



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A = K \cdot 1111 \quad 11 - \text{простое число}$$

$$1111 = 11 \cdot 101, \quad 101 - \text{простое число};$$

$$\cancel{K \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{простое} \\ B = 101, \text{ т.к. } 101 - \text{простое} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{либо } B \cdot C = 101 \text{ либо } B = 101 \text{ и } C \text{ по-другому}$$

чтобы можно было взять корень, не получится

~~$C \neq 5$  если 5 на конце.~~

$$B \cdot C \neq 101, \text{ т.к. } C - \text{двузначное, а } B - \text{трёхзначное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot C > 101 \Rightarrow \text{остаётся только вариант}$$

$$B \neq 101 \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{должно} \\ \text{содержать} \\ \text{единицу} \end{matrix} \quad K \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 101, \text{ т.к. } \dots$$

$$\Rightarrow n = 101 \cdot \sqrt{K \cdot C \cdot 11}, \quad 11 - \text{простое число} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \cdot C = 11^{2g+1} = 11^{2g+1}, \quad \text{чтобы взять корень} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C \neq 5$ , пятёрка не может быть на конце числа  $C$ , т.к. в этом случае при умножении на  $K$  будет либо четное число, либо в то время как  $11^{2g+1}$  оканчивается на пятёрку, в то время как  $11^{2g+1}$  заканчивается единицей

$$\Rightarrow \cancel{C = 5d} \Rightarrow K \cdot 5d = 11^{2g+1}$$

Таким образом:  $ABC = K \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C = n^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{K \cdot C \cdot 11} \Rightarrow K \cdot C = 11 - \text{минимальное}$$

число, которое удовлетворит условию  $11^{2g+1}, g=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K \cdot C = 11, \text{ но } K \cdot C > 50, \text{ т.к. } C = 5d \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  решений нет. продолжение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ (продолжение)

Имеем:  $n^2 = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot b \cdot c$

из произведения  $k \cdot c \cdot 101$  невозможно получить, т.к.  $101$  - простое, а произведения  $k \cdot b$ ;  $b \cdot c$ ;  $k \cdot b \cdot c > 101$ , т.к.  $b$  - трёхзначное, а  $c$  - двузначное  $\Rightarrow$

$\Rightarrow b = x \cdot 101$  - то есть разложение  $b$  должно быть  $101$ , тогда  $x = 1$ , чтобы выполнялось условие о наличии единиц в числе  $\Rightarrow b = 101 \Rightarrow n^2 = k \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot c$

Чтобы могли взять  $\sqrt{k \cdot 11 \cdot c}$ ,  $c$  должно содержать в разложении  $11$ , т.к.  $k \in [1; 9]$  по фак.

$\Rightarrow c = 11 \cdot y$ ,  $c = 5d$  или  $c = 5d$  или  $c = 55 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 55 = 11 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = k \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5 \Rightarrow \sqrt{k \cdot 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \cdot 5 = j^2$ ;  $k \in [1; 9] \Rightarrow k = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 5 \cdot 1111 = 5555$   $b = 101$   $c = 55$

это единственная тройка как видно из моего решения  $(A; b; c) = (5555; 101; 55)$

Ответ:  $(A; b; c) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 - \text{данное решение не подходит, т.к. } x \text{ и } y > 0 \\ (x-3)(y+3)=xy \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y+3 - \text{такое условие, } x>0, y>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x>3 - \text{все } \Rightarrow x>y+3, x>3 - \text{подходят.}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9xy = y^3 + 9y \cdot 3 + 9y^2 \cdot 3 + 27 - 9xy =$$

$$= y^3 + 27y + 9y^2 + 27 - 9(y+3)y - y^3 =$$

$$= y^3 + 27y + 9y^2 + 27 - 9y^2 - 27y - y^3 = 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 27$$

Ответ:  $M = 27$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a) \sin(\pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x &= 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \\
 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x &= 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \\
 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \left( \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x - \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \right) &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \end{cases}$$

$$1) 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y + x = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{ctg} \pi x \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \pi x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi n_2$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi n_1 = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi n_2 \Rightarrow, n_2, n_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x + y = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x$  - всего человек, тогда:

-----  $\square$   $\square$  -----

Найдём все комбинации.

$N_{\text{удг}_1} = C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-2-2)! 2!} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!}$

Всего вариантов:  $N_{\text{всего}} = C_x^4 = \frac{x!}{(x-4)! 4!}$

$\Rightarrow P_1 = \frac{N_{\text{удг}_1}}{N_{\text{всего}}} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!} \cdot \frac{(x-4)! 4!}{x!} = \frac{12}{x(x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1 = \frac{12}{x(x-1)} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

Можно было искать вероятность просто через равновероятность событий как:  $P_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

Пусть  $y$  - билетов в конце месяца, тогда найдём  $P_2$  - вероятность в конце мес:

$P_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{(y-1)}{x-1} \cdot \frac{P_1}{P_1} = 3,5 = \frac{y(y-1)}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - y - 42 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 42 = 169 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow y = 7, y = -6 - \text{не подходит}$

Ответ: 7 билетов в конце месяца.

$$\begin{cases} \Delta_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \sin \alpha = \frac{32}{5} \sin \alpha \\ 2R \sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 16 - \frac{208}{5} \cos \alpha} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

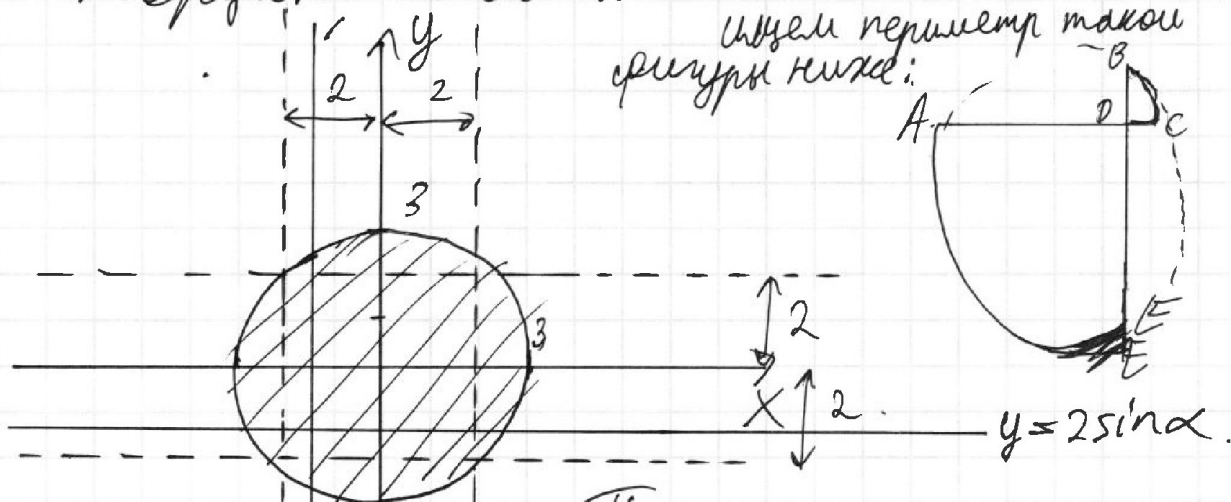
№6

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 9$  - окружность

Изобразим данные множества точек на координатной плоскости;

ищем периметр такой фигуры ниже:



Пунктирные линии ограничивают положение графика  $x-2\cos\alpha \geq 0$  и  $y-2\sin\alpha \geq 0$ .

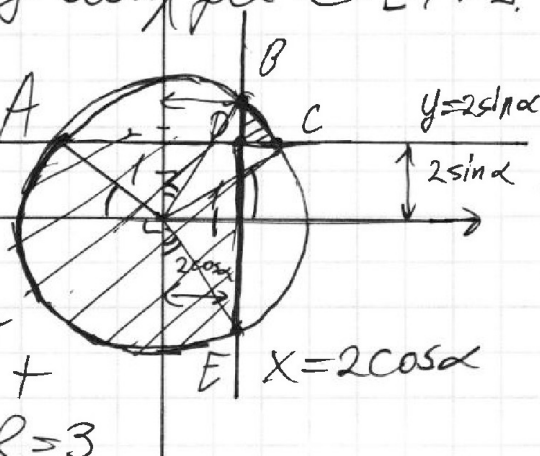
$$x=2\cos\alpha, (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \\ x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай для  $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ :

Найдём периметр, получившейся фигуры (ADBCE)

$$P = 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4\cos^2\alpha} + (\arcsin(\frac{2\sin\alpha}{R}) + \arcsin(\frac{2\cos\alpha}{R} + \frac{\pi}{2})) \cdot R + (\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{2\sin\alpha}{R}) - \arcsin(\frac{2\cos\alpha}{R})), R=3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} + \left( \arcsin\left(\frac{2 \sin \alpha}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{2 \cos \alpha}{3}\right) + \frac{\pi}{3} \right) 3 + \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2 \sin \alpha}{3} - \arcsin \frac{2 \cos \alpha}{3} \right) \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot \left( \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} \right) + 3\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\alpha) = 2 \cdot \left( \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} \right) + 3\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  найдем максимум функции, возмем производную по углу  $\alpha$ :

$$P'(\alpha) = \frac{2 \cdot (-4) \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} + \frac{2 \cdot (-4) \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  приравняем производную к нулю  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-16 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} + \frac{16 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} = \frac{16 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow 16 \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} - \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{(3^2 - 4 \sin^2 \alpha)(3^2 - 4 \cos^2 \alpha)}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} = \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} \Rightarrow \text{на ОДЗ. } 4 \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos \alpha = -\sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -\min \quad + \quad \max \quad - \quad \min \quad + \\ 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot \left( \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{2}{4}} + \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{2}{4}} \right) + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad P = 4\sqrt{7} + 3\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) y+x = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{ctg} \pi x \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \pi x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow x-y = 1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y = 1.$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} + 2\pi n_1 = \frac{\pi}{2} - \pi x + 2\pi n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{2} + 2n_1 = \frac{1}{2} - x + 2n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y = 1-2x + 2(n_2-n_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y = 1 + 2n_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x = \pm 1 + 2n_4, n_4 \in \mathbb{Z}. & \text{все} \\ 3x-y = 1 + 2n_3, n_3 \in \mathbb{Z}. & \text{пары} \end{cases}$$

еще 2 человека из (x-2) на 2 мест

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{x \text{ человек.}} \quad \text{Всего } = C_x^4 = \frac{x!}{(x-4)! 4!}$$

$$N_{y \neq 1} = C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!} = x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x$  - всего людей, 4 билета.

$$P_1 = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{(x-4)! \cdot 4!}{x!} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{(x-4)(x-3)(x-6) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2}{(x-2)(x-3)(x-4) \dots 2} \Rightarrow$$

$$P_1 = 12 \cdot \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$P_2 = \frac{C_x^{x-2}}{C_x^4} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{x!}$$

$$\left( \sin(\pi x) - \sin(\pi y) \right) \sin \pi x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cdot \sin \pi x =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos \pi x = \cos(\pi y) \cos(\pi x) \cos \pi x$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos \pi x$$

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos \pi x$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos \pi x$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \left( \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos \pi x \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(1; -2)$  и  $(-2; 1)$  - не подходит, но  $-2 \leq 0 \Rightarrow$  не подходит.

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

имеем:  $\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$

$x+y+1=0$  - не подходит, т.к.  $x$  и  $y > 0 \rightarrow$

$\Rightarrow$   $x-y=3 \Rightarrow x=y+3$  - такое условие  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=y+3, x \geq 3$  и тогда  $y \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=y \Rightarrow y=1 \Rightarrow$  проверим:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4-3} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{(4-3)(1+3)} - \text{выполняется} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  подходит  $x=y+3, x > 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y, y > 0.$$

$$M = y^3 + 3 \cdot 9y + 3 \cdot 3y^2 + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = 27$  при  $y > 0$  и  $x > 0$ , только  $M = 27$ .

Ответ:  $M = 27$ .

№3

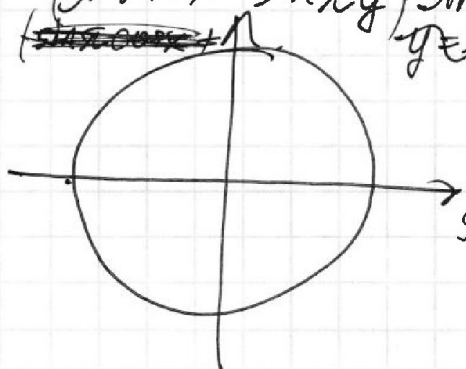
$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos \pi x$$

$$(\sin \pi x + 1)$$

$$y=x \Rightarrow 1 \Rightarrow y=x=1$$

$$y=x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \text{подходит}$$

$$\sin(\pi y) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi y) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi x)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} \quad B = \overline{b1c} \quad C = \overline{d5} \quad \begin{matrix} x \neq 3 \\ y \neq -3 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$ABC = n^2 \Rightarrow \overline{aaaa} \cdot \overline{b1c} \cdot \overline{d5}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{x-3+y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left( \frac{(x-3)(y+3) - xy}{(x-3)(y+3)xy} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+y+1) \left( \frac{(x-3)(y+3) - xy}{(x-3)(y+3)xy} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left( \frac{+3x - 3y - 9}{(x-3)(y+3)xy} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+1=0 ; x-y=3 \Rightarrow x=3+y \Rightarrow$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\Rightarrow 3+2y+1=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, -2) - \text{подходит} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, 1) \text{ проверить } = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = 0 - \text{подходит}$$

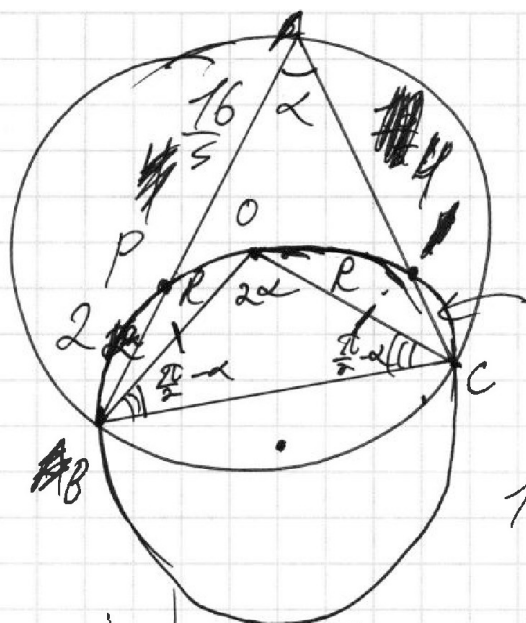


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

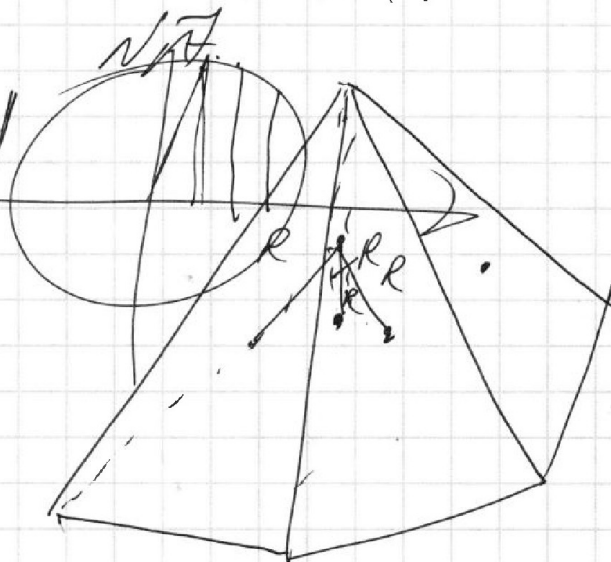
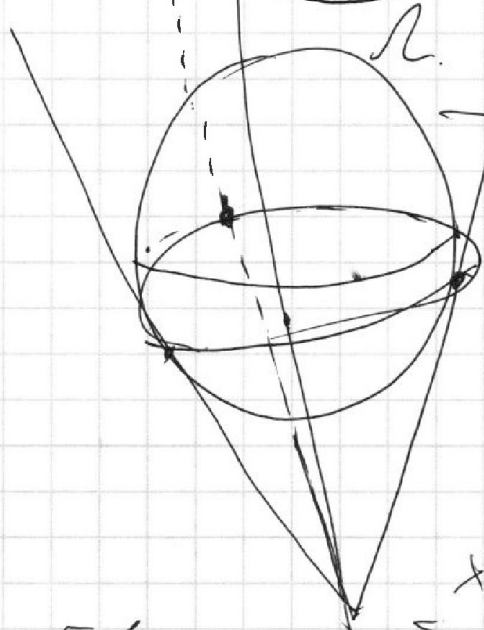


$$2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{\frac{2b^2}{5} + y^2 - 2 \cdot \frac{104}{5} \cdot \cos \alpha}$$

$$K \cdot 1111 \cdot a \cdot b$$

$$\begin{array}{r} \text{1111 - нормал.} \\ 7 \overline{) 71} \quad 7 \overline{) 1141} \quad 3 \overline{) 307} \\ \underline{-41} \quad \underline{-15} \quad \underline{-9} \\ 30 \quad 15 \quad 21 \\ \underline{-61} \quad \underline{-10} \quad \underline{-21} \\ 61 \quad 10 \quad 10 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$



51.

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ + 21 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$K \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 55$$

$$K \cdot 1111 \cdot B \cdot C = K \cdot 101 \cdot 11 \cdot B \cdot C = R^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{N_{\text{выб}}}{N_{\text{всего}}} = \frac{(x-2)!}{(x-1)! 2!} \cdot \frac{x!}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

$$P_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{(y-1)}{x-1} \quad y - \text{диаметров в конце.}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 3,5 = \frac{y(y-1)}{12} \Rightarrow y^2 - y = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 42 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 42 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow y = 7$$

Ответ: 7 диаметров

$\sqrt{5}$

$$x = 2 \cos \alpha$$

А. Г.

