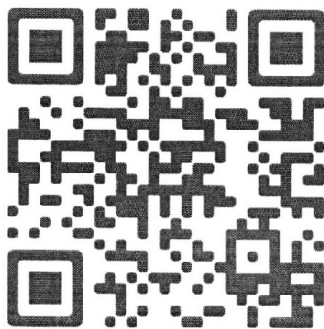




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = a(1111)$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \quad 101 \nmid 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \quad 101 \nmid 7$$

т.к. $101 < 121 \nmid \{2, \dots, 11\} \Rightarrow 101$ - простое.

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \quad a \in \{1, \dots, 9\}$$

$$B = \overline{bcd} \quad \text{в 1-й цифре "1"}$$

$$C = \overline{ef} \quad \text{1-я цифра "5"}$$

$$AB \cdot C = k^2 \quad (\nexists 0 \text{ т.к. } k^2 : 101 \text{ т.к. } A : 101 \Rightarrow B \cdot C : 101,$$

$$C \nmid 101 \text{ т.к. } C - \text{двухзначное} \Rightarrow B : 101, B = k(101)$$

$$\text{но т.к. } 101 > 100 \Rightarrow k < 10 \Rightarrow B = \{101, 202, 303, \dots, 909\}$$

$$\text{но среди цифр } B \nexists "1" \Rightarrow B = 101 \text{ т.е. получаем:}$$

$$: 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot \overline{ef} = k^2 \quad \text{т.к. } a < 10 \Rightarrow \overline{ef} : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = f = 5 \text{ т.к. среди цифр } C \nexists 5 \Rightarrow C = 55 = 1$$

$$\Rightarrow 11^2 \cdot 101^2 \cdot a \cdot 5 = k^2 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{Ответ: } (5555, 101, 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = (x-3)(y+3), \quad xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 3 \quad y = x - 3, \quad M = x^3 - y^3 - 9xy =$$

$$= x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$- \cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$- \cos 2\pi x = \cos(2\pi x + \pi)$$

$$\pi x > 0, \Rightarrow$$

$$y > \pi \Rightarrow 2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi y - \pi x + \pi k$$

$$y < \pi \Rightarrow 2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi x - \pi y + \pi k$$

$$\pi x > 0 \text{ или } \pi > 0 \text{ или } \pi < 0 \quad 2\pi x = 2\pi + 2\pi x$$

$$2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi y - \pi x + \pi k$$

$$3x + 1 = y + k - 2n$$

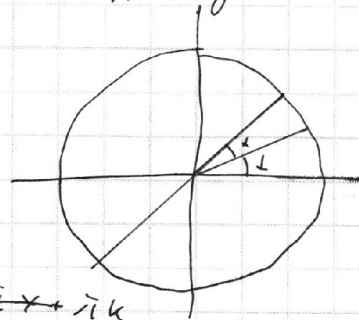
$$3n + 1 = y + 2\Delta \quad \text{где } \Delta \in \mathbb{Z}$$

или

$$2\pi x + \pi + 2\pi n_2 = \pi x - \pi y + \pi k_2$$

$$n + y + 1 = 2\Delta_2 \quad \text{где } \Delta_2 \in \mathbb{Z}$$

или: $3n - y = 2\Delta - 1$ или $n + y = 2\Delta_2 - 1$ где $\Delta, \Delta_2 \in \mathbb{Z}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

k - кол-во 11-ти км. ав.
 n - количество километров

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = p_1 \quad 3,5 p_1 = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12 \cdot 3,5}{k(k-1)} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \Rightarrow n^2 - n = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0 \quad D = 1 + 168 = 169 \quad n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$\text{т.к. } n > 0 \Rightarrow n = 7 \quad \text{Ответ: } 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 4, BP = 2, AP = \frac{16}{5}$$

$$\angle ABC = ?$$

$\odot_1$ - центр окт - или u_2

$$\angle BAC = 2$$

$$\angle ABC = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 =$$

$$= \frac{26}{5} \cdot 2 \cdot \sin 2$$

$$\angle BOC = 22$$

$\triangle ABC$ по теор. кос. б-и

$$\Rightarrow BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 8 \cdot \frac{26}{5} \cos 2 = 2R_1^2 - 2R_1^2 \cos 22 =$$

$$\cos 22 = 2 \cos^2 11 - 1 \quad \cos 11 = k$$

$$= 2R_1^2 (2 - 2 \cos^2 11) = 4R_1^2 (1 - \cos^2 11) = 4R_1^2 \sin^2 11$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R_1} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot 2R_1 \sin 11}{4R_1} = \frac{52 \sin 11}{5}$$

$$\angle CPB = \angle BOC = 22$$

$$PC^2 = 16 + \frac{256}{25} - \frac{128}{5} \cos 2$$

$$BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 8 \cdot \frac{26}{5} k = 4 + 16 + \frac{256}{25} + \frac{128}{5} k - 4 \sqrt{16 + \frac{256}{25} - \frac{128}{5} k}$$

$$\cdot (2k^2 - 1) \quad \frac{(26 - 16)(26 + 16)}{25} - \frac{8 \cdot 26 + 128}{5} k - 4 = -4PC \cdot (2k^2 - 1)$$

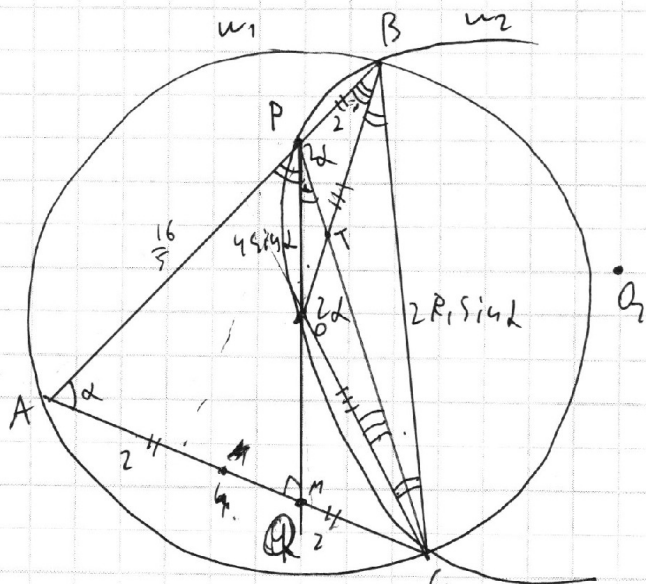
$$4 \cdot 84 - 336k - 20 = -20PC \cdot (2k^2 - 1)$$

$$64 - 336k = -20PC(2k^2 - 1)$$

$$84k - 16 = 5 \sqrt{\frac{656}{25} - \frac{128}{5} k} (2k^2 - 1)$$

$$84k - 16 = \sqrt{656 - 540k} (2k^2 - 1)$$

$$342k^2 - 3284k + 256 = (656 - 540k) (2k^2 - 1)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{APC}{PCB} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

~~APC~~

$$84^2 n^7 - 256 = 656(4n^4 - 4n^2 + 1) - 540n(4n^4 - 4n^2 + 1)$$

$$\angle OBC = \angle OCB = \angle OPL = \beta$$

$$\beta + \alpha = 90^\circ \text{ или } 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$\angle OCP = \angle PBO = \alpha$$

$$PC \perp OB = T \quad \frac{OC}{PB} = \frac{BC}{OP} \quad \frac{R_1}{2} = \frac{2R_1 \sin \alpha}{PO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PO = 4 \sin \alpha, \quad \angle OPA = 180^\circ - 2\alpha - \beta = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при проецировании } PO \text{ на } O, \quad PO \perp AC = Q$$

$$\angle AQP = 90^\circ, \text{ в } \triangle APC \text{ } PQ \text{ и } BQ \text{ медианы и высоты и } \angle AQP = \angle BQP = 90^\circ$$

$$\text{и } \angle APQ = \beta = \angle QPC \Rightarrow Q \text{ и } M \text{ совпадают где}$$

$$M - \text{середина } AC, \quad PC = \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{APC}{PCB} = \frac{APC}{PCB} =$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle APQ \quad AQ = 2, \quad AP = \frac{16}{5} \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{256}{25} - \frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{156}}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{156} \cdot 5}{5 \cdot 16} = \frac{\sqrt{39}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{26 \cdot 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{4} = \frac{26\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{26\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos t)(y-2\sin t) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \begin{aligned} &x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг} \\ &\text{с центром } (0,0) \text{ и } R=3 \end{aligned}$$

$$(x-2\cos t)(y-2\sin t) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos t \\ y \geq 2\sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2\cos t \\ y \leq 2\sin t \end{cases}$$

$$\text{и } x \cos t \in [-1; 1] \text{ и } y \sin t \in [-1; 1]$$

$$\rightarrow x, y \in [-2; 2], \text{ так как } x, y \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos t \\ y \geq 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\sqrt{1-\sin^2 t} \\ y \geq 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 - y^2 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

0 - точки пересечения прямых

$$x = 2\cos t, y = 2\sin t \text{ и } y = 0$$

ищем по этим 2 прямым

интервалы, где круг, и

рис. найдем ГМТ точек

$$O(2\cos t; 2\sin t)$$

$$2\sin t = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$\text{и } 2\cos t = x_1, 2\sin t = y_1, y_1^2 = 4 - x_1^2$$

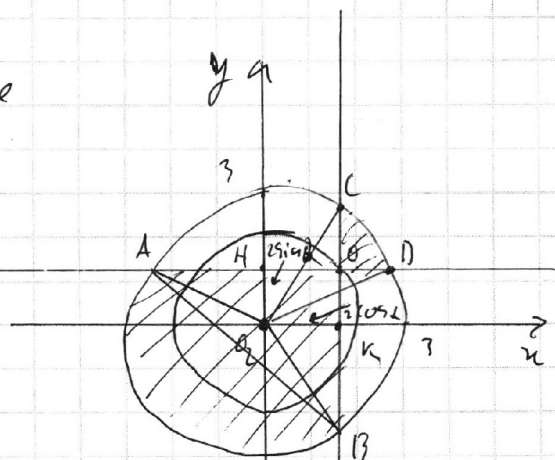
$$y_1^2 + x_1^2 = 4 \text{ и } O \in O_1P - \text{мы (рис 2)}$$

и центром O, O . найдем длину отрезка - и круг.

обозначения см. рис. $AO = \sqrt{9 - 4\sin^2 t} = HO, AO = \sqrt{9 - 4\sin^2 t} + 2\cos t \Rightarrow$

$$OB = \sqrt{9 - 4\cos^2 t} + 2\sin t \Rightarrow AB = \sqrt{9 - 4\sin^2 t} + 4\cos^2 t + \sqrt{9 - 4\cos^2 t} + 4\sin^2 t + 4\sin t \sqrt{9 - 4\cos^2 t} + 4\cos t \sqrt{9 - 4\sin^2 t} = 4(\sin t \sqrt{9 - 4\cos^2 t} + \cos t \sqrt{9 - 4\sin^2 t})$$

$$AB = 6$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☒ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $(\sin \lambda x - \sin \lambda y) \sin \lambda x = (\cos \lambda x + \cos \lambda y) (\cos \lambda x - \cos \lambda y)$

$$\sin^2 \lambda x - \sin \lambda y \sin \lambda x = \cos^2 \lambda x + \cos \lambda y \cos \lambda x - (\cos^2 \lambda x - \sin^2 \lambda x) = \cos \lambda y (\cos \lambda x + \sin \lambda y \sin \lambda x) - \cos 2\lambda x = \cos(\lambda y - \lambda x)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$- \cos 2\lambda x = \cos(\lambda y - \lambda x)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$3x - y = 2n - k + 1$$
$$- \cos 2\lambda x = \cos(\lambda x - \lambda y)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda n - \lambda y + 2\lambda n + \lambda$$
$$n + y = 2n - 2k + 1$$
$$\begin{cases} 3n - y = 2n - 2k + 1 \\ n + y = 2n - 2k + 1 \end{cases}$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$2\lambda x + \lambda + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n$$
$$3n + 1 + 2k = y + 2n$$

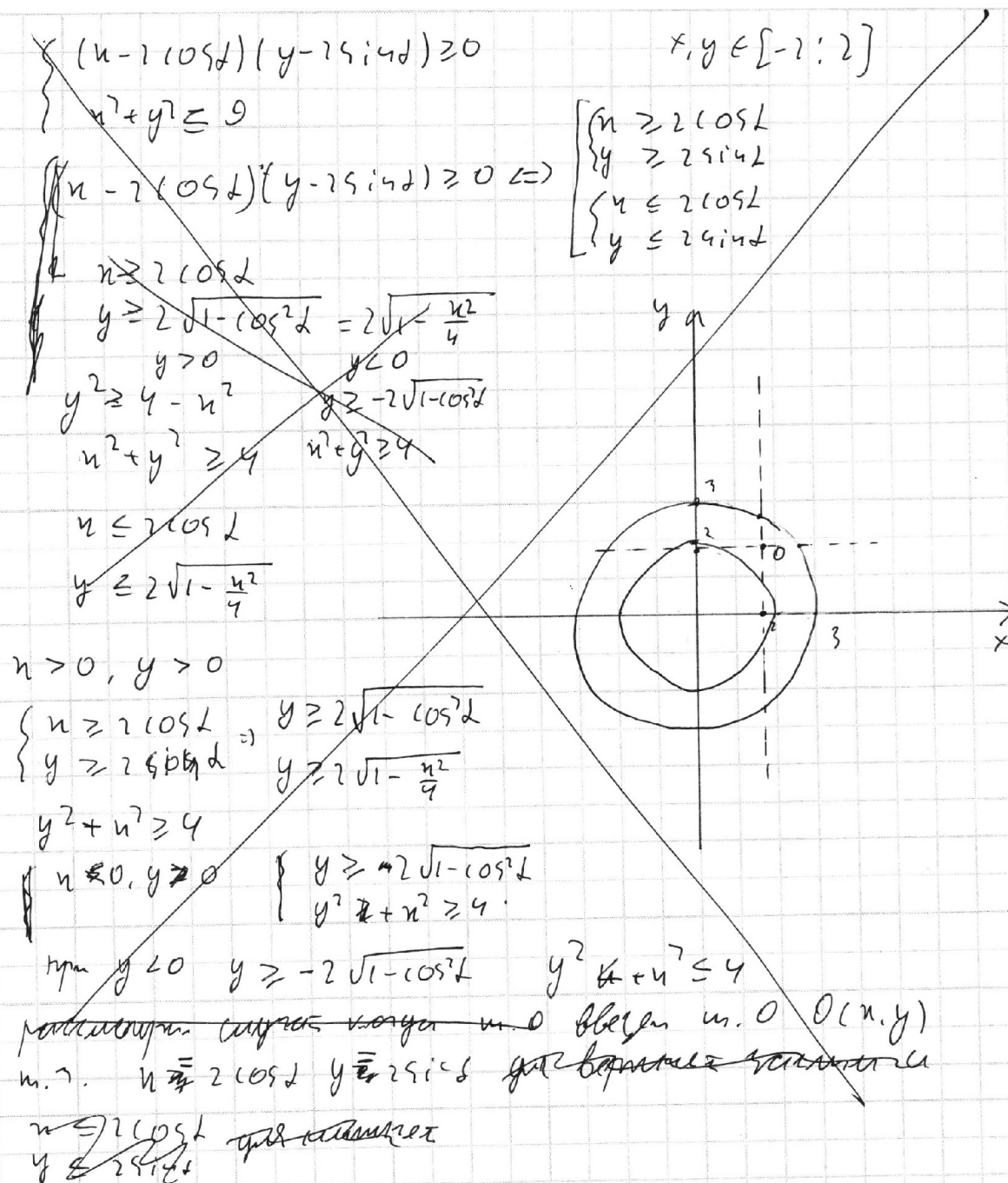


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



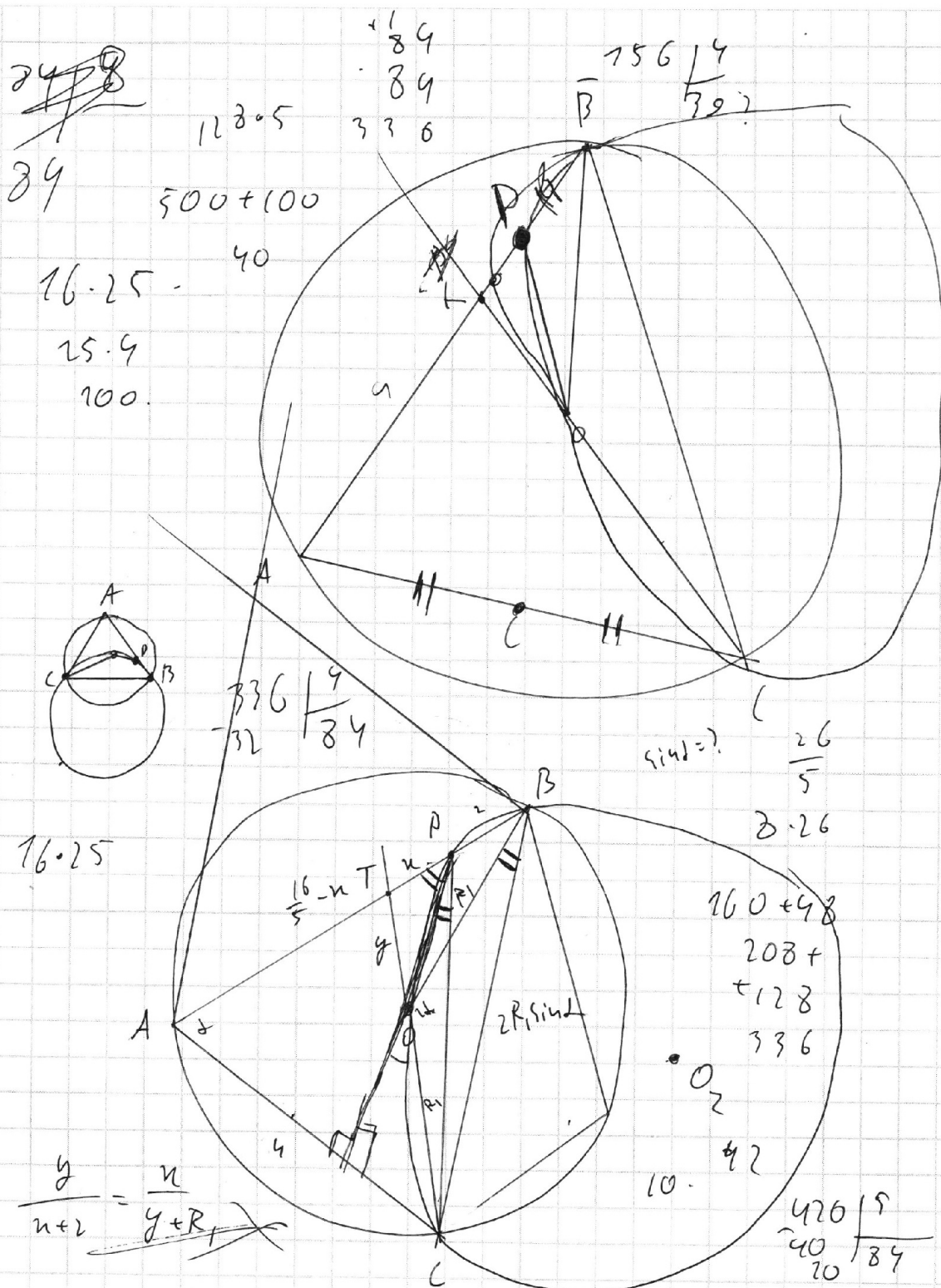


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha$$

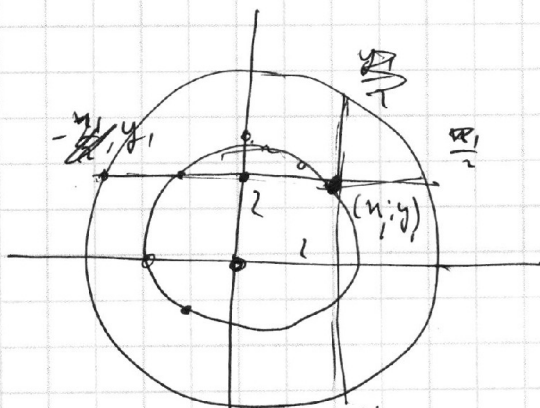
$$2 \cos \alpha; 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$2x = 2 \sqrt{1 - y^2}$$
$$x = 0 \quad y = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

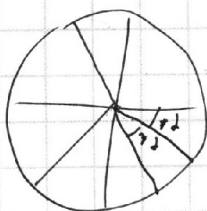
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x \in [-2; 2]$$

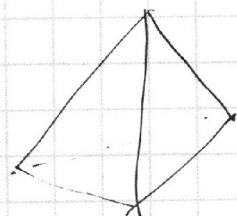


$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - 2 \cos^2 2\alpha - 1$$
$$9 + 9 - 6 \cos 2\alpha =$$

x_1
 x_2

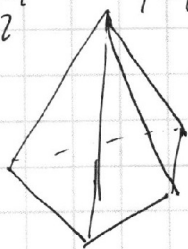


$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$



$$\frac{4abc}{4R}$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{1 - \cos 4\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{2 - 2 \cos^2 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$



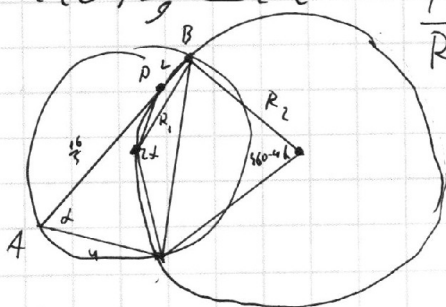
$$= 2(1 + \cos 2\alpha) = 4 \cos^2 \alpha$$

$$2R_1^2 - 2R_1^2 \cos 2\alpha =$$
$$= 2R_2^2 - 2R_2^2 \cos 4\alpha$$



$$2R_1^2 \cos \frac{x}{4} + 4R_1^2 \cos \frac{y}{4} \geq 2\pi$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2 \cos 2\alpha$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\pi+y) = (\cos \pi \cos y - \sin \pi \sin y) = (\cos \pi \cos y + \sin \pi \sin y)$$

$$\cos^2 \pi \cos y - \sin^2 \pi \sin y = \cos^2 \pi \cos y + \sin^2 \pi \sin y$$

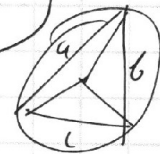
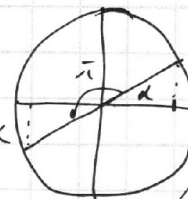
$$\cos^2 \pi \cos y - \sin^2 \pi \sin y - \cos^2 \pi \cos y - \sin^2 \pi \sin y = \cos^2 \pi \cos y - \sin^2 \pi \sin y$$

$$- \cos(\pi+y) = \cos 2\pi$$

$$\cos(\pi+y) = \cos \pi \cos y + \sin \pi \sin y$$

$$2\pi = \pi - \pi y + \pi + 2\pi k$$

$$k = 1 - y \quad y = 1 - k$$



$$a \cos \frac{x}{4}$$

$$a \cos \frac{1+2\delta-k}{9}$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in [-9; 9]$$

$$y = -x$$

$$k + y = 1 + 2k - 2h$$

$$2(k-h) = 2\delta$$

$$k+y = 1 + 2\delta$$

$$|\delta| \leq 12$$

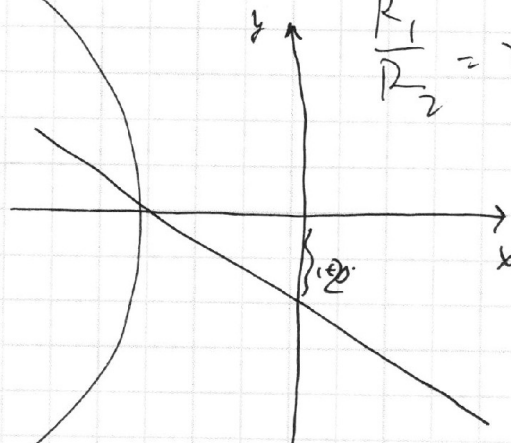
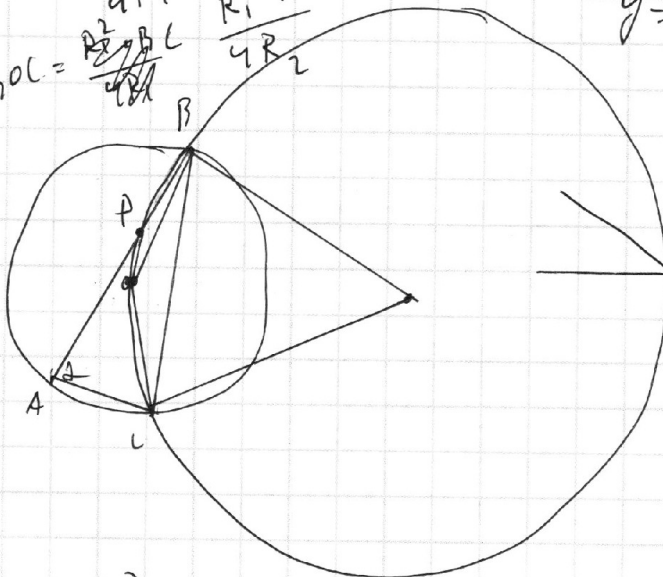
$$k+y \in [-13; 13]$$

$$y = 1 + 2\delta - k$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2 \cos \delta$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R_1}$$

$$S_{AOC} = \frac{AO^2 \cdot BC}{4R_2}$$



$$S_{AOC} = 2R_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$(x - 2\cos t)(y - 2\sin t) \geq 0$$

$$\sin t \in [-1; 1]$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 2$$

$$x \leq 0$$

$$y \leq 2$$

$$x \geq 2$$

$$x \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$y \geq \sqrt{3}$$

$$[-2; 2] \quad x \leq 1$$

$$y \leq \sqrt{3}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t = 0$$

$$(x_0, y_0) \quad \sin t = 1$$

$$(x_0, y_0)$$

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$(y + \sqrt{9 - x^2})^2 + (x + \sqrt{9 - y^2})^2 =$$

$$= y^2 + 9 - x^2 + x^2 + 9 - y^2 + 2y\sqrt{9 - x^2} + 2x\sqrt{9 - y^2} = 2(y\sqrt{9 - x^2} + x\sqrt{9 - y^2})$$

$$4(\sin t \sqrt{9 - \cos^2 t} + \cos t \sqrt{9 - \sin^2 t})$$

$$x = 2\cos t$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos t \\ y \geq 2\sin t \\ x \leq 2\cos t \\ y \leq 2\sin t \end{cases}$$

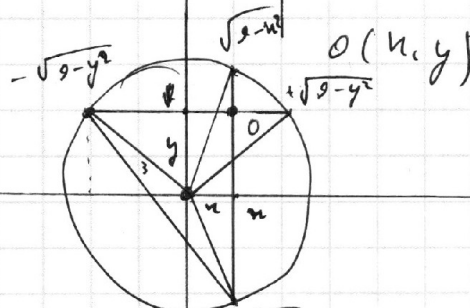
$$x \geq \sqrt{3}$$

$$x \geq 2$$

$$y \geq 0$$

$$x = 2\cos t$$

$$y = 2\sin t$$

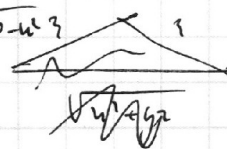
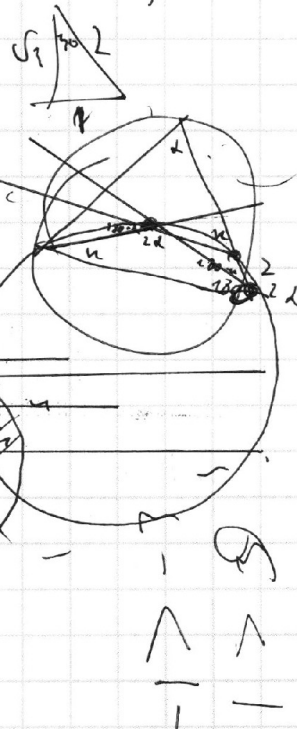
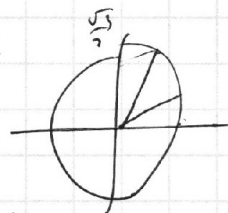


$$y = k$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - k^2$$

$$y^2 = 9 - x^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n < 4$
 $n = 4$
 $n > 4$

p -ком-во чис

$$\frac{4}{p} \cdot \frac{3}{p-1} \quad \frac{12}{p(p-1)} \quad 12 \cdot 3,5 \quad \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$$

$$\frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p-1} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} = \frac{24}{7p(p-1)}$$

$$7n(n-1) = 24$$

$$7n^2 - 7n - 24 = 0 \quad D = 49 + 28 \cdot 24 =$$

$$= 7(7 + 4 \cdot 24) = 7(7 + 96)$$

$$\frac{n(n-1)}{p(p-1)} = \frac{42}{p(p-1)}$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$D = 1 + 168 = 169$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$1 + 168 = 169$$

$$n = \frac{74}{2} = 7 \quad D = 3$$

$$a^2 + b^2 = 2ab \cos \angle C$$

$$\angle ABC =$$

$$\angle ABC = ?$$

$$AP = \frac{16}{5} \quad BP = 2 \quad AC = 4$$

$$\frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}$$

$$PC = f(\angle)$$

кор б

$$PC^2 = 16 + \frac{256}{25} - \frac{128}{5} \cos 2$$

$$\cos 2 = \cos^2 1 - \sin^2 1$$

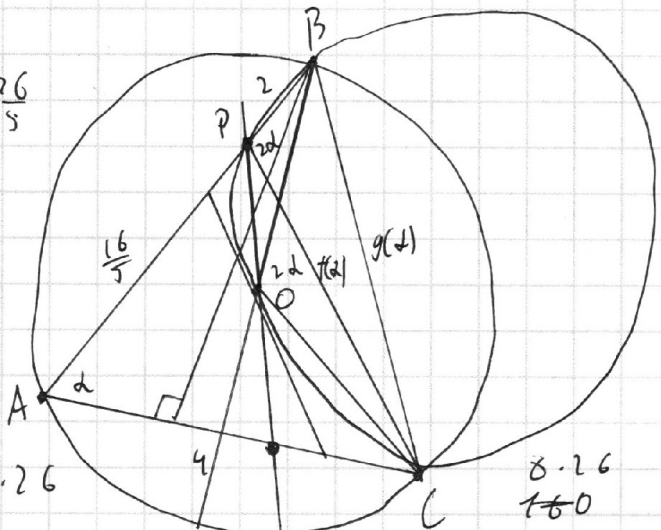
$$\cos 2 = \cos^2 1 - \sin^2 1 = 2 \cos^2 1 - 1 = 2n^2 - 1$$

$$BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} \cos 2 = 16 + \frac{156}{25} + \frac{128}{5} \cos 2 + 4 -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot PC \cdot (2n^2 - 1) \quad \frac{26^2 - 16^2}{25} + 4 \left(\frac{128}{5} - \frac{208}{5} \right) - 4 + 8PC(2n^2 - 1) = 0$$

$$\angle BOC = \frac{90^\circ 2L \cdot R^2}{2}$$

$$2R^2(1 - \cos^2 4L)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n^1) A = \overline{abcd} \overline{aaaa} = a(1000 + 100 + 10 + 1)$$

$$B = \overline{abcd} \quad b, c, d = 1$$

$$C = \overline{ef} \quad e, f = 5 \quad f = 5 \Rightarrow d = 0, \text{ и } a = 5$$

$$ABC = K^2$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

$$a(1111) \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 11 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$$

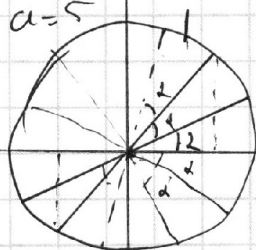
$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot \overline{ef}$$

$$K: 101 \quad B: 101$$

$$ef: 11 \quad 55$$

$$b = 101 \cdot 1 \Rightarrow b = 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$$



$$\begin{array}{r} 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \dots 209 \end{array}$$

✓

n2

n, y.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1045 +$$

yn

$$K = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{ny}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y}$$

$$\frac{3n+3y}{3ny} = \frac{2y+x}{3xy}$$

$$y = 1x + 3n$$

$$22 = 8 - 2 + i$$

$$3n+3y = 2y+x$$

$$2n = 6y \quad y \neq 0$$

$$n = 3y$$

$$(3y)^3 = 27y^3$$

$$B-2 = 22 + i$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 7} \\ 3 \\ \hline 70x \end{array}$$

$$\pi + 3\alpha = \beta$$

$$\beta =$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\pi + \beta - \alpha)$$

$$\frac{x}{3} \cdot y \cdot 3$$

$$M = n^3 - y^3 - 2ny = ?$$

↗

$$26y^3 - 27y = ?$$

$$y(26y^2 - 27) = ?$$

$$26 \cdot 3y^2 - 27 = 0$$

$$26y^2 - 9 = 0$$

$$y^2 = \frac{9}{26}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 2xy + y^2)(x-3) &= \\ = x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 &= \\ = x^3 - 3x^2y &= \\ xy = xy + 3x - 3y - 9 &= \\ x - y - 3 = 0 &= \\ x - y = 3 &= \end{aligned}$$

$$x^3 - (x-3)^3 = 9(x-3)$$

$$x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) = 9x^2 - 27x$$

$$9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27 \quad \text{или: } 27 \text{ или } \frac{x}{4} \text{ или } \frac{y}{5} \text{ или } \frac{z}{7}$$

$$\sin^2(x-y) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos 2\alpha = \cos \beta$$

$$\beta = 2\alpha$$

$$\pi x - \pi y + 2\pi k =$$

$$= 2\pi x + \pi + 2\pi n$$

$$x - y + 2k = 2x + 1 + 2n$$

$$2k - 2n - 1 = x + y$$

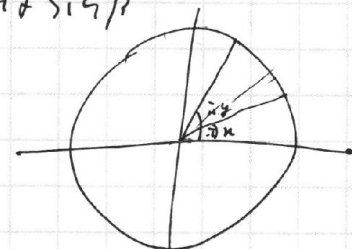
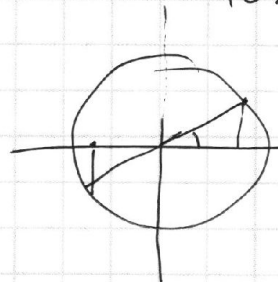
$$\beta = 2\alpha \quad ? \quad (\cos \pi y \sin \pi x - \sin \pi y \cos \pi x)$$

$$\sin \pi x \quad x + y = 2k - 2n - 1$$

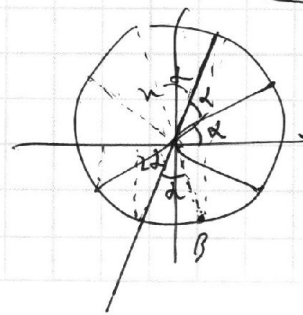
$$\cos 2\alpha = -\cos(\beta - \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(-3\alpha) \quad \beta = -2\alpha$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\beta &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



$$\arccos \cos x = \text{угол}$$



$$3\alpha + 2\beta = 5\alpha + \pi = \beta$$