 \gamma = \sin^2 \gamma - \sin^2 \gamma = \sin^2 \gamma$$

$$25 \sin^2 \gamma - \sin^2 \gamma - 24 \sin^2 \gamma \sin^2 \gamma = 0 \quad (2)$$

Отсюда $(\sin^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

9 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Используем (3):

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \alpha)}$$

$$\frac{25}{2 \cdot 9} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha}$$

$$\frac{18}{25} = \sin \alpha \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} + \cos \alpha \quad (\text{т.к. } \gamma \in (0; \pi))$$

$$\frac{18}{25} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \Rightarrow \frac{18}{25} = \frac{\cos \alpha}{25} + \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{25} = \cos \alpha \cdot \frac{26}{25}$$

$$18 = \cos \alpha \cdot 26$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{8^2}{169}} = \sqrt{\frac{88}{169}} = \frac{\sqrt{88}}{13} \quad \cos \alpha = \frac{9}{13}$$

$$= \frac{2\sqrt{22}}{13}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{22}}{13} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 =$$

$$= \frac{225\sqrt{22}}{26}$$

Ответ: $\frac{225\sqrt{22}}{26}$

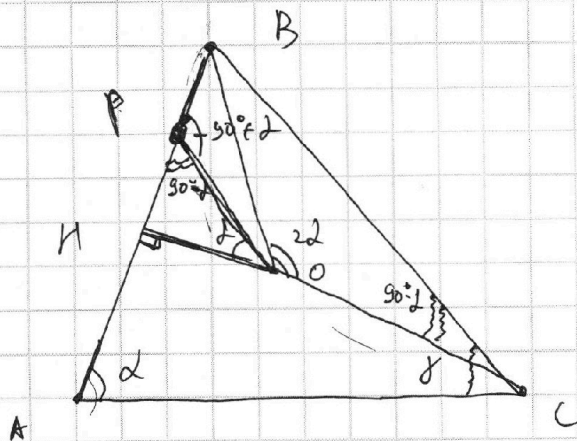


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$S_{ABC} = ?$$

Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, Тогда

$\angle BOC = 2\alpha$, т.к. центральный

$\triangle BOC$ - $\mu\delta$, т.к. $BO = BC$ (радиусы опис. окруж.)

$$\Rightarrow \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

По условию 2 -к $POCO$ - висс. ($\Rightarrow P$ - точка

на опис. ок. (BOC)) $\Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180^\circ$

$$\angle OPB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle OPB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - 90^\circ - \alpha$$

угол смежный с ним - $\angle OPA = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$

$= 90^\circ - \alpha$. Также

Опустим $\perp OH$ из т. O на AB

Тогда OH - висс. в $\mu\delta \triangle ABO$ ($OB = OA$ как радиусы)

$\Rightarrow OH$ - медиана и биссектриса



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

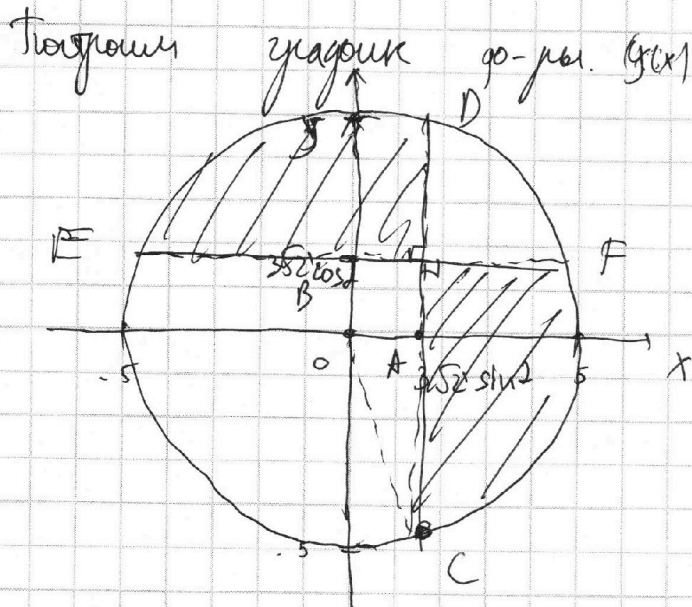
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 \leq 25$$

Задаст. круг

радиусом 5
и в начале
коорд

$$\text{Т.к. } \sin\alpha; \cos\alpha \leq 1, \text{ то } -5 \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \leq 5$$

$$-5 \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \leq 5$$

Отметим точки $A(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$

(они не обязат. лежат на рис.,
он дан для упрощения.)

Тогда ур-ии задают фигуру как
на рис (закраси)

Т.к. эта дуга дуга всегда постоянна
и длина дуги $\frac{2\pi R}{2}$ (т.к. у нас углы
и сумма дуг равна 5π)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Наблюдая Терминатор образуют две хорды
и сумма $g(x)$ (она постоянна, и равна 5)

То есть надо найти $\max$ ^{суммы} длины двух хорд.

Пусть α — произвольный $y = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и
 $x = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ с осями

— C, D и E, F соотв (как на рис.)

То по теореме

$$CD = 2AC = 2 \cdot \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$EF = 2 \cdot BE = 2 \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

$$CD + EF = 2 \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 2 \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} =$$

Если знаменатель $f(\alpha)$ $\max$, то и

$$f^2(\alpha) = \max, \text{ то есть } 2^2 \cdot (25 - 18\sin^2\alpha + 25 - 18\cos^2\alpha + 2 \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} \cdot \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}) =$$

$$= 4 \cdot (25 - 18 + 2 \sqrt{(25 - 18\sin^2\alpha)(25 - 18\cos^2\alpha)})$$

тогда $f(\alpha)$ $\max$ при $\max g(\alpha) = (25 - 18\sin^2\alpha)(25 - 18\cos^2\alpha)$
(из корней макс. значение, так как (1) — $18\cos^2\alpha$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (25 - 18 \sin^2 \alpha)(25 - 18 \cos^2 \alpha) &= 625 - 25 \cdot 18 \cos^2 \alpha - \\ &- 18 \cdot 25 \sin^2 \alpha + 18^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 625 - 18 \cdot 25 + 18^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (\text{ОТВ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \text{ или } \max \text{ от-им } \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

оно достигается в вершинах карб.
(карбона от $\sin^2 \alpha$ вершины вниз)

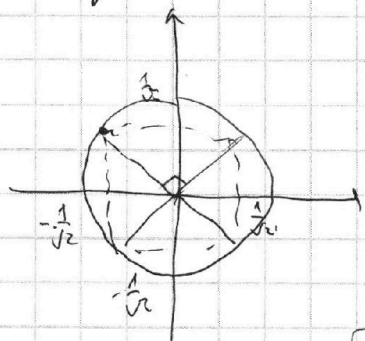
$$\sin^2 \alpha = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тут таких значений

~~sin cos~~

корни максимума



$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z}$$

T

$$CD + EF = 2 \sqrt{25 - \frac{18}{2}} + 2 \sqrt{25 - \frac{18}{2}} =$$

$$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 16$$

$$P = 16 + 5\pi$$

Ответ: $16 + 5\pi$, или $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z}$

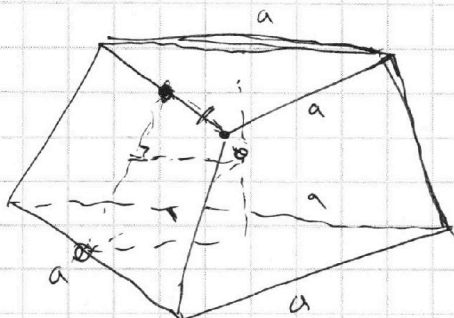


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

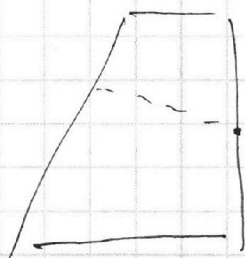
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Такая пирамида
существует
или треугольная
Пусть a — сторона
основ.

Площадь нижнего основания
$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



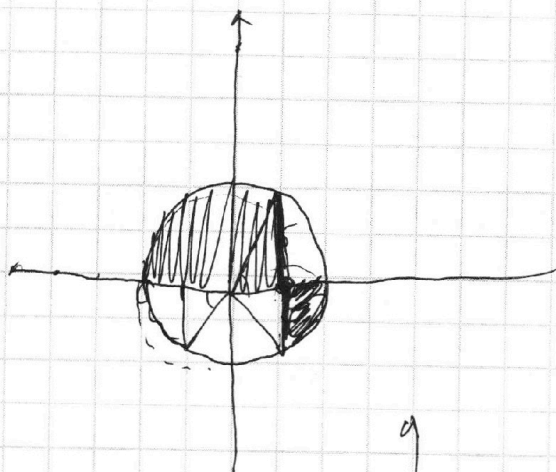


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

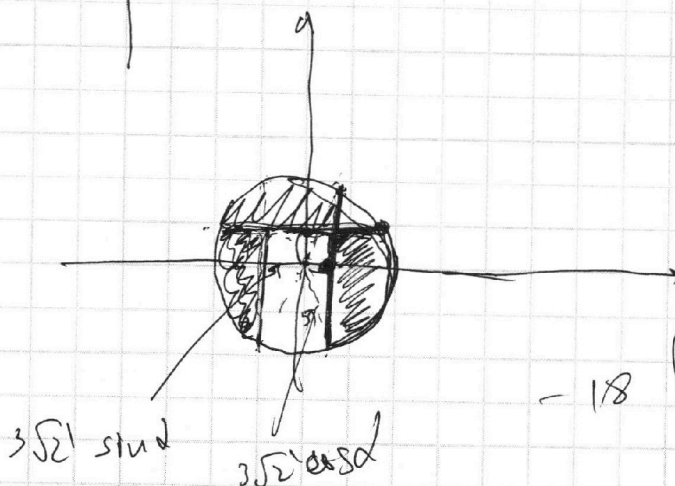
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(x - 3\sqrt{2})/y \leq 0$$

y

$$(x - 3\sqrt{2}a)(y + 3\sqrt{2}\sqrt{1-a^2})$$



$$-18(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$2\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha} = k$$

$$50 - 18 \rightarrow 2\sqrt{(25 - 18\cos^2 \alpha)(25 - 18\sin^2 \alpha)} = k^2$$

$$(25 - 18\cos^2 \alpha)(25 - 18\sin^2 \alpha) = \max$$

$$25 + 18(25 - 18 + 18\sin^2 \alpha)(25 - 18\sin^2 \alpha) = \max$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

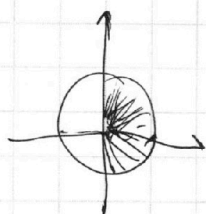
$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x = y + 1$$

$$x^3 y^3 - 3xy = \frac{(x-y)(x^2 y^2 + xy)}{1} - 3xy =$$

$$x^2 y^2 + xy - 3xy = x^2 y^2 - 2xy = (x-y)^2 \quad (1)$$



$$aaaa \sim 101 \cdot 11 \cdot 1010 \sim$$

$$101 \cdot 11 \cdot a \cdot b \cdot c = k^2$$

$$\arcsin \frac{x}{5}$$

$$B = 202$$

$$101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot a \cdot c$$

$$11$$

$$66$$

$$77$$

$$88$$

$$99$$

$$33$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a = k^2$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10$$

$$\frac{101}{101} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$101$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$505$$

$$606$$

$$707$$

$$808$$

$$909$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi y$$

$$2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 2 \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = 2 \cos \pi x \cos \pi y$$

$$2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi y = 2$$

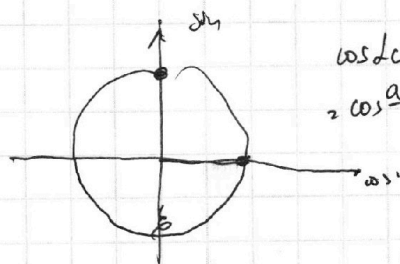
$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi y = 1$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi y = 1$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} + \cos \frac{\pi(x-y)}{2} = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$



$$\arcsin \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{y}$$

$$\cos 2\alpha = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 1+2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + 1 + 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$y = a - \text{something}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

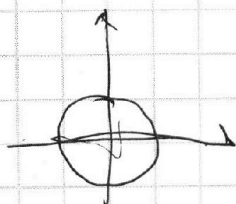
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4R^2 = 4OP^2 + 150 \\ \frac{dy}{dx} = 5 \end{cases} \quad R^2 = \frac{15}{4} + y^2 \quad R = \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{1 + 4y^2}$$

$$\frac{25^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{25}{4 \sin^2 \alpha} + 150$$



$$OP = \frac{5}{4 \sin \alpha}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 125 \\ \hline 50 \\ 625 \end{array}$$

$$25^2 \sin^2 \alpha = 25 \sin^2 \alpha + 600 \sin^2 \alpha \sin \alpha$$

$$625 \sin^2 \alpha = 25 \sin^2 \alpha + 600 \sin^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\begin{array}{l} (2,5 \cdot y - 3) \\ \sim 30 \end{array}$$

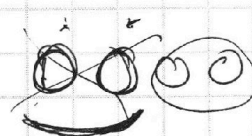
$$\frac{600}{24} = \frac{100}{4} = 25$$

$$2,5 \cdot 12 = \frac{k(k-1)}{30}$$

$$25 \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 24 \sin^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\frac{C_n^2}{C}$$

$$\frac{C_{n+2}^2}{C_{n+1}^2}$$



$$\frac{C_{n+2}^{k-2}}{C_{n+2}^k}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{(n+2)(n+1)n(n-1)} = \frac{12}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{\frac{1}{(k-2)!}}{\frac{(n+2)(n+1)}{k!}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{24} \cdot (n-1)$$

$$\frac{n!}{(n-k+2)! (k-2)!}$$

$$\frac{(n+2)(n+1) \cdot k!}{(n+2-k)! k!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\angle HBO = 90^\circ - \gamma$

Заметим $\sin$ косинусов для $\triangle BPO$:

$$BP^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot BP \cdot \cos(90^\circ - \gamma) = OP^2$$

~~Решим~~

$$25 + OB^2 - 10 \cdot OB \cdot \sin \gamma = OP^2$$

Заметим, что $OB \sin \gamma = \frac{DH}{2}$ из $\triangle OBH$

$$25 + OB^2 - \frac{250}{4} = OP^2$$

$$4OB^2 = 4OP^2 + 150$$

$$OB = \frac{5}{4} \sin \gamma \text{ из } \triangle OBH$$

$$OP = \frac{5}{4} \sin 2 \text{ из } \triangle HPO$$

$$4 \cdot \frac{625}{16 \sin^2 \gamma} = 4 \cdot \frac{25}{16 \sin^2 2} + 150$$

$$\frac{625}{4 \sin^2 \gamma} = \frac{25}{4 \sin^2 2} + 150 \quad | \cdot 4 \sin^2 2 \sin \gamma$$

$$625 \sin^2 2 = 25 \sin^2 \gamma + 600 \sin \gamma$$

$$625 \sin^2 2 = 25 \sin^2 \gamma + 600 \sin^2 2 \sin^2 \gamma$$

Делим на (2) на 25

Получим: $625 \sin^2 2$

$$\frac{\sin 2}{\sin \gamma} = \frac{\sin 2}{\sin \gamma \cdot \cos \gamma} = \frac{1}{\sin 2 \cos \gamma}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{a}{4} + \arcsin \frac{a+1+2k}{5} = \frac{3\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$25R^2 - 10R \sin \gamma = OP^2 \quad -1 \leq \frac{a}{4} \leq 1$$

$$25R^2 = 10$$

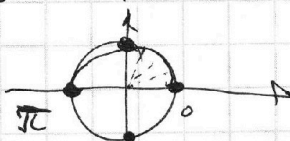
$$-4 \leq a \leq 4$$

$$\arccos(1)$$

$$a = -4$$

$$a+1+2k = -3+2k$$

$$-5 \leq a+1+2k \leq 5$$



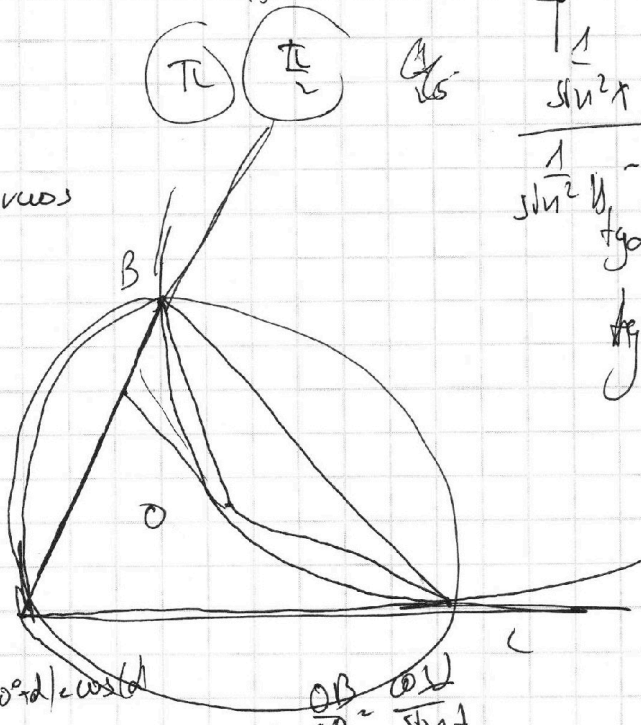
$$\sin 2$$

$$\arccos$$

$$\frac{\sin 2}{\sin \beta}$$

$$A \parallel$$

$$\frac{OP}{OB} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$



$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{25}}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{5}{4} \cdot h$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot h$$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = 5$$

$$\frac{15}{2} + \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{4} = 5 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{OP}{OB} =$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{OP}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{OB}{\sin(90^\circ + \beta)}$$

$$\frac{\sin \frac{15}{2}}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$90^\circ + \beta = \alpha + \alpha$$

