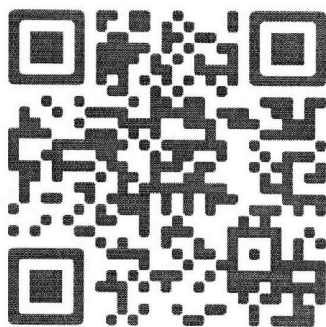




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

A - четырехзн. число из одинаковых цифр - это $1111 \cdot k$, где $k \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$.

$1111 = 11 \cdot 101$. 101 - простое число. A · B · C - квадрат, значит в этом произведении присутствует еще один множитель 101. $C \div 101$ тк $C < 100 \Rightarrow B \div 101$.

$B \div 101$ и в записи B есть цифра 1. Значит $B = 101$. Если нет, и $B = n \cdot 101$, где $n \in \{2, 3, 4, \dots, 9\}$, то B ~~записывается~~ записывается как $n, 0, n$, а $n \neq 1$, и B не содержит 1.

$A \div 11, B \div 11 \Rightarrow C \div 11$ и C содержит цифру 5. Значит и $C < 100$.

Значит, $C = 55$, других двузначных чисел с таким свойством нет.

~~также~~ $C \div 5 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \div 5$, но 5 должна входить в четной степени в $A \cdot B \cdot C \Rightarrow A \div 5$. $a = 5555$

Итого, единственная тройка $(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \sqrt{2}, \quad x, y > 0 \text{ по условию}$$

$$K(x, y) = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$K(x-3, y+3) = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad K(x, y) = K(x-3, y+3)$$

$$\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \Rightarrow (x+y+1)xy = (x+y+1)(x-3)(y+3), \quad x \neq 3$$

$$x \neq 3, \quad x, y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 1, \text{ значия } x+y+1 \neq 0, \text{ на это выражение сократим.}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} - 3y + 3x - 9 \quad -y + x - 3 = 0$$

$$x = y + 3$$

Подставим $x = y + 3$ в M :

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$\text{Ответ: } M = 27$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$
 $\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0$
 $\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x$
 $\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos(\pi x - \pi y)$
 $\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$
 $\cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y)$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = y + 1 + 2n \\ x = -y + 1 + 2k \end{cases} \text{ — подходят все такие пары чисел.}$$

б) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases}$$

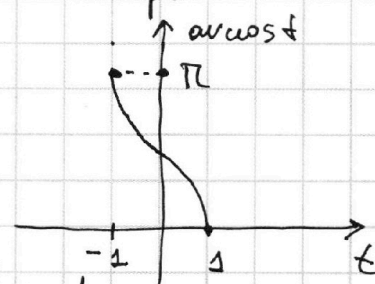
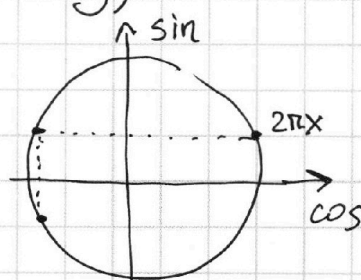
$\arccos t \leq \pi$, причем $\arccos t = \pi \Rightarrow t = -1$

Зная, $x \neq -4$ и $y \neq -9$. С учетом ОДЗ:

$$\begin{cases} x \in (-4; 4] \\ y \in (-9; 9] \end{cases}$$

Построим график $y(x) = 3x - 1 + 2n$ и $y(x) = -x + 1 + 2k$

и посчитаем кол-во целых точек на заданных промежутках





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

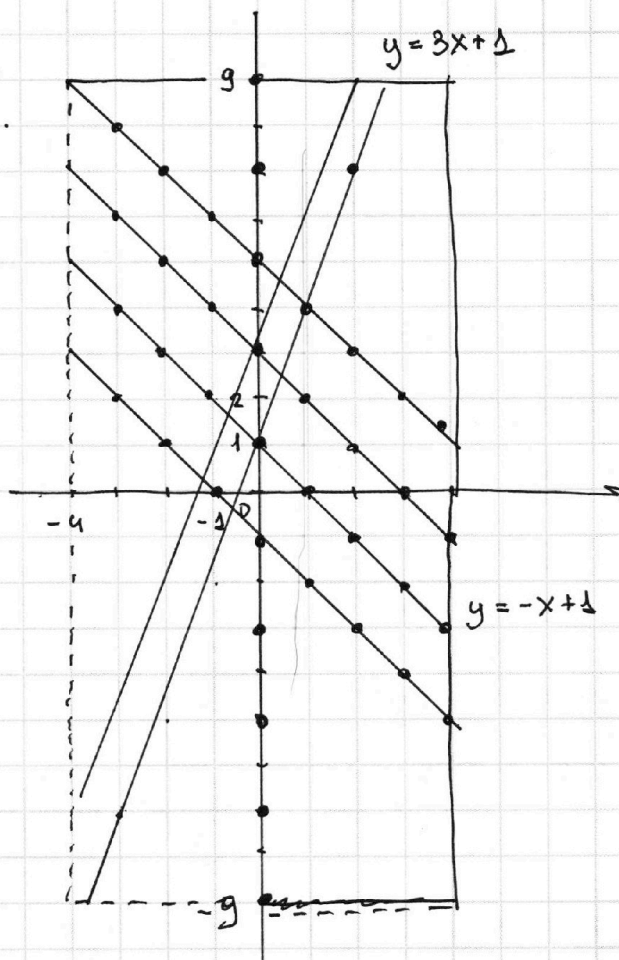
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нетрудно заметить, что на
каждый $x \in \mathbb{Z}$, $x \in (-4; 4]$
приходит 9 $y \in \mathbb{Z}$, $y \in (-9; 9]$.

Значит, всего у нас 72
значения.



Ответ: а) $\begin{cases} y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$

б) 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Пусть было N одинаковых билетов всего, а выделено x билетов.
Вероятность того, что Петя и Вася попадут на концерт с 4 билетами:

$$P_1 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

Вероятность, что они попадут с x билетами при том же N :

$$P_2 = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$

Известно, что $3,5P_1 = P_2$

$$3,5 \cdot \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{x(x-1)}{N(N-1)} \quad \begin{array}{l} \text{Из условия } > 2 \Rightarrow \text{на } N(N-1) \text{ можно} \\ \text{сократить} \end{array}$$

$$42 = x(x-1)$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x-7)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-6 \end{cases}$$

Из условия $x > 4 \Rightarrow x=7$, было выделено 7 билетов

Ответ: 7

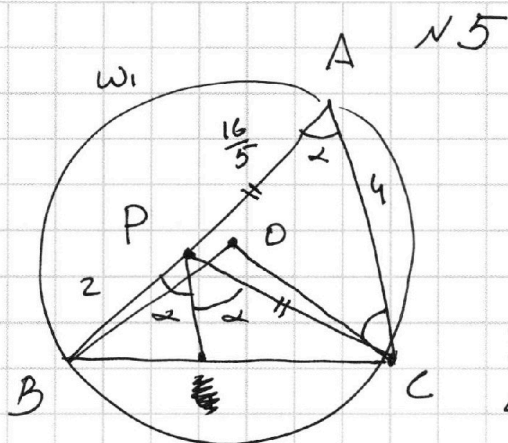


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BAC = \alpha$$

$\angle BOC = 2\alpha$, тк $\angle BOC$ - центральный,
 $\angle BAC$ - вписанный, они
опираются на дугу BC

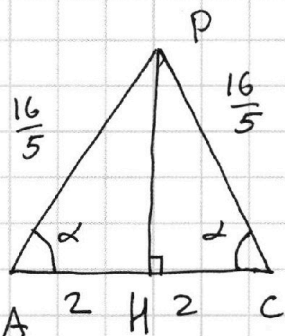
$$\angle BPC = \angle BOC \quad \text{т.к. } P, O \in \omega_2$$

$$P, O, B, C \in \omega_2.$$

Проведем биссектрису $\angle BPC$ - PL.
 $\angle BPL = \angle CPL = \alpha$

$$\angle BPC = 2\alpha - \text{внешний для } \triangle PAC \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = \alpha.$$

$\triangle APC$ - равнобедренный, $AP = PC = \frac{16}{5}$



PH - высота, она же медиана, HC = 2

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$$

$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ - треугольник остроугольный

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4 \left(2 + \frac{16}{5}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{4} \cdot \frac{26}{5} = \frac{13\sqrt{39}}{5}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

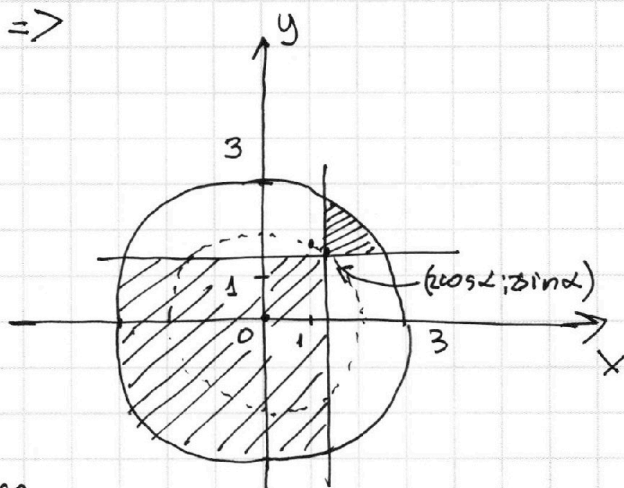
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \sqrt{6}$$

$x^2 + y^2 \leq 9$ - окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3.

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$

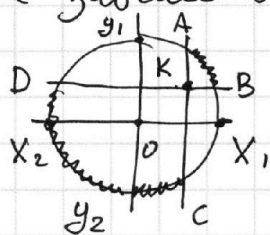
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



Т.к. $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4$,
точка $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ лежит
на окружности с центром
 $(0; 0)$ и радиусом 2 - точка
 $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

$\varphi(\alpha)$ заштрихована на графике.

Видно, что та часть периметра M , которую составляет окружность, не зависит от α .



$\cup Y_1A = \cup Y_2C$ и $\cup DX_2 = \cup BX_1$. Тогда
эта часть периметра всегда равна π .

$$\cup AB + \cup DX_2 + \cup X_2Y_2 + \cup Y_2C = \cup AB + \cup Y_1A + \cup BX_1 + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Значит, нужно максимизировать $AC + BD$

$$AC = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}; \quad BD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = 2\sqrt{5 + 4\cos^2\alpha}$$

$$AC + BD = 2(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{5 + 4\cos^2\alpha})$$

$$\frac{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{5 + 4\cos^2\alpha}}{2} \leq \sqrt{\frac{9 - 4\cos^2\alpha + 5 + 4\cos^2\alpha}{2}} = \sqrt{7}. \text{ Равенство}$$

достигается при $9 - 4\cos^2\alpha = 5 + 4\cos^2\alpha$

отсюда макс. $M: \pi + \pi\sqrt{7}$

Ответ: макс $M = \pi + \pi\sqrt{7}$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

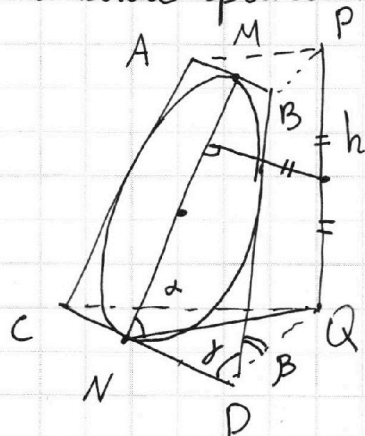
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

Если в многограннике шар, касающийся всех ребер многогранника, то все его грани - выпуклые многоугольники. $\Rightarrow$ все боковые грани пирамиды - выпуклые трапеции



$$PQ = h, MN = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \cos \gamma \cdot \cos \beta$$

$$BD = AC = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{MN}{BD} = \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{h} \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$$

$$QN = \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$ND = \frac{MN}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

$$MB = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

$$ND - MB = \frac{h}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \gamma$$

$$DQ = \sqrt{QN^2 + ND^2} = \frac{h}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \alpha}}$$

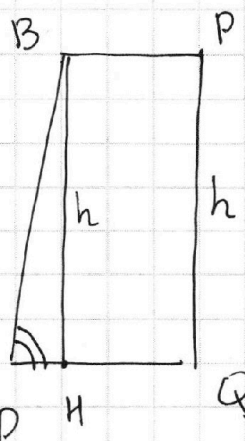
$$\frac{DN}{DQ} = \frac{ND - MB}{ND} = \frac{h \operatorname{tg} \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$DN = \frac{h}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \alpha}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = h \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \alpha}}$$

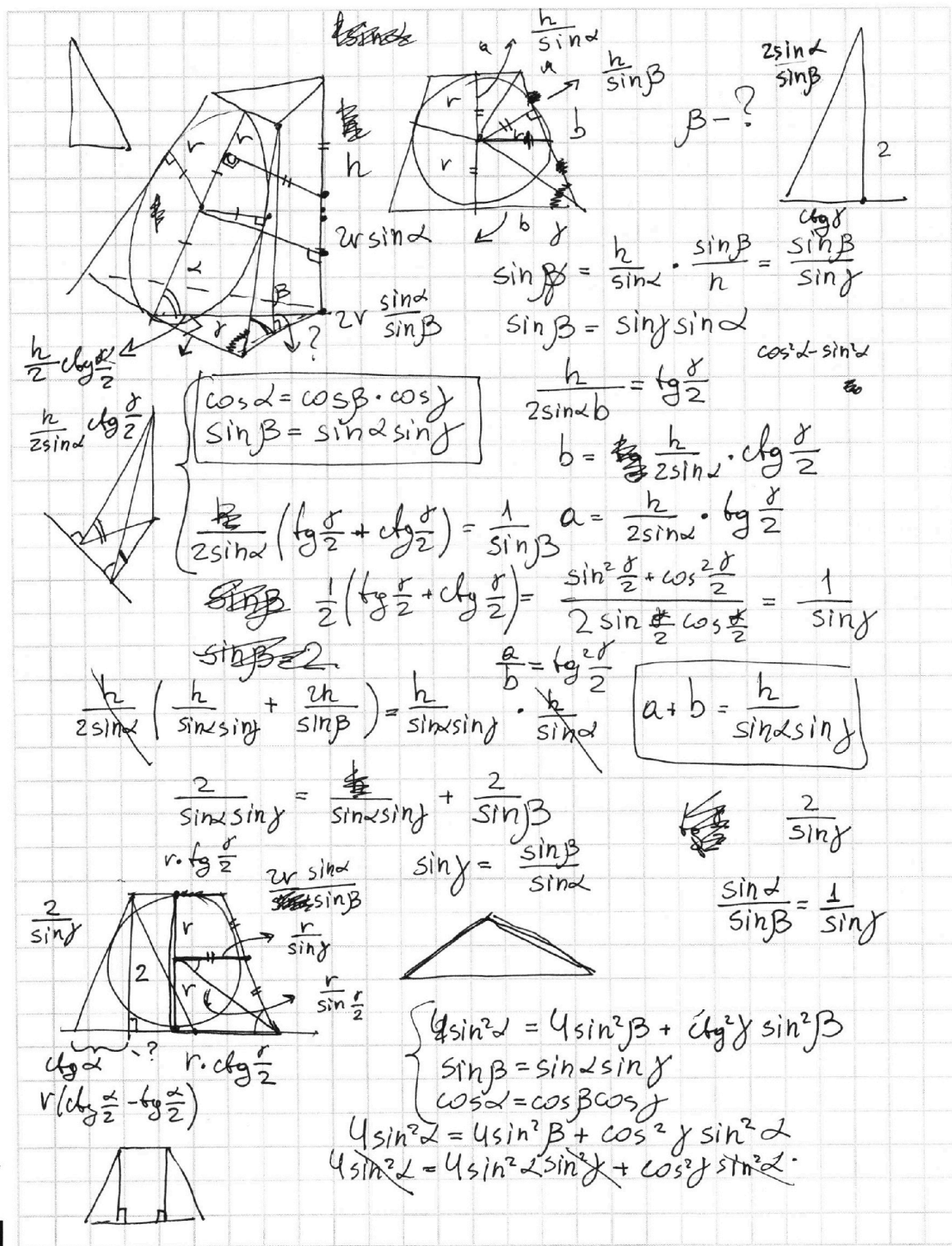
$$\begin{cases} \sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos \gamma \sin \gamma} \cdot \frac{1}{\cos \gamma \sin \gamma}$$



Это система из 3-х уравнений с 3 неизвестными. Решив ее, получим $\cos \beta = \frac{1}{3}$.

$$\beta = \arccos \frac{1}{3}$$



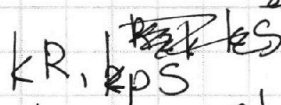
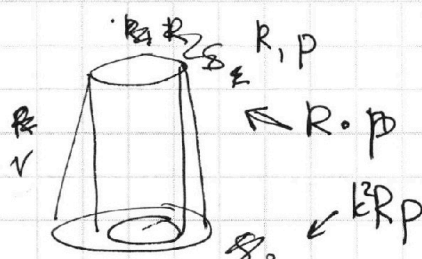
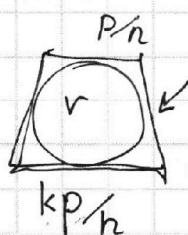
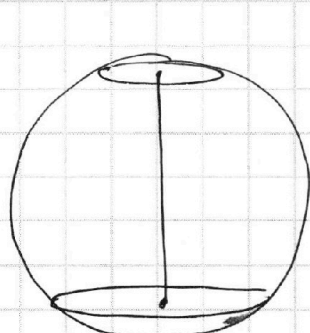


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

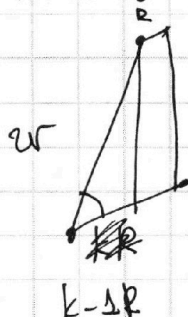
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$p \frac{k+1}{2} - g$$



$$S_b = r \cdot p \frac{k+1}{2}$$
$$(k^2 - 1) R n$$

$$w \cdot \cos \alpha = (k-1) R$$

$$r \cdot p \frac{k+1}{2} \cdot \cos \alpha = (k-1)^2 R p$$

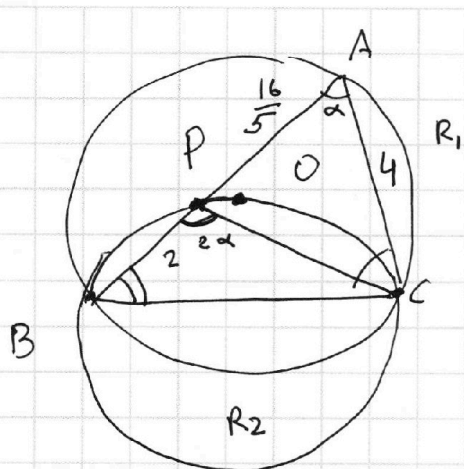


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{16}{5} \quad BP = 2 \quad AC = 4$$

$S_{ABC} = ?$

$$\frac{b}{\sin \alpha} = 2R_1 \quad \frac{b}{\sin 2\alpha} = 2R_2$$

$$2R_2 \sin 2\alpha = R_1 \sin \alpha$$

$$\frac{4}{\sin \beta} = 2R_1 \quad \frac{PC}{\sin \beta} = 2R_2$$

$$\frac{PC}{4} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

$$PC = \frac{4}{2 \cos \alpha} = \frac{16}{5}$$

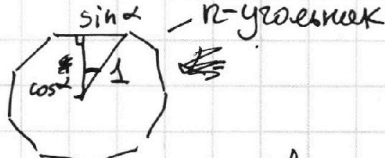
$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4 \left(2 + \frac{16}{5}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{4} \cdot \frac{26}{5} = \frac{\sqrt{39} \cdot 13}{10}$$



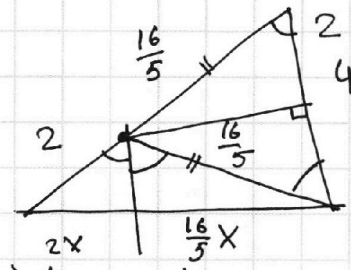
$$r(2b + 2a) = 2la$$

$$r(b + a) = la$$

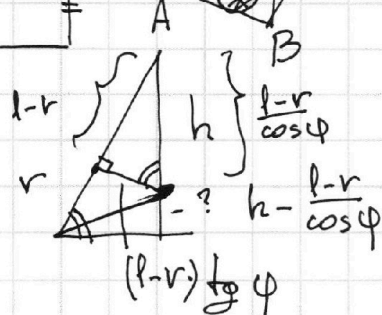
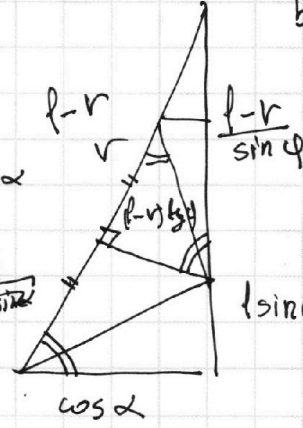
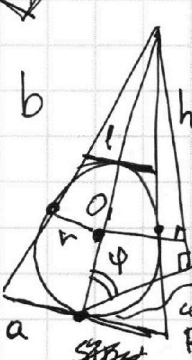
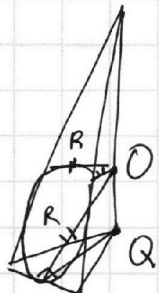
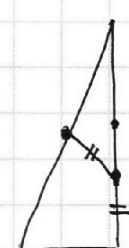
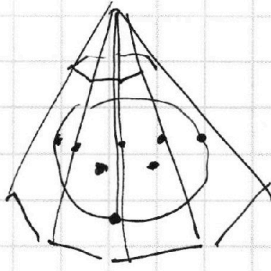
$$r = \frac{la}{b + a}$$

$$a = \sin \alpha$$

$$b = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$



Хорошо!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$$

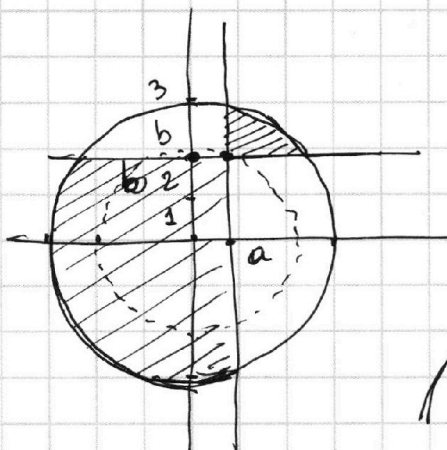
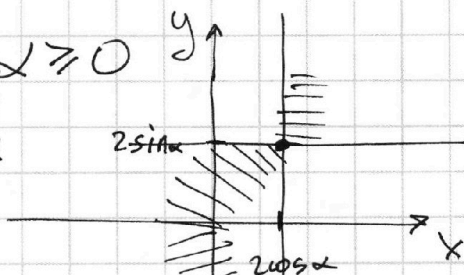
$$xy - 2\cos\alpha y - 2\sin\alpha x + 4\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$$x - 2\cos\alpha \geq 0$$

$$y - 2\sin\alpha \geq 0$$

$$x \geq 2\cos\alpha$$

$$y \geq 2\sin\alpha$$

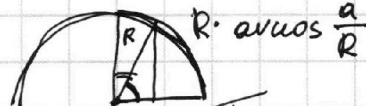


$$a^2 + b^2 = 4$$

$$b^2 = 4 - a^2$$

$$-b^2 = a^2 - 4$$

$$R \cdot \arcsin \frac{a}{R} \cos = \frac{a}{R}$$

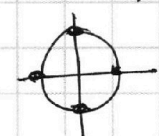


$$R \cdot \arccos \frac{a}{R}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

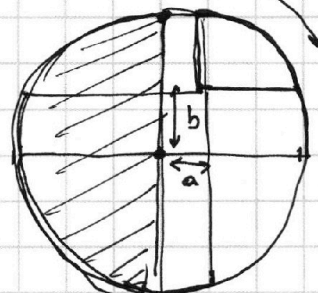
$$|a| \leq 2$$

$$a^2 \leq 4$$



$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{R} - \arccos \frac{a}{R}$$

По окружности круга 3π !



$$2\sqrt{9 - a^2} + 2\sqrt{9 - b^2} =$$

$$= 2\sqrt{9 - a^2} + 2\sqrt{5 - a^2} - \text{нужен макс.}$$

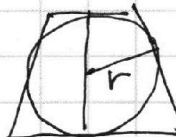
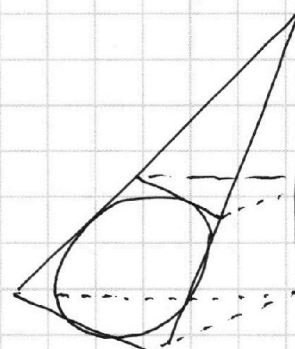
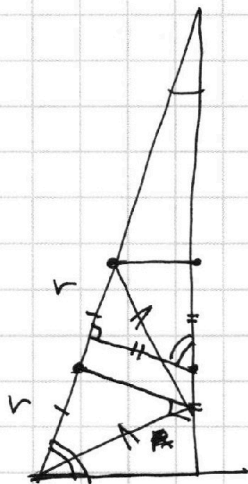
$$\frac{1}{\sqrt{9 - a^2}} + \frac{1}{\sqrt{5 - a^2}}$$

$$\sqrt{9 - a^2} = \sqrt{5 - a^2}$$

$$a = 0 - \text{мек.}$$

$$\sin = 0 \text{ или } \cos = 0 \quad b^2 = 4$$

$$\angle = \frac{\pi R}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

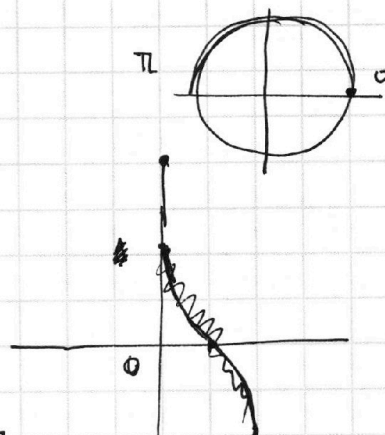
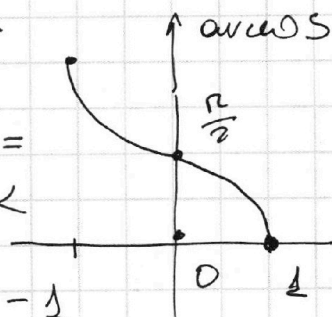
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 7} \\ 70 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(\log \frac{x}{2} - \log \frac{y}{2}) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$



$$\arccos \frac{x}{4} = \pi$$

$$\frac{x}{4} = -1$$

$$x \neq -4$$

$$\frac{y}{9} = -1$$

$$y \neq -9$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \in (-1; 1] \\ \frac{y}{9} \in (-1; 1] \end{cases}$$

$$x \in (-4; 4]$$

$$y \in (-9; 9]$$

Перед оп! ура-а!

$$x = -3$$

$$y + 1 + 2n = -9$$

$$y + 1 + 2k = -3$$

$$\begin{aligned} y &= 3x - 1 + 2n \\ y &= -x + 1 + 2k \\ y &= \end{aligned}$$

72

$$r^2 + (1-r)^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \varphi} (1 \sin^2 \varphi - 1 + r)^2$$

$$r = \frac{1 \sin \alpha}{\sqrt{1 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1}} = 1$$

$$r^2 \sin^2 \varphi + (r-1)^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha + (r-1 \cos^2 \varphi)^2$$

$$r^2 - 2r \cos^2 \varphi + 1 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + r^2 - 2r \cos^2 \varphi$$

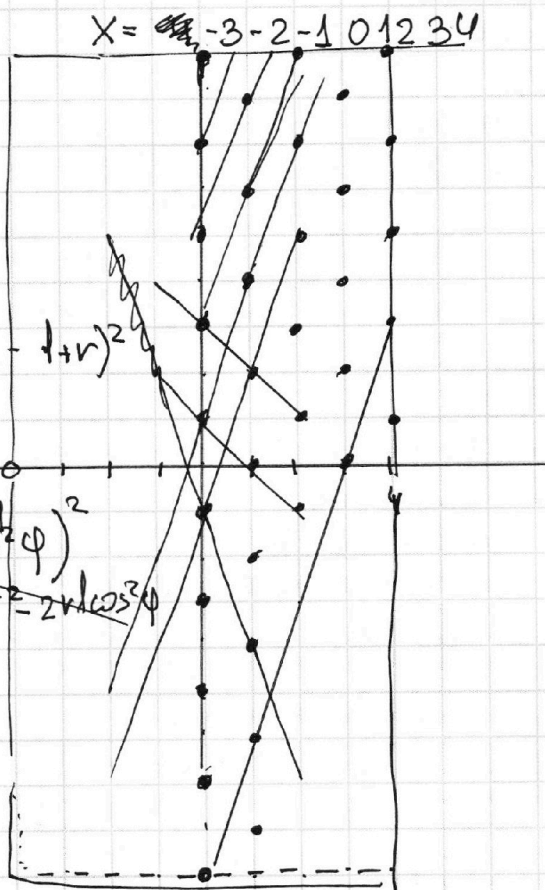
$$1 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + 1 \cos^4 \varphi$$

$$\frac{4}{\sin^2 \gamma} = 4 + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma}$$

$$4 = 4 \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma$$

$$3 = \sin^2 \gamma$$

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \gamma} = 1$$



9 9 9 9 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x \neq 3$$

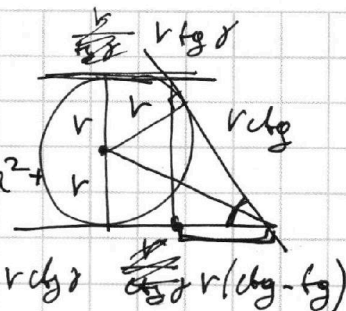
$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x - y = 3 \quad x = y + 3$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y - 27y = 27$$



$$r \cdot \sqrt{2} = r \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

① 1111 ← 101 · 11 101-процессор???

$$A = 101 \cdot 11 \cdot k, k \in [1; 9]$$

$$B = 101$$

$$C = 5 \text{ и } C : 11 \Rightarrow C = 55$$

$$\begin{matrix} 5555 \\ 101 \\ 55 \end{matrix}$$

$$B \text{ а?}$$

$$\begin{matrix} 1017 \\ 3 \\ \hline \end{matrix}$$

④ N-ограни.

$$P_1 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{(N-1)}$$

$$P_2 = \frac{k}{N} \cdot \frac{(k-1)}{N-1}$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{N(N-1)} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

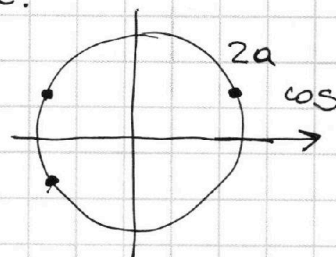
$$7 \cdot 6$$

$$42 = k(k-1)$$

$$k = 7$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$



$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin(a-b)$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a - \sin b \sin a - \cos a \cos b = 0$$

$$-\cos 2a$$

$$-\cos(a-b)$$

$$\cos 2a = -\cos(a-b)$$

$$2a = \pi - a + b + 2\pi n$$

$$2a = \pi + a - b + 2\pi k$$

$$3a = \pi + b + 2\pi n$$

$$a = -b + \pi + 2\pi k$$

$$3x = y + 1 + 2\pi n$$

$$x = -y + 1 + 2\pi k$$

$$4\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha = 4$$

$$4\sin^2 \alpha = 4 - 4\cos^2 \alpha$$

$$-4\sin^2 \alpha$$

