



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе понасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, тогда: $A = \overline{aa} \cdot 100 + \overline{aa} = \overline{aa} \cdot 101 = 101 \cdot 11 \cdot a \Rightarrow$
($0 \leq a \leq 9$) 101
 $\Rightarrow A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101 \Rightarrow$ т.к. это квадрат, а 101 — простое число, то
или B или C делится на 101. Т.к. $C < 100 \Rightarrow C : 101 \Rightarrow B : 101$
B — трехзначное $\Rightarrow B = k \cdot 101$, где $k \in \mathbb{N}$, при этом $k < 10$ т.к. $10 \cdot 101 >$
 > 1000 . $\Rightarrow B = \overline{b0b}$ (посередине 0) $\Rightarrow B = 101$ (т.к. первая цифра 1, а посередине 0).
При этом $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot C \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11a$, но $B : 11 \cdot a$,
(простое),
 $A : 11a$ только один раз $\Rightarrow C : 11a$ (т.к. ABC — квадрат) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow C = \overline{aa} \Rightarrow C = 55$ (т.к. есть цифра 5) $\Rightarrow (A; B; C) = (5555; 101; 55)$
Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

2

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

⇓

$x+y+1=0$ - нет реш. тк. $x>0$ и $y>0$

$xy = (x-3)(y+3)$

$\Rightarrow xy = (x-3)(y+3) = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y=3$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x-y) \cdot ((x-y)^2 + 3xy) = (x-y)^3 + (x-y)3xy$$

Имея $x-y=3$ получаем: $x^3 - y^3 = 27 + 9xy \Rightarrow x^3 - y^3 - 9xy = 27$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

3

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}; \begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \end{cases}; \begin{cases} 3x - y = 2k + 1 \\ x + y = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2k - 1 \\ y = 2k + 1 - x \end{cases} \Rightarrow (x; 3x - 2k - 1); (x; 2k + 1 - x), \text{ где } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} - \text{решение}$$

$$f) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \in 2\pi$$

Заметим, что $\arccos x \in [0; \pi] \Rightarrow$ равенство верно только при $\frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1$

$$\text{Таким образом: } -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$$

Нам-ле целых чисел среди $3x - (2k + 1)$ и $2k + 1 - x$ совпадают $\Rightarrow$ будем рассматривать только решение вида $(x; 2k + 1 - x)$

Заметим, что x и y - числа разной четности, при этом $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$.

Для любого x , $y \in [-9; 9]$ отличной четности от x

- 2-е решение $\Rightarrow$ для четных x (их всего 5) есть 10 вариантов y , для нечетных x (их 4) - возможных y есть 9 вариантов. При этом пара $(4; 9)$ не подходит $\Rightarrow$ подходящих пар $(x; y)$ всего: $10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 - 1 = 85$

Ответ: $(x; 2k + 1 - x); (x; 3x - 2k - 1), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}; 85$ пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть учеников n . Тогда значительно вероятнее такого события было:
 $P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$ (но 4)

Пусть добавилось x билетов, т.е. изначально было $x+4$, тогда вероятность обоих мальчиков попасть на концерт:

$$P(B) = \frac{(x+4)}{n} \cdot \frac{(x+3)}{(n-1)}$$

По условию:

$$P(B) = \frac{7}{2} P(A) \Rightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)} = \frac{7 \cdot 12}{2n(n-1)} \Rightarrow \frac{42}{n(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4)(x+3) = 42$$

$$x^2 + 7x + 12 = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

По 2. формуле Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 x_2 = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ (т.к. билетов больше)} \Rightarrow \text{в итоге}$$

было выделено: $3+4=7$ билетов

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

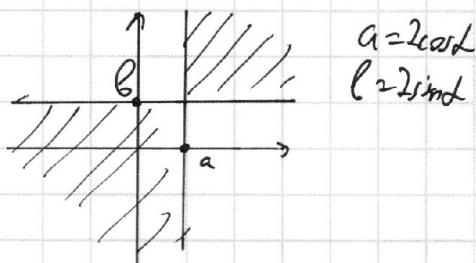
$$(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ - кр-л с центром в } (0;0) \text{ и радиусом } R=3$$

$$* (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \text{ - область правее прямой } x=2\cos\alpha \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \text{ - область выше прямой } y=2\sin\alpha \\ x-2\cos\alpha \leq 0 \text{ - область левее прямой } x=2\cos\alpha \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \text{ - область ниже прямой } y=2\sin\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$ график того пер-ка выделит те стороны го угла



Заметим, что $-2 \leq 2\cos\alpha \leq 2$ и $-2 \leq 2\sin\alpha \leq 2 \Rightarrow$ точка пересечения прямых $x=2\cos\alpha$ и $y=2\sin\alpha$ лежит внутри квадрата с центром в $(0;0)$ и стороной 4, т.е. внутри окр-ли $x^2+y^2=9$ (т.к. $2^2+2^2=8 < 9$)

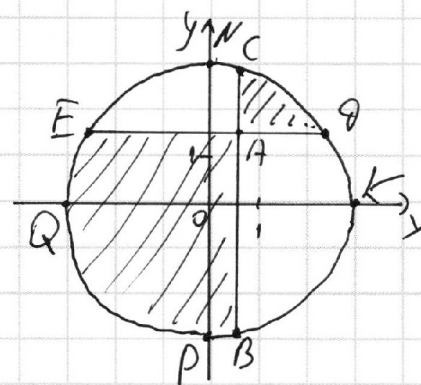
Тогда $\varphi(\alpha)$ выделит те стороны угла:

Заметим, что из соображений осевой симметрии окр-ли относительно Ox и Oy и PA (маленькая) совпадает с дугой NC (маленькой) по дуге

$$\text{Аналогично: } (\angle K) = (\angle E Q)$$

$$\text{Тогда } (\angle \emptyset) + (\angle EB) = (\angle QP) + (\angle NK) = \frac{L}{2}, \text{ где}$$

$$L - \text{длина окр-ли} \Rightarrow (\angle \emptyset) + (\angle EB) = \pi \cdot R = 3\pi$$



$$CB - \text{отрезок прямой } x=2\cos\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} (2\cos\alpha; \sqrt{9-4\cos^2\alpha}) \\ B(2\cos\alpha; -\sqrt{9-4\cos^2\alpha}) \end{pmatrix} \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = \sqrt{9-4\cos^2\alpha} - (-\sqrt{9-4\cos^2\alpha}) = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

$$\text{Аналогично: } DE = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

$$\text{Тогда периметр } M = (\angle \emptyset) + (\angle EB) + (CB + DE) = 3\pi + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим функцию $M(x) = 3\pi + 2\sqrt{9-4\cos^2 x} + 2\sqrt{9-4\sin^2 x}$

$$M'(x) = \frac{2(9-4\cos^2 x)'}{2\sqrt{9-4\cos^2 x}} + \frac{2(9-4\sin^2 x)'}{2\sqrt{9-4\sin^2 x}} = \frac{-8\cos x \cdot (-\sin x)}{\sqrt{9-4\cos^2 x}} + \frac{-8\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{9-4\sin^2 x}} =$$

$$= 8\sin x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 x}} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2x \left(\frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 x}} \right)$$

Найдем максимум этой функции; (Заметим, что $9-4\cos^2 x > 0$ и $9-4\sin^2 x > 0$)
 $\sin 2x = 0$

$$\sqrt{9-4\cos^2 x} = \sqrt{9-4\sin^2 x}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos^2 x = \sin^2 x \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases} \quad ??$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

Т.к. в функции $\sin x$ и $\cos x$ в квадрате, то от их знака ничего не зависит

$\Rightarrow$ достаточно рассмотреть только первую к.з.

$$M(0) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot 1} + 2 \cdot \sqrt{9-4 \cdot 0} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} = 3\pi + 4\sqrt{2}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot 0} + 2\sqrt{9-4 \cdot 1} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

$$3\pi + 2\sqrt{5} + 6 \vee 3\pi + 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{2}$$

$$~~26 + 2\sqrt{5}~~$$

$$56 + 24\sqrt{5} \vee 112$$

$$24\sqrt{5} \vee 56$$

$$\sqrt{2880} < \sqrt{3136} \Rightarrow M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{2}, \text{ достигается при } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi q}{2}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Отв: } M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{2}; \text{ при } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi q}{2}, q \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

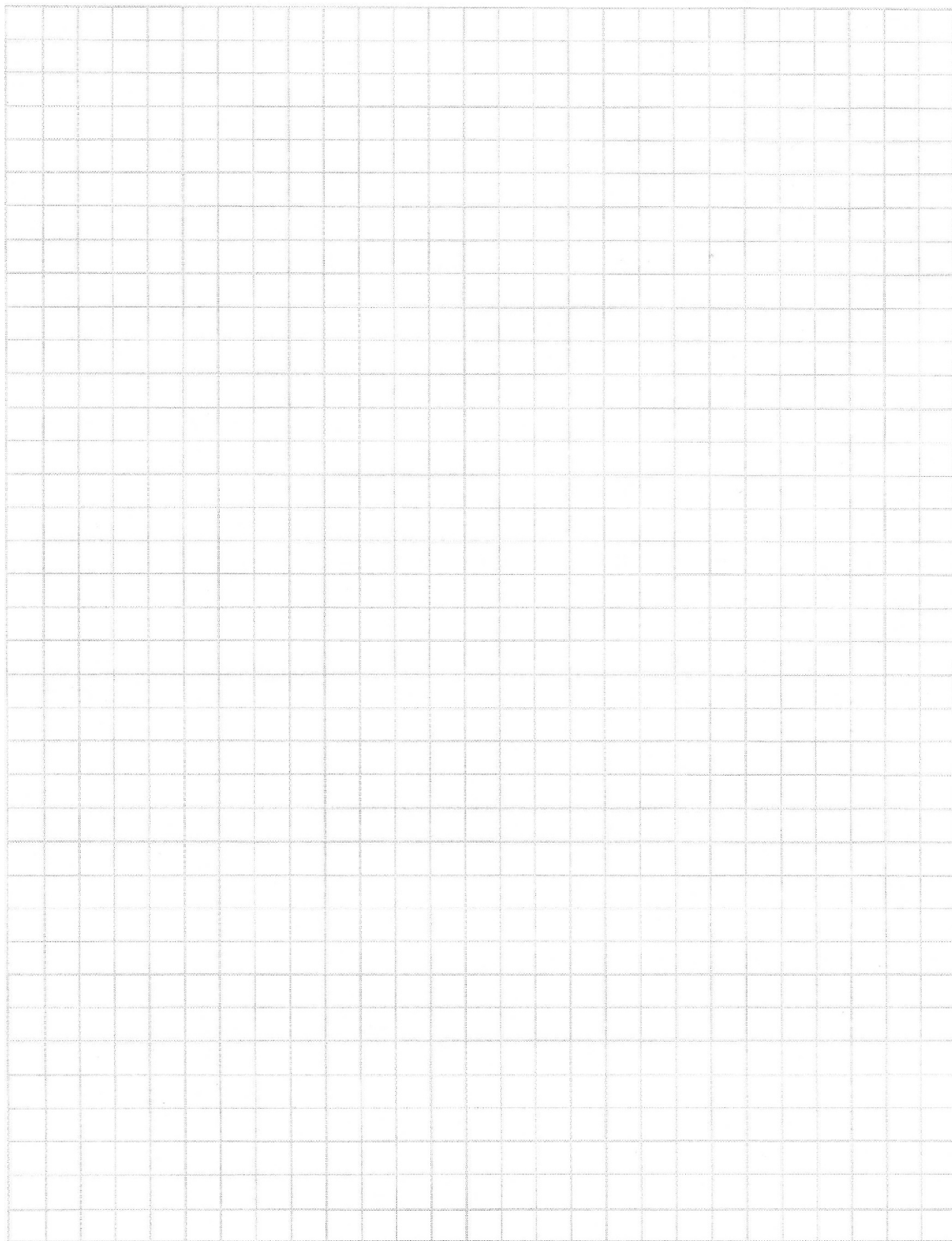
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



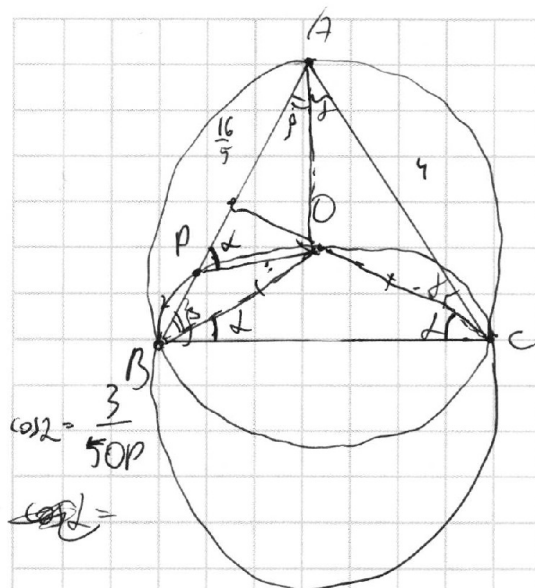


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{16}{5}; KP = 2; AC = 5$$

$$\angle AOB = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\beta$$

$$\angle AOB = 180^\circ - (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 180^\circ - 2\beta$$

$$\frac{180^\circ - (180^\circ - 2\beta)}{2} = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$$

$$= \alpha + \beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

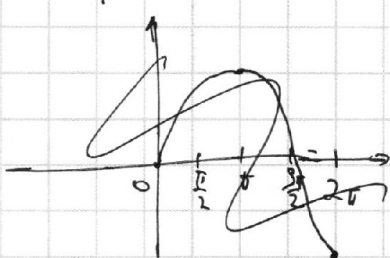
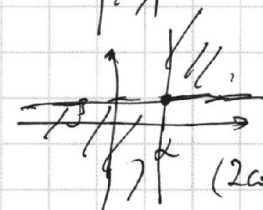
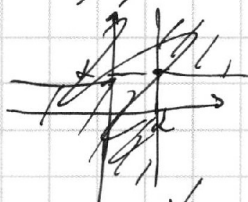
$$\frac{13}{5R} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}} = \frac{13}{5R} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 4}}{R} = \frac{13 \cdot \sqrt{R^2 - 4}}{5R^2} = \frac{\sqrt{65R^2 - 169}}{5R^2}$$

$$\frac{2}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{169}{25R^2}} = \frac{2 \sqrt{25R^2 - 169}}{5R^2} = \frac{\sqrt{100R^2 - 676}}{5R^2}$$

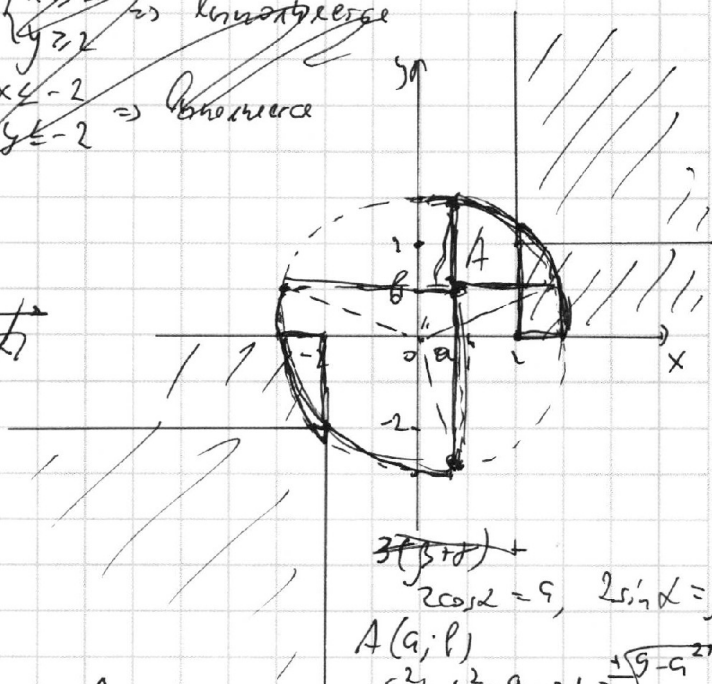
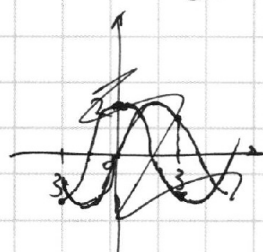
~6

① $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$; $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{линейное}$
 $x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0$
 $y \geq 2 \Rightarrow y - 2 \geq 0$
 $(x - 2)(y - 2) \geq 0$
 $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$
 $\sin\alpha = 0$
 $\begin{cases} x \leq -2 \\ y \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{линейное}$
 $x \leq -2 \Rightarrow x + 2 \leq 0$
 $y \leq -2 \Rightarrow y + 2 \leq 0$
 $(x + 2)(y + 2) \geq 0$

$$(x - 2)(y - 2) \geq 0$$



$$2\pi R \Rightarrow \pi R = 5\pi$$



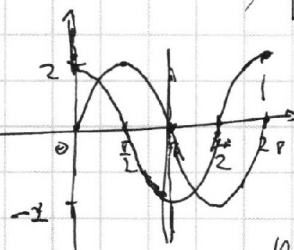
$$3\pi(\beta + \alpha) + 2\cos\alpha = 9, 2\sin\alpha = 8$$

$$A(a; b)$$

$$a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9 - a^2}$$

$$l = \sqrt{5 - a^2} + \sqrt{5 - a^2} = 2\sqrt{5 - a^2}$$

$$k = 2\sqrt{9 - b^2}$$



$$p = \frac{3\pi}{2} \cdot 3(\beta + \alpha) + 2(\sqrt{5 - a^2} + \sqrt{5 - a^2})$$

$$3\pi + 2\sqrt{5 - a^2 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A: 11 \text{ т.к. } A = \overline{a\overline{a}a\overline{a}} = \overline{a\overline{a}} \cdot 100 + \overline{a\overline{a}} = \overline{a\overline{a}} \cdot 101 = 11 \cdot a \cdot 101$$

$$A: 101, C: 101 \Rightarrow B: 101$$

$$1) a=1 \Rightarrow A=11 \cdot 101$$

$$C = 101 \Rightarrow C: 5$$

$$C = 51$$

$$B: 101 \Rightarrow B = 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot C \Rightarrow C = 11a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 55 \Rightarrow A = 5555$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = ?$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$x+y+1 = 0 \text{ т.к. } x, y > 0$$

$$xy = (x-3)(y+3) \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - xy + y^2) \Rightarrow x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x - y = 5$$

$$= 3((x-y)^2 + 3xy) = 3(x-y)^2 + 9xy \Rightarrow x^3 - y^3 - 9xy = 3(x-y)^2 = 27$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$= \cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi y - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \pi y = 2k + 1 - x \\ \pi y = 3x - 2k - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi y - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 + 2k \\ x + y = 1 + 2l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n_3 \text{ и } n_4 \text{ реш, если } 4 \text{ делит } 12 \\ \frac{4 \cdot 3}{n \cdot (n-1)} = \frac{12}{n(n-1)} \end{aligned}$$

$$0, \text{ т.к. } 4 \nmid 12$$

$$\begin{aligned} n_5 \text{ и } n_6 \text{ реш} \\ \frac{(x+4)(x+5)}{n(n-1)} = \frac{42}{n(n-1)} \end{aligned}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 42; x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169 = 13^2$$

$$x_{1,2} = -7 \pm 13$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -20 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(x) = 2\sqrt{9-4\cos^2 x} + 2\sqrt{9-4\sin^2 x} + 3\pi$$

$$P'(x) = 2 \frac{(9-4\cos^2 x)'}{2\sqrt{9-4\cos^2 x}} + 2 \frac{(9-4\sin^2 x)'}{2\sqrt{9-4\sin^2 x}} = \frac{-8\cos x \cdot (-\sin x)}{\sqrt{9-4\cos^2 x}} + \frac{-8\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{9-4\sin^2 x}} = \frac{1}{25x}$$

$$= 8\cos x \sin x \left(\frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 x}} \right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{9-4\sin^2 x} = \sqrt{9-4\cos^2 x}$$

$$9-4\sin^2 x = 9-4\cos^2 x$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$P = 6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$P = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$6 + \sqrt{20} \vee \sqrt{112}$$

$$56 + 12\sqrt{20} \vee 112$$

$$12\sqrt{20} \vee 56$$

$$\sqrt{2880} \vee \sqrt{3136}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 56 \\ \hline 112 \\ 336 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 280 \\ \hline 424 \\ 336 \\ \hline 760 \\ 3136 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(x; 2k+1-x); (x; 3x-2k-1)$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$x \in \{-9, -2, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
где четных x : $y \in 10$ вариантов $\Rightarrow 5 \cdot 10 = 50$
где нечетных x : $y \in 9$ вариантов $\Rightarrow 5 \cdot 9 = 36$ вар.

86



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{p}{a} = \cos$
 $p = a \cdot \cos \frac{\pi}{n}$

$\sin(\beta + \gamma) =$
 $= \sin \beta \cdot \cos \gamma +$
 $+ \sin \gamma \cdot \cos \beta =$
 $= \frac{13}{5R} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}} +$
 $+ \frac{2}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{16}{25R^2}}$

$\sin \beta = \frac{r}{a}$
 $\cos \beta = \frac{13}{5R}$
 $\cos \gamma = \frac{2}{R}$

$\beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$

$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{5}{8}$
 $\beta + \gamma = \frac{5}{8} \alpha$

$180^\circ - 2\beta - \alpha =$
 $= 180^\circ - \beta - \alpha$

$\lg \frac{1}{2} = \frac{R}{a \cdot \cos \frac{\pi}{n}} \Rightarrow R = a \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \lg \frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{5}{8}$
 $\beta + \gamma = \frac{5}{8} \alpha$