



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$A = \overline{aaaa} = 1111a$$

~~Вс~~

$n \in \mathbb{N}$

$$ABC = n^2$$

$$1111a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow n : 11, n : 101 \quad (101, 11 - \text{простые})$$

~~а~~

$$n = 1111K, K \in \mathbb{N}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 1111^2 K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 1111 K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2 \Rightarrow a \cdot B \cdot C : 101,$$

при этом a - цифра, $C < 100 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B = 606} \quad (\text{хотя бы 1 цифра} = 6)$$

$$a \cdot 606 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$6aC = 11K^2 \Rightarrow 6aC : 11$$

~~6aC~~

$$a - \text{цифра, } C : 11 \Rightarrow \boxed{C = 33} \quad (\text{хотя бы 1 цифра} = 3)$$

$$6 \cdot a \cdot 33 = 11 \cdot K^2$$

$$18a = K^2$$

$$2 \cdot 9 \cdot a = K^2$$

$a \neq 0$

Произведение $2 \cdot 9 \cdot a$, где a - цифра явл. квадратом

только при $a \in \{2; 8\}$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33)$$

$$(8888; 606; 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 \neq 0$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$0 = x - y - 2$$

$$x = y + 2$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = \cancel{y^3} + 3y^2 - 2 + 3y - 4 + 8 - \cancel{y^3} - 6(y+2)y = \\ &= \cancel{6y^2} + 12y + 8 - \cancel{6y^2} - 12y = 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
/ ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3
0

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) / \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = -\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi x + \pi y + 2\pi n \end{cases}$$

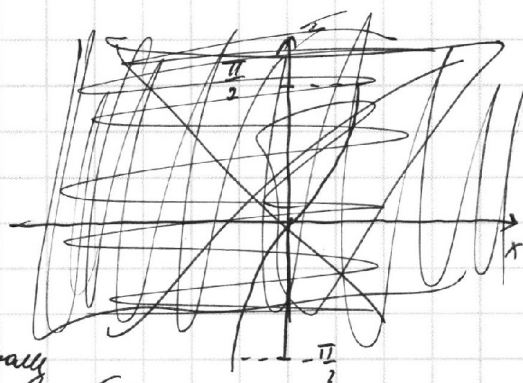
$$\begin{cases} x = -y + 2k & (1) \\ 3x = y + 2n & (2) \end{cases}$$

2) ~~Решение по формулам~~

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \arcsin \frac{y}{2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{6} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{2} \in [-1; 1] \\ x \in [-6; 6] \\ y \in [-2; 2] \end{cases}$



2) $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$.

Заметим, что $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому неравенство выполняется всегда на области определения, кроме случая $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{x}{6} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{2} \in [-1; 1] \\ \frac{x}{6} \neq 1 \\ \frac{y}{2} \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-6; 6] \\ y \in [-2; 2] \\ x \neq 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение, представлено:~~

~~Решение~~
~~Решение~~

~~Решение~~

3) Заметим, что если пара (x, y) подходит одному из уравнений (1) или (2), то она подходит и другому, т.к. $[x+y]$ и $[3x-y]$ имеют одинаковую

четность, и только она определяет, подходит ли это решение. Поэтому най-во всех решений можно найти почитав най-во решений (1):

~~Если x и y оба нечетны, то $x+y$ четно, а $3x-y$ нечетно, что невозможно.~~
Посчитаем най-во всех решений, а потом исключим лишнюю $x=6$
 $y=2$.

$$x+y=2k$$

Если $y \in \{-2; 0; 2\}$, то x - любой четный:
 $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$

↓
21 реш

Если $y \in \{-1; 1\}$, то x - любой нечетный
 $x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$

↓
12 реш.

Итого : $21+12-1 = 32$ реш

Ответ: 1) $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$
 $\begin{cases} (-\tilde{y}+2k; \tilde{y}) \\ (\frac{\tilde{y}+2k}{3}; \tilde{y}) \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}; \tilde{y} \in \mathbb{R}$
2) 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

($k < n$)

Пусть есть n человек и k билетов. Каждый билет выдает поощрительную сумму, что 2 выбранных человека получают билеты.

х - кол-во сп-в распределения билетов, при которых оба получают.

Выберем из n человек k билетных:

$$P = \frac{x}{C_n^k}$$

кол-во сп-в, при которых получат билет:

$\langle \dots \rangle$

$\langle \dots \rangle$

Ася: C_{n-1}^{k-1}

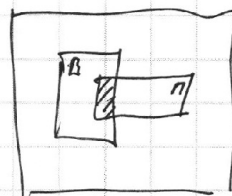
Лера: C_{n-1}^{k-1}

Никто: C_{n-2}^k

$$2C_{n-1}^{k-1} - x + C_{n-2}^k = C_n^k$$

$$x = 2C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^k - C_n^k$$

$$P = \frac{2C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} + \frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} - 1$$



$$\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{(n-1)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-1)! \cdot (n-k)! \cdot n! \cdot n} = \frac{k}{n}$$

$$\frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k-2)! \cdot n!} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-1)n}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = \frac{2k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-1)n} - 1. \quad (1)$$

~~Предположим, что в конце~~

Если $n \neq 4$, то при доб. выборе билетов

p не изменится, что, наоборот, укажет

вероятность в начале выражается (1).

В-мел-во билетов в конце
Предположим, что в конце были k билетов
($k \geq n$)

в конце $= 1$

$$p_{\text{начало}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 = \frac{1}{6} \quad | \cdot 6n(n-1)$$

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) - 6n(n-1) = n(n-1)$$

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) = 7n(n-1)$$

$$48n - 48$$

$$6(n^2 - 9n + 20) = (n-1)(7n-48)$$

$$6n^2 - 54n + 120 = 7n^2 - 48n + 48$$

$$n^2 + n + 82 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 82 < 0$$

нет реш., зн. в конце $\frac{6 \leq n}{n-1}$

и можем пользоваться (1) для $k=0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b \cdot \left(\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 \right) = \frac{2b}{n} + \frac{(n-b)(n-b-1)}{(n-1)n} - 1$$

$$b(8(n-1) + (n-4)(n-5) - n(n-1)) = 2b(n-1) + (n-b)(n-b-1) - n(n-1)$$

$$b((8-n)(n-1) + (n-4)(n-5)) = (2b-n)(n-1) + (n-b)(n-b-1)$$

$$b(-n^2 + 9n - 8 + n^2 - 9n + 20) = 2b(n-1) - n^2 + n$$

$$= 2bn - n^2 - 2b + n + n^2 - 2bn + b^2 - n + b$$

$$b \cdot 12 = b^2 - b$$

$$b^2 - b - 72 = 0$$

$$\text{Дискриминант: } b = -8 \quad \text{ⓧ}$$

$$b = 9$$

$$b = 9$$

$$\text{Ответ: } 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} \cos \alpha &= a \\ 5\sqrt{2} \sin \alpha &= b \\ a^2 + b^2 &= 100 \quad (*) \end{aligned}$$

$$(x + a)(y + b) \leq 0$$

График (1) — четверти плоскости как на рис. 1.

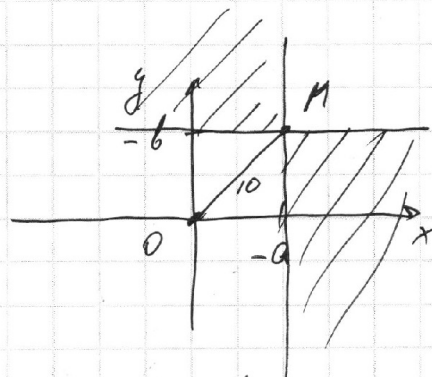


рис. 1.

При этом из (*) следует, что $OM = 10$ (M — точка пересечения прямых, опр. четверти плоскостей)

График (2) — круг с центром в O ; $r = 13$.

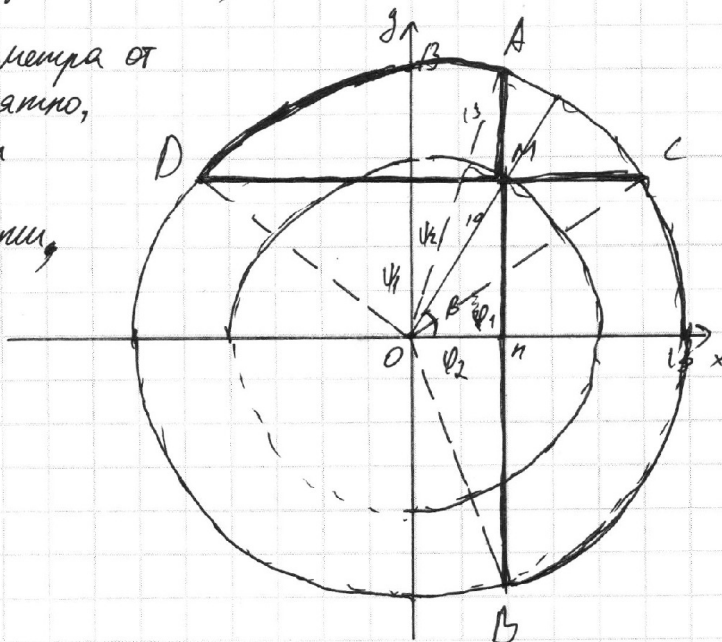
Получим зависимость периметра от положения точки M . Поскольку, то в силу симметрии можно рассмотреть только положение т. M в I четверти, ~~при остальных~~ при остальных положениях ответ эсен.

$$\angle(OM, x) = \beta$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{10 \cos \beta}{13}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \varphi_2 = \frac{10 \cos \beta}{13} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi_1 + \psi_2 = \pi$$

$$\overset{\sim}{CB} + \overset{\sim}{AD} = \pi \quad (\text{углы дуг})$$

$$\overset{\sim}{AD} + \overset{\sim}{CB} = \pi \cdot 13 \quad (\text{длина дуг})$$

~~Найдем радиусы, радиусы дуг.~~

$$AB = 2 AM = 2 \sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta}$$

$$CD = 2 \sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta}$$

$$P(\beta) = 13\pi + 2 \left(\sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta} + \sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta} \right)$$

Найдем β , при котором $P(\beta) \Rightarrow \max$

$$\underbrace{\sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta}}_{a_1} + \underbrace{\sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta}}_{b_1} \rightarrow \max$$

$$\text{Есть } a_1^2 + b_1^2 = 2 \cdot 13^2 - 10^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \dots$$

$\uparrow$ не зависит от $\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из пер-ва о средних (среднее квадратичное и среднее арифметическое) следует, что наиб. значение $a+b$ достигается при $a=b$, $\boxed{\beta = 45^\circ}$

$$P_{\max} = 13\pi + 4 \sqrt{13^2 - 10^2 \cdot \frac{1}{2}} = 13\pi + 4\sqrt{119}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подходящие значения T, M
отмечены на рис.

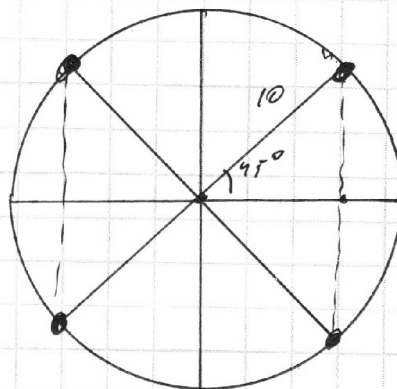
$$5\sqrt{2} \cos \alpha = \pm 10 \cdot \cos 45^\circ = \pm 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $P(M)_{\max} = 13\pi + 45,9$

$$\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Решения, порожденные (1):

$$x = -y + 2K$$

$$x + y = 2K$$

$$K \in [-4; 4]$$

$$K \in [-4; 3]$$

$$x \in [-6; 6]$$

$$y \in [-2; 2]$$

$$x + y \in [-8; 8]$$

(м.к. $x=6$ нечетн.)
 $y=2$

(имеется выбор, что $x+y$ может принимать любые значения из промежутка, и только такие)

Получаем, что для $\forall K \in [-4; 3]$ можно выбрать $\forall x \in [-6; 6]$, которому будет соответствовать единственное y , и при этом пер-во выполнено.

Итого: $\text{в. } 13 = 104$ решения

Решения, порожденные (2):

$$3x = y + 2n$$

$$3x - y = 2n$$

$$3x \in [-18; 18]$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ - 50 \\ \hline 119 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- Решения, порожденные (1):

$$x+y=2k$$

$$y=2: x - \text{любое чётное, кроме } 6$$

$$x \in \{4; 2; 0; -2; -4; -6\} \rightarrow \underline{6 \text{ реш}}$$

~~$y=3; x - \text{любое}$~~

$$y=1; y=-1: x - \text{любое нечётное:}$$

$$x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \rightarrow \underline{6 \text{ реш}}$$

$$\rightarrow \underline{6 \text{ реш}}$$

$$y=0, y=-2: x - \text{любое чётное}$$

$$x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\} \rightarrow \underline{7 \text{ реш}}$$

$$\underline{7 \text{ реш}}$$

$$\text{Итого: } 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 18 + 14 = \underline{32 \text{ реш}}$$

- Решения, порожденные (2)

$$3x-y=2k$$

~~$x - \text{любое чётное}$~~

Проводим рассуждения аналогичные предыдущему пункту, ограничение есть только на чётность, а

$3x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую чётность.

$$\text{Итого: } \underline{32 \text{ реш}}$$

- Из того, что на то, подходит ли пара ~~реш~~ (x, y) зависит только их чётность следует, что $\forall (x, y)$ удовл. (1) удовл. (2)

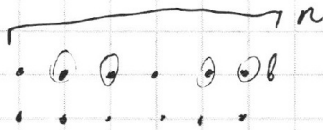


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

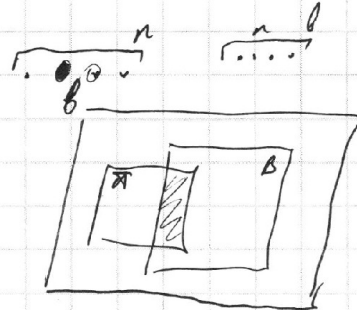
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получит Лена: C_{n-1}^{b-1}
Вася: C_{n-1}^{b-1}
Виктор: C_{n-2}^b

Всего: C_n^b



$$P = \frac{x}{C_n^b}$$

~~2 C_{n-1}^{b-1} - x + C_{n-2}^b = C_n^b~~

$$2 C_{n-1}^{b-1} - x + C_{n-2}^b = C_n^b$$

$$2 \frac{C_{n-1}^{b-1}}{C_n^b} - p + \frac{C_{n-2}^b}{C_n^b} = 1$$

$$p = \frac{2 C_{n-1}^{b-1}}{C_n^b}$$

$$| : C_n^b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

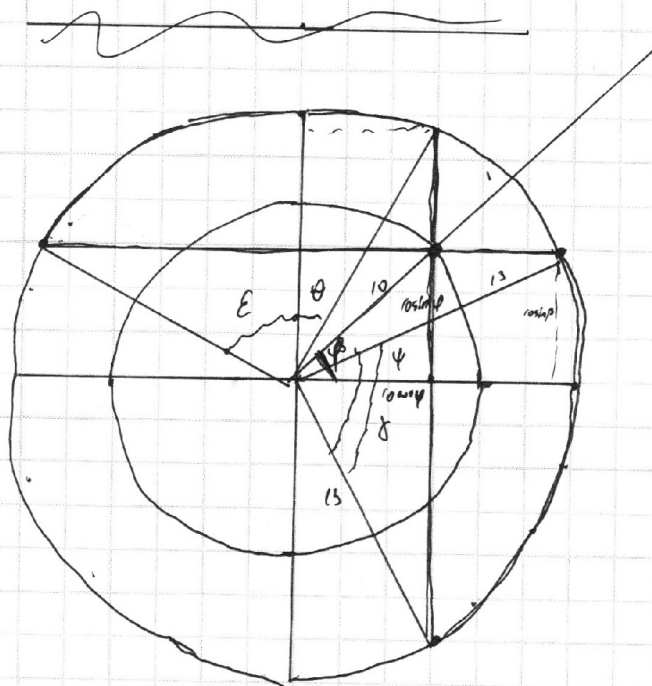
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \psi = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\sin \gamma = \frac{10 \cos \beta}{13}$$

~~sin ψ = 10 sin β / 13~~
~~sin γ = 10 cos β / 13~~
~~sin θ = 10 sin β / 13~~
~~cos θ = 10 cos β / 13~~

$$\sin \theta = \frac{10 \cos \beta}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\sin \psi = \cos \theta$$
$$\psi + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \gamma = \sin \theta$$
$$\theta - \gamma = \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Решения, порождаемые (1)

$$x + y = 2K.$$

Рассмотрим все решения при $x \in [-6; 6]$, $y \in [-2; 2]$, а также исключим случай $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

$x + y \in [-8; 8]$ (принимает все значения на том промежутке)
 $K \in [-4; 4]$.

Для ~~каждого~~ $K \in [-4; 4]$ можно выбрать x и y .

$$\begin{aligned} 2K-2 &\in [-6; 5] \\ K-1 &\in [-3; 3] \\ K &\in [-2; 4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{aligned}$$

3) Решения, порождаемые (1):

$$x + y = 2K$$

$$\begin{aligned} y = 2: & \quad x = 2K - 2 \in [-6; 5] \\ & \quad 2K \in [-4; 7] \\ & \quad 2K \in [-4; 6] \\ & \quad K \in [-2; 3] \rightarrow \underline{6 \text{ реш.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 1: & \quad x = 2K - 1 \in [-6; 6] \\ & \quad \text{или } 2K \in [-5; 7] \\ & \quad 2K \in [-4; 6] \\ & \quad K \in [-3; 3] \\ & \quad K \in [-2; 3] \rightarrow \underline{6 \text{ реш.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad x = 2K \in [-6; 6] \\ & \quad K \in [-3; 3] \rightarrow \underline{7 \text{ реш.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = -1: & \quad x = 2K + 1 \in [-6; 6] \\ & \quad 2K \in [-7; 5] \\ & \quad 2K \in [-6; 4] \\ & \quad K \in [-3; 2] \rightarrow \underline{6 \text{ реш.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = -2: & \quad x = 2K + 2 \in [-6; 6] \\ & \quad 2K \in [-8; 4] \\ & \quad K \in [-4; 2] \rightarrow \underline{7 \text{ реш.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Итого: } & 6 + 3 + 7 + 2 = \\ & = 18 + 14 = \underline{32 \text{ реш.}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решения, порожденные (2) :~~
 ~~$3x = y + 2n$~~

~~уравн: $2n \in [-18; 15]$
 $2n \in [-3; 17]$
 $2n \in [-18; 16]$
 $n \in [-9; 8]$~~

~~$3x + 2n \in \mathbb{Z}$~~

Решения, порожденные (2)
 $3x = y + 2n$

$y = 2: \quad 3x - 2 = 2n \Rightarrow x \equiv 2 \quad (\text{при том } x \neq 6)$

$x = 4, x = 2, x = 0, x = -2, x = -4, x = -6$ ~~не~~

6 реш

$y = 1: \quad 3x - 1 = 2n \Rightarrow x \equiv 1/2$

$x = 5$
 $x = 3$
 $x = 1$
 $x = -1$
 $x = -3$
 $x = -5$

6 реш



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) = n(n-1)$$

$$48n - 48 + 6(n^2 - 9n + 20) = n^2 - n$$

$$\cancel{48n - 48} \quad 5n^2 - 5n + 72 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 72$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = \frac{2k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-1)n} - 1 \quad (1)$$

Если бы ~~в начале~~ ~~было~~ ~~выделено~~ ~~6 билетов~~, то при добавлении билетов вероятность все изменить, значит в начале применима формула (1).

Пусть в конце было выделено b билетов. Предположим, что $b < n$, тогда по ф-ле (1) можно получить вероятность в конце

$$6p(k=4) = p(k=6)$$

$$6 \cdot \left(\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 \right) = \frac{2b}{n} + \frac{(n-b)(n-b-1)}{(n-1)n}$$

$$6(8(n-1) + (n-4)(n-5)) = 2b(n-1) + (n-b)(n-b-1)$$

$$6(8n-8 + n^2-9n+20) = 2bn-2b + n^2-2bn+b^2-n+b$$

$$6(n^2-n+12) = n^2+b^2-n-b$$

$$5n^2-5n+72 = b^2-b$$

$$5\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 72 = \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$5\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + 72 = \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$5\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + 71 = \left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + 71 = \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 = (b+n-1)(b-n)$$

$$(2n-1)^2 + 71 = (b+n-1)(b-n)$$

Получим, что $b > n$. Противоречие.

Значит $b \geq n$, т.е. в конце все получили билеты и вероятность в конце равна 1. Тогда вероятность в начале равна $\frac{1}{6}$:

$$p = \frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 = \frac{1}{6} \quad | \cdot 6n(n-1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = -\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = -(\cos(\pi x - \pi y))$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2\pi x = \pi x$$

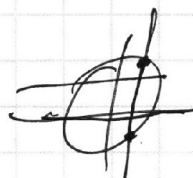
$$1) x = \pi x - \pi y + 2\pi k$$

$$2) x = -\pi x + \pi y + 2\pi k$$

$$3) x = -\pi y$$

$$x = -y + 2k$$

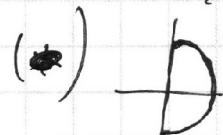
$$3x = y + 2k$$



$$120 - 48 = 72$$

$$100 - 28 = 72$$

$$a^2 + b^2 = \dots$$

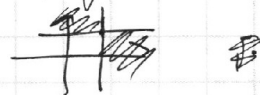


$$1) \arcsin\left(\frac{-y+2k}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \leq \pi$$

$$\arcsin\left(\frac{-y+2k}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \leq \pi - \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\arcsin\left(\frac{-y+2k}{6}\right) \leq \pi - 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$-19$$



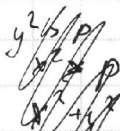
$$x + y \leq 0$$

$$x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0$$

$$y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0$$

$$x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha$$



$$\cos \alpha \geq 0$$

$$x \leq -5\sqrt{2}$$

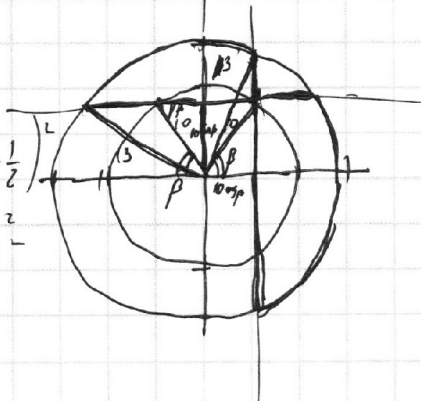
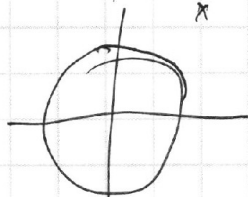
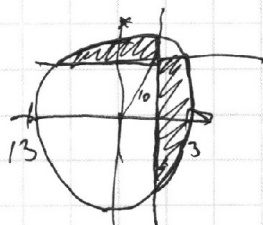
$$x^2 > p^2 > 50 \cos^2 \alpha$$

$$25 \cdot 2$$

$$25 \cdot 4 = 100$$

$$48 - 54 + 1 = -5$$

$$= -6 + 7 = -5$$



$$p = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta} + 2 \cdot \sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta} +$$

$$n^2 - n =$$

$$= n^2 - \left[2 \cdot \frac{1}{2} n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$5(n^2 - n) + 72 = 13^2 - \frac{1}{4}$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 72 = \left(13 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 72 = \left(13 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 72 = \left(13 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 72 = \left(13 - \frac{1}{2}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{xy z}$$

$$C = \overline{pq}$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = 6$$

$$\begin{cases} p \\ q \end{cases} = 3$$

$$A = 1111a$$

$$11 \cdot 100 + 11 = 11 \cdot 101$$

$$\frac{11}{11}$$

$$\begin{matrix} n : 11 \\ n : 101 \end{matrix}$$

$$100 \cdot 00$$

$$ABC = n^2$$

$$1111a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$a \cdot 666 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$6aC = 11 \cdot K^2$$

$$6 \cdot a \cdot 95 = 11 \cdot K^2$$

$$18a = K^2$$

$$2 \cdot 9 \cdot a = K^2$$

$$n = 11 \cdot 101 \cdot K$$

$$\begin{matrix} 11 : 11 \\ 101 : 101 \end{matrix}$$

$$11 \cdot 101 = 1111$$

$$\begin{matrix} C : 11 \\ 33 \\ C = 33 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \quad (>0)$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$0 = x - y - 2$$

$$x - y = 2$$

$$x = 2 + y$$

$$M =$$