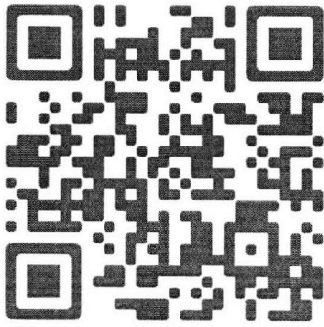
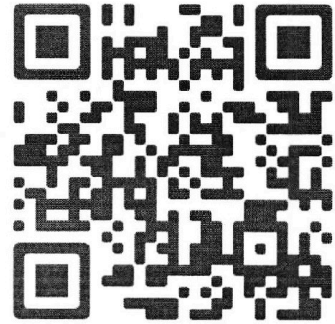




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 111 \cdot x, \text{ где } x \in [1; 9], x \in \mathbb{Z}$$

$$M = A \cdot B \cdot C = P^2, P \in \mathbb{M}$$

$$P^2 = 1111 \cdot x \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C$$

Поскольку P натуральное, то $B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot y \cdot z$.

Число C содержит "1", $\text{LCM}(C) = 11$, тогда $y, z \in \mathbb{N}, y, z < 10$.

$$P^2 = 11^2 \cdot 101 \cdot B \cdot x \Rightarrow B = 101 \cdot 7 \text{ (т.к. } B \text{ содержит "7")}$$

$$\text{Тогда } P^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot x \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$$

$$\{A; B; C\} = \{7777; 707; 11\}$$

$\text{LCM}(C) \neq 11$, тогда с учетом наличия "1" в $C \Rightarrow$
($C < 100$)

C не кратно 11.

Т.о. B должно быть кратно и 11, и 101.

$B < 1000 \Rightarrow$ Противоречие

Тогда $\{7777; 707; 11\}$ — единств. пара

Ответ: $\{7777; 707; 11\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \quad \left| \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \right.$$

$$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

Умножим обе части на $xy(x-4)(y+4)$ ($x \in \{0; 4\}, y \in \{0; -4\}$ ~~нв р/м, т.к. К не имеет смысла~~)

$$xy^2 - 4y^2 + 4xy - 16y + x^2y - 4xy + 4x^2 - 16x + 3xy - 12y + 12x + 48 =$$

$$= xy^2 + 4xy + x^2y - 4xy + 3xy$$

$$4x^2 - 4y^2 - 28y - 4x - 48 = 0.$$

$$x^2 - x - (y^2 + 7y + 12) = 0.$$

$$D_x = 1 + 4y^2 + 28y + 48 = (2y + 7)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 - (2y + 7)}{2} = -y - 3 & \text{нв условия, т.к. } x, y > 0 \\ x = \frac{1 + (2y + 7)}{2} = y + 4 \end{cases}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy \quad |_{x=y+4}$$

$$M = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y$$

$$M = 64$$

ОТВЕТ: $M = 64.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin \pi y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos \pi y$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \right.$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos \pi y - \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \sin \pi y = 0 \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\pi}{2}(3y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2n \\ 3y-x = 1+2k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2n+1-y \\ x = 3y-2k-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 2n+1-c$$

$$\begin{cases} y = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ x = 3c-2k-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3c-2k-1 \\ y = c, \quad c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \{(2n+1-c; c); (3c-2k-1; c)\}$$

$$b) \arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi], \quad \arcsin \frac{y}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ y/4 \neq 1 \\ x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7) = A \\ y \in [-4; 4) = B \end{cases}$$

(учетом а:

(только целые, $x \in A$)

$$1) c = -4 \rightarrow x_1 = 5 + 2n; x_2 = -13 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = -3 \rightarrow x_1 = 4 + 2n; x_2 = -10 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = -2 \rightarrow x_1 = 3 + 2n; x_2 = -7 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = -1 \rightarrow x_1 = 2 + 2n; x_2 = -4 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = 0 \rightarrow x_1 = 1 + 2n; x_2 = -1 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = 1 \rightarrow x_1 = 2n; x_2 = 2 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = 2 \rightarrow x_1 = 2n - 1; x_2 = 5 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар}$$

$$c = 3 \rightarrow x_1 = 2n - 2; x_2 = 8 - 2k \rightarrow 7 \text{ пар.}$$

Итого при $x \in A, y \in B, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 56 \text{ пар.}$

Ответ: а) $\{(2n+1-c; c); (3c-2k-1; c)\}, n, k \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$

б) 56 пар, $x, y \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

] n - количество участников, x - кол-во новых билетов

$$P_1(4) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n}$$

$$P_2(4+x) = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n}$$

$$P_2 = 11 P_1 \Rightarrow \frac{(4+x)(3+x)}{n^2} = 11 \cdot \frac{12}{n^2}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 132$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$\begin{cases} x = -15 & - \text{не удовл усл зад} \\ x = 8 \end{cases}$$

$x = 8$ - кол-во новых билетов

Тогда всего было $x+4 = 12$ билетов.

Ответ: 12 билетов

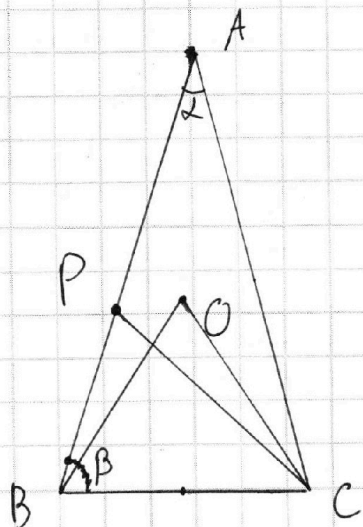


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - остроуг $\triangle$.

$\omega_1(O; R)$ - опис около $\triangle ABC$

$\omega_2(Q; r)$ - опис около $\triangle BOC$

$\omega_2 \cap [AB] = P$

$AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

$S_{\triangle ABC} = ?$

1. $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$

2. $\angle BAC$ - впис и опир на $\cup BC \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ (т.к. центр)

3. $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (т.к. B, P, O, C в ω_2 и P, O по одну сторону от (BC))

4. P в $\triangle ABC$: $\angle BPC = 2\alpha = \angle PAC + \angle PCA$ (т.к. внешний) $\Rightarrow$

$\angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ - р/д $\Rightarrow PC = AP = 16$.

5. P в $\triangle APC$: по Тх косинусов: $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cos \alpha \cdot AP \cdot AC$

$$\cos \alpha = \frac{22}{32} = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (\text{из ОТТ, } \alpha < 90^\circ (\text{усл}))$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$6. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$AB = AP + PB \quad (P \in [AB])$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \quad \text{ОТВЕТ: } S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

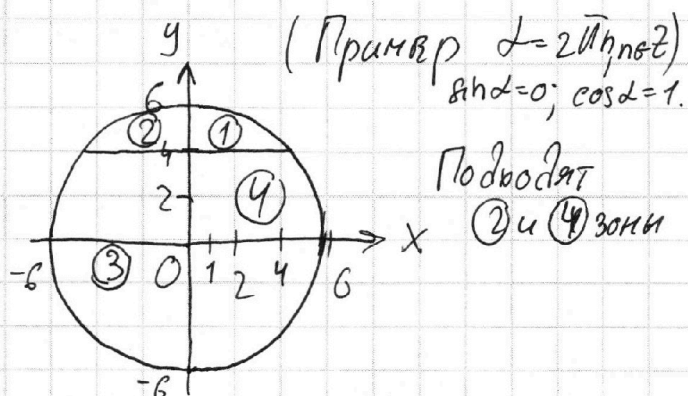
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) (x + 4 \sin^2 \alpha)(y - 4 \cos^2 \alpha) \leq 0$$

$$(2) x^2 + y^2 \leq 36.$$

(2) Ур Мкр-во задает круг с центром в $O(0,0)$
и $R = 6$.

(1) Поскольку α -пар/р,
то $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ - const
для каждого α .



Т.о. α делит круг

на 4 части так, что для решения (1)

подходят противоположные зоны. При этом

$$M(\alpha) = \pi \cdot R + \{2 \sqrt{R^2 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - 16 \cos^2 \alpha}\} - \text{периметр,}$$

где $\pi \cdot R = \text{const}$, из-за против. частей, а.

$\sqrt{R^2 - 16 \sin^2 \alpha}$ и $\sqrt{R^2 - 16 \cos^2 \alpha}$ - длины отрезков, соединяющих ось абсцисс и ординат с точками пересечения

(2) и (1)

$$\text{Заменим } t = \sin^2 \alpha, t \in [0; 1], \sin^2 \alpha = \pm \sqrt{t}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - t.$$

$$M(\alpha) = f(t) = \pi R + 2 \cdot (\sqrt{R^2 - 16t} + \sqrt{R^2 - 16 + 16t}) \rightarrow \max$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(t) = \pi R + 4(\sqrt{9-4t} + \sqrt{5+4t}) \rightarrow \max$$

$$f'(t) = 4\left(\frac{-4}{2\sqrt{9-4t}} + \frac{4}{2\sqrt{5+4t}}\right)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{-2}{\sqrt{9-4t}} + \frac{2}{\sqrt{5+4t}}\right) = 0$$

$$\sqrt{9-4t} = \sqrt{5+4t} \quad (t \in [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2)$$

$$9-4t = 5+4t \rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ - точка макс.}$$

$$M(L) = f(t) = f(t_{\max} = \frac{1}{2}) = 6\pi + 4(\sqrt{9-2} + \sqrt{5+2})$$

$$M_{\max}(L) = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$\text{Одп. ЗАМЕТКА: } \sin L = \pm \sqrt{t}$$

$$\sin L = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } M = 6\pi + 8\sqrt{7};$$

$$L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

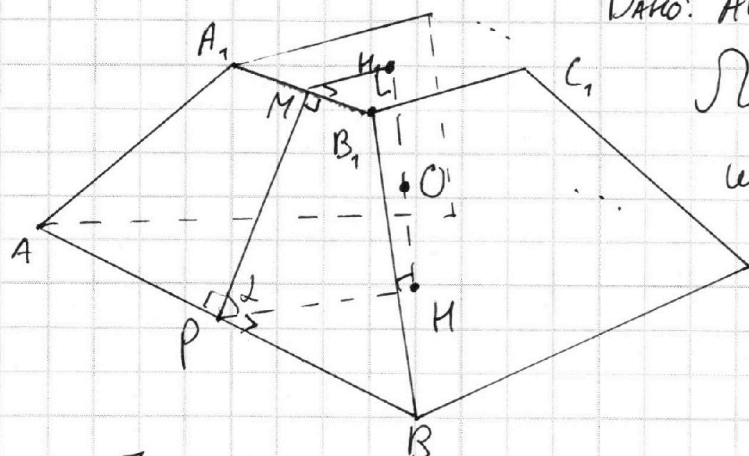


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $ABC...A_1B_1C_1...$ - прав ус пир

$\Omega(O; R_\Omega)$ - шар, кас. всех реб.

$\omega(O; r_\omega)$ - шар, кас. всех гран.

с Найти: $\angle = ?$

$\angle$ - угол между (ABC) и $(A_1B_1C_1)$

$\angle = (\angle ABC; \angle A_1B_1C_1)$

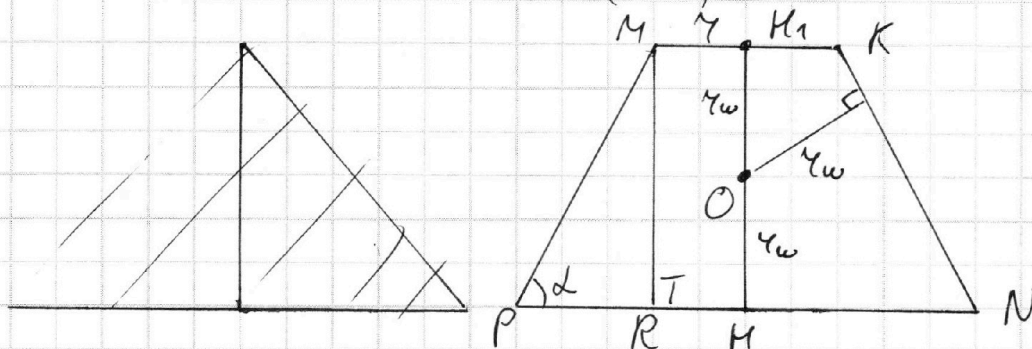
1. H, H_1 - центры $ABC...$ и $A_1B_1C_1...$ соотв.

$\omega_R(H; R)$ - впис в $ABC...$; $\omega_r(H_1; r)$ - впис в $A_1B_1C_1...$

HH_1 - высота пир.

2. Т.к. $\omega(O; r_\omega)$ - впис, то $h = 2r_\omega$, O - сяр. HH_1 .

Р/м свч $ABC...A_1B_1C_1...$ пл (PMN) :



Т.к. $PMKN$ - опис около $\omega(O; r_\omega)$ и $PMKN$ - р/д трап,

то $2PM = MK + PN \Rightarrow PM = R + r$; $PN = R - r$

Из $\triangle PMO$: $\sin \alpha = \frac{2r}{R+r}$; $\cos \alpha = \frac{R-r}{R+r} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{R-r}{R+r}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

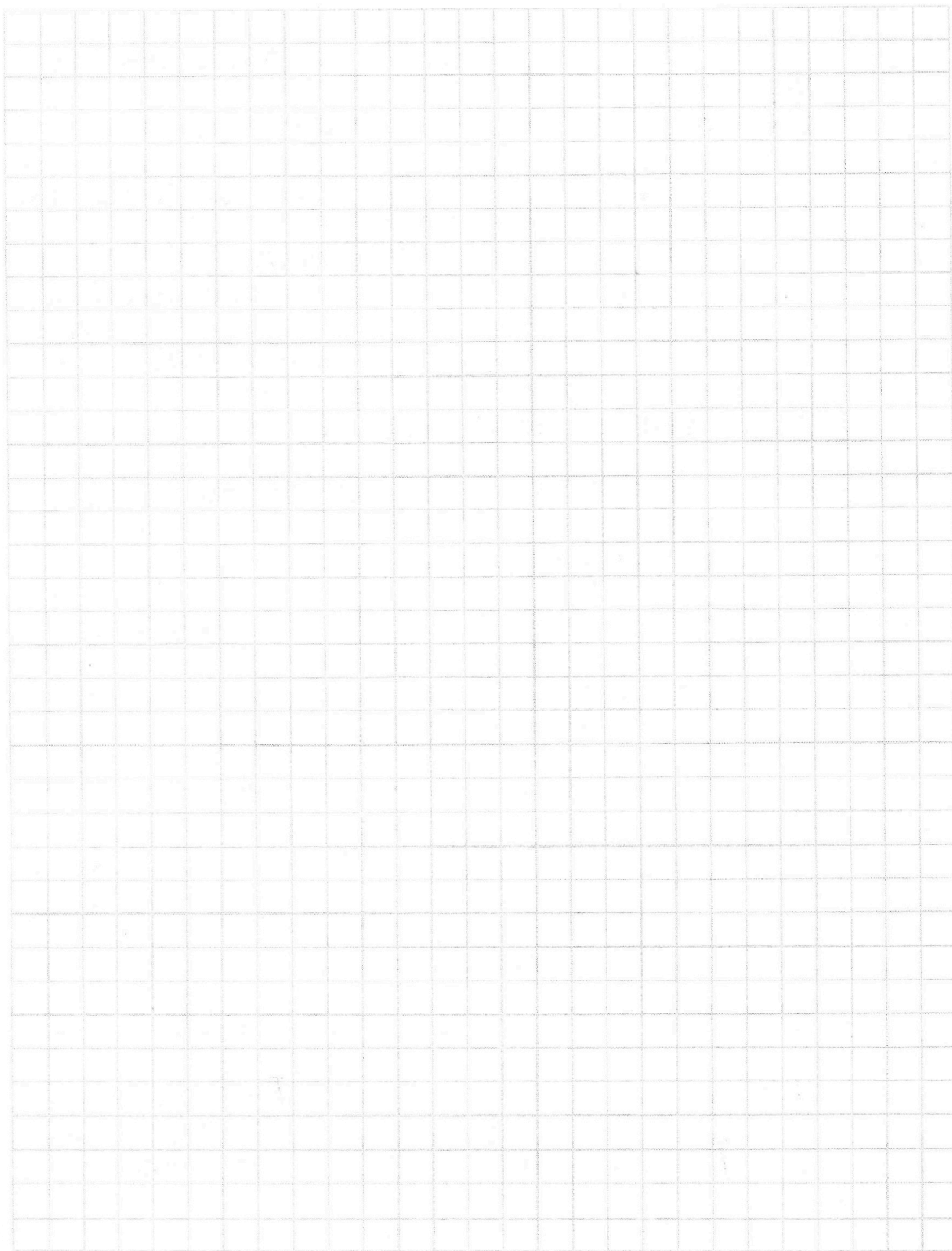
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



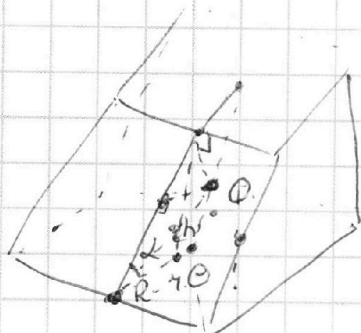


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

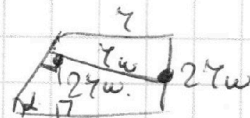
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$R_L; r_w; R$ - нижняя грань
 r - верхняя грань

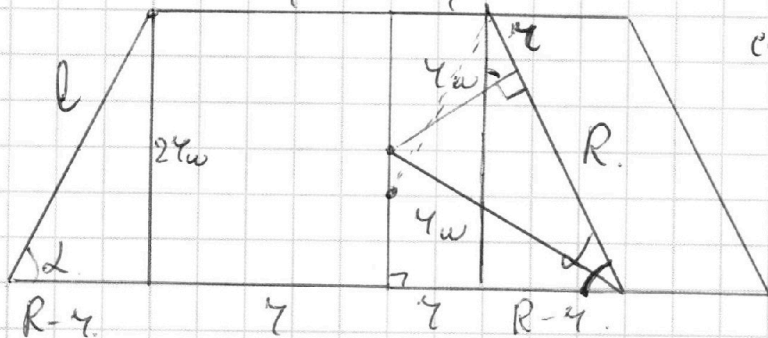
$$h = 2r_w$$

$$R_L^2 = x^2 + r^2 = R^2 + (h - x)^2$$



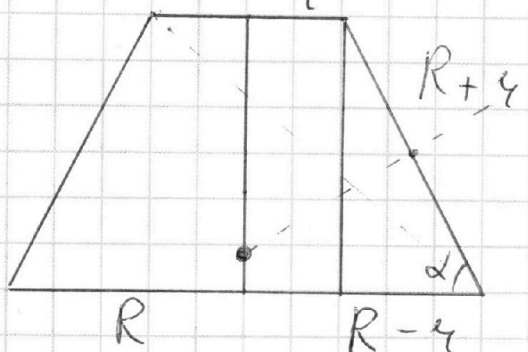
$$h = 2r_w$$

$$R_L^2 = r_w^2 + r^2 = R^2 + R$$



$$\cos \alpha = \frac{R - r}{R + r}$$

$$\sin \alpha = \frac{2r_w}{R + r}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha = 0; \cos \alpha = 1. \rightarrow (1): x \cdot (y - 4) \leq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = 1; \cos \alpha = 0 \rightarrow (1): (x + 4) \cdot y \leq 0$$

$$\alpha = \pi \rightarrow \sin \alpha = 0; \cos \alpha = -1 \rightarrow (1): x \cdot (y + 4) \leq 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = -1; \cos \alpha = 0 \rightarrow (1): (x - 4) \cdot y \leq 0$$

$$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha \in (0; 1)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (1): (x + 2\sqrt{2})(y - 2\sqrt{2}) \leq 0$$

$$x = 2\sqrt{2}; \rightarrow y = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$P = 4\pi + 2 \cdot \left(y \sqrt{36 - (4\sin \alpha)^2} + \sqrt{36 - (4\cos \alpha)^2} \right)$$

$$P \rightarrow \max \Rightarrow \sqrt{36 - 16\sin^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2 \alpha} \rightarrow \max$$

$$t = \sin^2 \alpha; \cos^2 \alpha = 1 - t, t \in [0; 1]$$

$$\sqrt{36 - 16t} + \sqrt{36 - 16 + 16t} \rightarrow \max$$

$$\sqrt{9 - 4t} + \sqrt{5 + 4t} \rightarrow \max$$

$$\frac{-4}{2\sqrt{9-4t}} + \frac{4}{2\sqrt{5+4t}} = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{9-4t}} = \frac{2}{\sqrt{5+4t}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{9-4t} = \sqrt{5+4t} \Rightarrow 9-4t = 5+4t \Rightarrow 8t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$P = 4\pi + 2 \cdot (\sqrt{36-8} + \sqrt{36-8})$$

$$P = 4\pi + 4\sqrt{28} = 4\pi + 8\sqrt{7} \quad \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n \right\} n \in \mathbb{Z}$$

$$P = 4\pi + 4(\sqrt{9} + \sqrt{5}) = 4\pi +$$

$$\sqrt{5} \approx 2,23 \rightarrow 5,3$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos t \in [0; \pi]; \arcsin p \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos t - \arcsin p \geq -\frac{\pi}{2} \quad \forall (p, t) \in [-1; 1]$$

$$\text{Тогда } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \left(\frac{x}{7}, \frac{y}{4} \right) \in [-1; 1] \right\} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30-k+1}{2} \geq -7 \\ \frac{30-k+1}{2} < 7 \\ \frac{n+k+1}{2} \geq -4 \\ \frac{n+k+1}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3n-k \geq -16 \\ 3n-k < 13 \\ n+k \geq -9 \\ n+k < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n \geq -24 \\ 4n < 20 \\ k \geq -9-3n \\ k-15 \leq 3n < 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq -6 \\ n \leq 5 \\ k > -31 \\ k \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n \in [-6; 5), k \in (-31; 0]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Начальный шаг: $\frac{4}{x} - \frac{3}{b} = \frac{12}{x^2}$

СТАЛО:

$$(4+y)(3+y) = 11 \cdot 12$$

$$y^2 + 7y + 12 = 11 \cdot 12$$

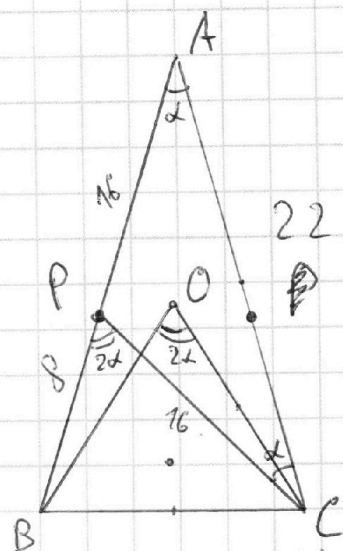
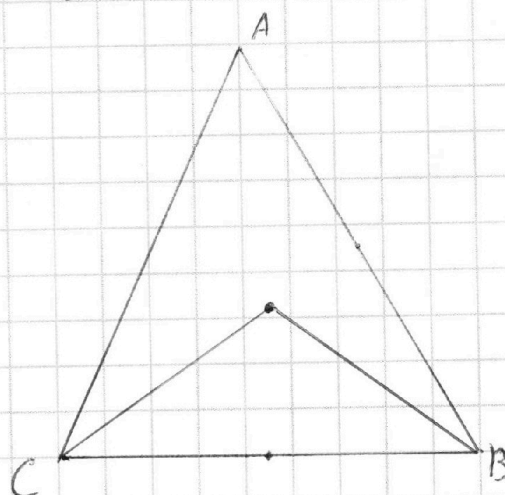
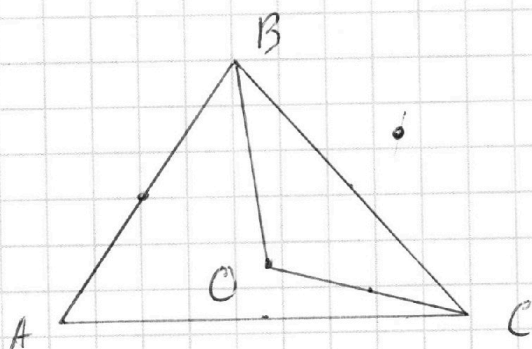
~~18~~

$$\frac{(4+y)}{x} - \frac{(3+y)}{x} = \frac{(4+y)(3+y)}{x^2}$$

$$y^2 + 7y - 11 \cdot 12 = 0$$

$$\begin{cases} y = -15 \\ y = 8 \end{cases} \rightarrow y = 8 \rightarrow \text{СТАЛО } 4+8=12$$

5)



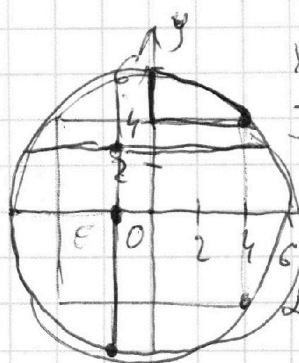
$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{9\sqrt{15}}{2}$$

$$S = \frac{9\sqrt{15}}{2}$$



$$x \in [4, 6], \text{ то } () \neq 0$$

$$\alpha = 0, \sin \alpha = 0, \cos \alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = 1$$

$$6) \begin{cases} (x+4\sin \alpha)(y-4\cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$P = 2\pi r; P = 4 \cdot 24 = 84$$

$$P \approx 64$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = x \cdot x \cdot x \cdot x = x \cdot 1111, x \in [1, 9], x \in \mathbb{Z}$$

$$A = 11 \cdot x \cdot 101$$

$$P = A \cdot B \cdot C, P = N^2, N^2 = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C$$

$$C = 11 \text{ Если } C = 11, \text{ то } B = 101 \cdot y, y = 7 (\text{т.к. } B \text{ содержит})$$

$$\text{Тот же } C = 11. N^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot x \rightarrow x = 7.$$

$$\text{Пусть } C \neq 11, \text{ тогда } C \neq 11 \text{ (и } C \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$C \text{ не может быть кратно } 101 (\text{т.к. } C < 100)$$

$$\text{Т.о. } B = 101 \cdot 11 \cdot y, y \in [1, 9] > 1000.$$

$$2) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$x + y + 3 = \frac{xy}{x-4} + \frac{xy}{y+4} + \frac{3xy}{xy - 4y + 4x - 16}$$

$$\begin{aligned} & x^2y - 4xy + 4x^2 - 16x + xy^2 - 4y^2 + 4xy - 16y + 3xy - 12y + 12x - 48 = \\ & = xy^2 + 4xy + x^2y - 4xy + 3xy \end{aligned}$$

$$4x^2 - 4y^2 - 16x - 16y - 12y + 12x - 48 = 0.$$

$$x^2 - y^2 - x - 7y - 12 = 0.$$

$$x^2 - x - (y^2 + 7y + 12) = 0.$$

$$D = 1 + 4y^2 + 28y + 48 = 4y^2 + 28y + 49 = (2y + 7)^2$$

$$x = \frac{1 - (2y + 7)}{2} = -y - 3 \text{ не удовл. усл зад.}$$

$$x = \frac{1 + 2y + 7}{2} = y + 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$+4 \left\{ M = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64 \right.$$

$$-3 \left\{ x = y + 4 \right.$$

$$y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 4 + 3 \cdot y \cdot 4^2 + 4^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64$$

$$12xy = 12y(y+4) = 12y^2 + 48y$$

$$3) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi y \\ \alpha - \beta = \pi x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2}(x+y) \\ \beta = \frac{\pi}{2}(y-x) \end{cases}$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right) \cdot \sin \pi y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right) \cdot \cos \pi y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \sin \pi y - \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos \pi y = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x) + \pi y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1+2n \\ \frac{\pi}{2}(3y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y = 2n+1 \\ n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3y-x = 2k+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2+2n+2k \\ x = 3y-2k-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{n+k+1}{2} \\ x = \frac{3n-k+1}{2} \end{cases}$$