



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(=)

~~k=10~~

$$\begin{aligned}ABC &= k \times 1111 \times 606 \times 33 = \\&= 11 \times 101 \times k \times 101 \times 6 \times 11 \times 3 = \\&= 11^3 \times 101^2 \times 3^2 \times 2 \times k, \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow$, чтоб $ABC = n^2$, нужно, чтоб $2 \times k \leftarrow$

— тогда одн. квадрат; $\Rightarrow$ ~~$2k = 9$~~

$\Rightarrow$ $k=2; k=8$ (передарим k от 1 до 9), $\leftarrow$

$\Rightarrow$ ~~$A=$~~ $C=33; B=606; A=2222$

или

$C=33; B=606; A=8888$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.д.

$$A = \overline{aaaa}, \Rightarrow A : 1111; A = k \times 1111$$

~~В~~

$$k \in [1; 9]; k \in \mathbb{Z}$$

$$C : \overline{33} \text{ или } \overline{33}$$

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат некоторого натур. числа.

$$ABC = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$k \cdot 1111 \cdot B \cdot C = n^2$$

Итак. $1111 = 101 \times 11$

101 - простое, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при разложении B или C будет

прост. множ. 101, но т.к. C - двузначн, то

$$B = 101 \times Z \quad Z \in [1; 9] \quad Z \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$
иначе B будет не трёхзн.

Т.е. в B есть ~~101~~ множитель 1 цифра 0,

$$\text{то } \Rightarrow Z = 6, \Rightarrow B = 606.$$

11 - простое, $\Rightarrow$ при разлож. C будет прост.

~~еще~~ множ. 11 (иначе ABC было квадр. n), $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C = 33 \quad (\text{т.к. в } C \text{ есть } 3), \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$k = \frac{y+x+5}{xy}$$

y - увелич. на 2; x - увелич. на 2, $\Rightarrow$

$\Rightarrow x+y$ - не изм., $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. k - не изм., то ~~$x+y$ - не изм.~~

$$xy = (x-2)(y+2) = xy + 2x - 2y - 4, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2y = 4, \Rightarrow \boxed{x = 2+y}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (2+y)^3 - y^3 - 6(2+y)y =$$

$$= 8 + y^3 + 6y^2 + 12y - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

Итак, M никак не зависит от x и y

при заданных усл., $\Rightarrow M = 8$

Ответ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n/3$$

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi x), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi n \\ \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2(x + n) \\ y - x = 2(x + n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y - 2n = x \\ \frac{y - 2n}{3} = x \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для x и y бесконечно много, они удовлетворяют линейной совокупности.

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \leq 6; |y| \leq 2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2$$

Переберём все пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Вариант 2~~

Д.р. $\arcsin x$ принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, ~~то есть~~ $x \leq 0$, но $\arcsin x > \pi$, $\Rightarrow$ ~~у и x не могут быть отрицательными~~, но $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \pi$ тогда и только тогда, когда $\frac{x}{6} = 1$; $\frac{y}{2} = 1$, $\Rightarrow$ $x = 6$; $y = 2$, в обоих случаях $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$.

Итак, 1 уравнение в совокупности:

$$x = -y - 2n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $x = -6$: $y = -2$; $y = 0$ $y = 2$

$x = -5$: $y = -1$; $y = 1$

$x = -4$: $y = 0$; $y = \pm 2$

$x = -3$: $y = 1$; $y = -1$

$x = -2$: $y = 0$; $y = \pm 2$

$x = -1$: $y = 1$; $y = -1$

$x = 0$: $y = 0$; $y = \pm 2$

$x = 6$: $y = 0$; $y = -2$ $\Rightarrow$

крупно заме-
нить или дога-
даться, что если
(и не $x \neq 6$)
 x — четн⁺, то $y = 0$
или $y = \pm 2$, если x — нечетн,
то $y = -1$; $y = 1$ $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ пар в этом случае равно 32

Если рассм. 2-ое уравнение совокупности:

$$y - 2x = 3x, \Rightarrow y = 2x + 3x$$

Если $y = -2$, то x может принимать только четные значения

(если $y = 2$, то $x = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4\}$)

Если $y = \pm 1$, то x может принимать только нечетные значения ($x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$)

Значит пар в этом случае = 32, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего целых пар, удовлетвор. урн. = 64

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ кол-во групп стало равно $\frac{a}{2}!$
 $= C_a^A$, а кол-во групп, в которых Вова и Тёма вместе: $C_{a-2}^{n-2} =$

$\Rightarrow$ вероятность попадания в $\frac{a}{2}$ группу
 равно: $\frac{C_{a-2}^{n-2}}{C_a^n} = \frac{\frac{(a-2)!}{(a-n)! \cdot (n-2)!}}{\frac{a!}{(a-n)! \cdot (n)!}} =$

$$= \frac{\frac{1}{(a-n)! \cdot 2!}}{\frac{a \cdot (a-1)}{n(n-1)(a-n)!}} = \frac{n(n-1)(a-n)!}{a(a-1)(a-n)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(a-n-1)(a-n-2)(a-n-3)(a-n)}{a(a-1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{a(a-1)} = 6 \times \frac{12}{a(a-1)} \quad (\text{т.к. в начале}$$

числа вероятность попадания в группу в 6 раз меньше, $\Rightarrow n(n-1) = 72, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{n = 9} \quad (\text{методом подбора})$$

$$\boxed{\text{Ответ: } n = 9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н/4

Пусть a - кол-во 11-ми классиков.
 $a \geq 4$

~~В~~ В начале месяца на концерт

пришли 4 человека. Вероятность того,

что кол-во способов выбрать 4 человек

$$\text{из } a - C_a^4 = Z$$

Уточн, мы имеем Z способов

выбрать из 4-ех человек

Найдём кол-во групп, в которых 2 человека

это Пётр и Вова, а 2-е других -

- оставшихся из $a-2$ одноклассни-

ков. Кол-во таких групп: C_{a-2}^2 , =

=, вероятность того, что в 1 группу

попадут Пётр и Вова =

$$= \frac{C_{a-2}^2}{Z} = \frac{\frac{(a-2)(a-3)}{2}}{\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}} = \frac{12}{a(a-1)}$$

В конце месяца ~~по~~ ^и выехали

n человек ($n > 4$), =,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \times \sin \alpha =$$

$$= 35 \times 30 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{0,51} = 15 \times 35 \times \sqrt{0,51} =$$

$$= \frac{\sqrt{51}}{10} \times 15 \times 35 = \frac{\sqrt{51} \times 3 \times 35}{2} = \frac{\sqrt{51}}{2} \times 105 =$$

$$= 52,5 \times \sqrt{51}$$

Ответ: $S_{ABC} = 52,5 \sqrt{51}$

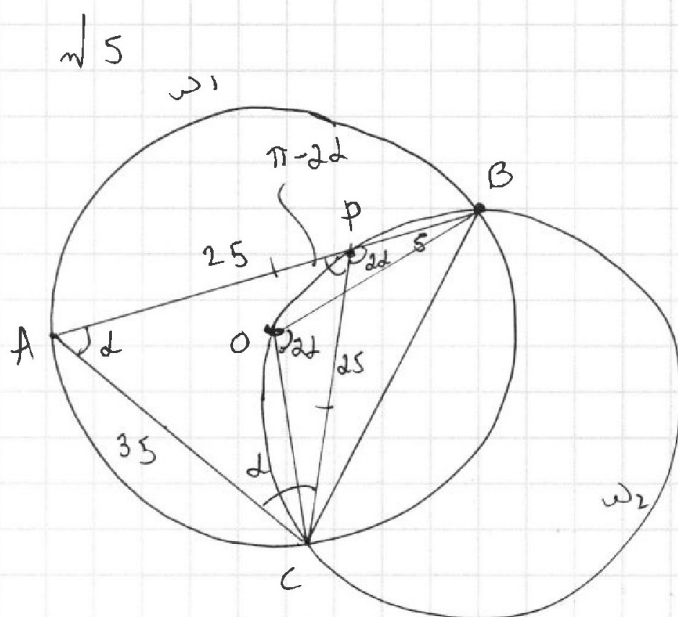


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



как внеш. спиралу.
на 1 дугу

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\Rightarrow \angle BOC = \angle CPB = 2\alpha$

спир. ка ту-то дугу, что и угол $\angle COB$, а
 $\angle COB$ - центральный.

$$\angle BPC = 2\alpha, \Rightarrow \angle APC = \pi - 2\alpha, \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теор. о сум. угл. $\triangle$

$$\text{угл } \angle ACP = \alpha, \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный, $\Rightarrow AP = PC =$

$$= 25, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{35/2}{25} = \frac{7/2}{5} = 0,7, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{0,51}, \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} 2d = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2d = 2\pi n + \frac{3\pi}{2} \end{cases} n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ d = \pi n + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ d = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$$

сумма

$$\Rightarrow M = 13 \times \pi + e = 13\pi + 2\sqrt{13^2 - 25} + 2\sqrt{13^2 - 25} =$$
$$= 13\pi + 4 \times 12 = 13\pi + 48.$$

Ответ: $M = 13\pi + 48$; $d = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$



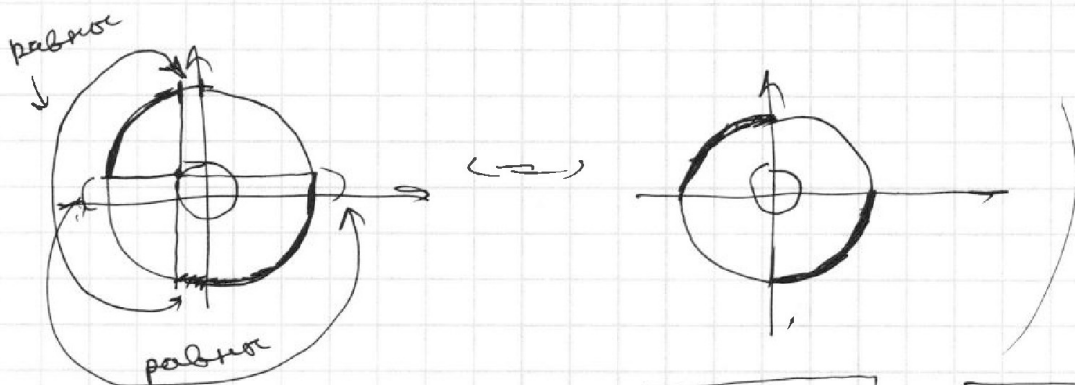
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(двумер., $\sum g_{\text{лин}} g_{\text{пл}} = \text{const}$; см. рис:



$$l_{\text{max}}: l = 2 \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2} + 2 \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2}$$

($l - g \sum g_{\text{лин}} \text{ опрел. } \varphi$), $l - \text{MAX}$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{l^2 - \text{MAX}} \quad (l \geq 0), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = 4(13^2 \times 2 - 5\sqrt{2} \cos 50(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2 \sqrt{(13^2 - (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2)(13^2 - (5\sqrt{2} \sin \alpha)^2)}) =$$

$$= 4 \times (2 \times 13^2 - 50 + \cancel{2500} m) - \text{MAX}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - \text{MAX}, \Rightarrow \quad (m > 0)$$

$$, m^2 - \text{MAX}, \Rightarrow (13^2 - 50 \cos^2 \alpha)(13^2 - 50 \sin^2 \alpha) - \text{MAX}$$

$$13^4 - 50 \times 13^2 \times (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2500 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \text{MAX}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \text{MAX}, \Rightarrow \sin^2 \alpha - \text{MAX} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ}, \boxed{\alpha = 135^\circ}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

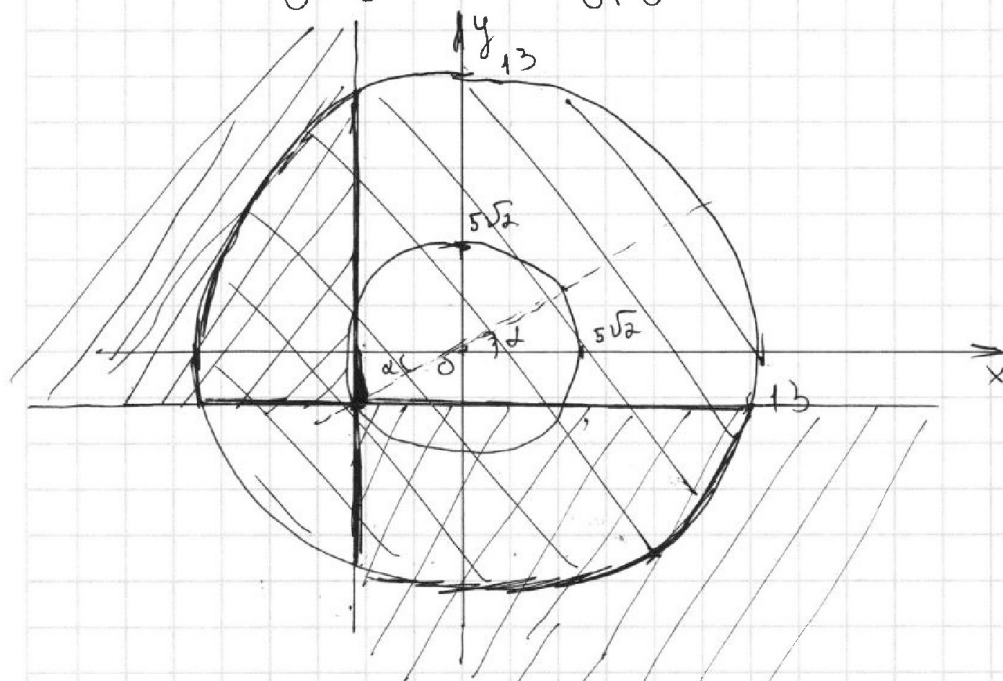
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

система будет представлять из себя множество точек из заштрихованной области.

Планометр 1 ~~составляет~~ и 2-ое множество дуг на дугах:



нужно максимизировать величину периметра области

Заметим, что $\sum$ суммарная длина дуг = const , $\Rightarrow$ нам нужно максимизировать длину ~~по~~ отрезков.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 169$$

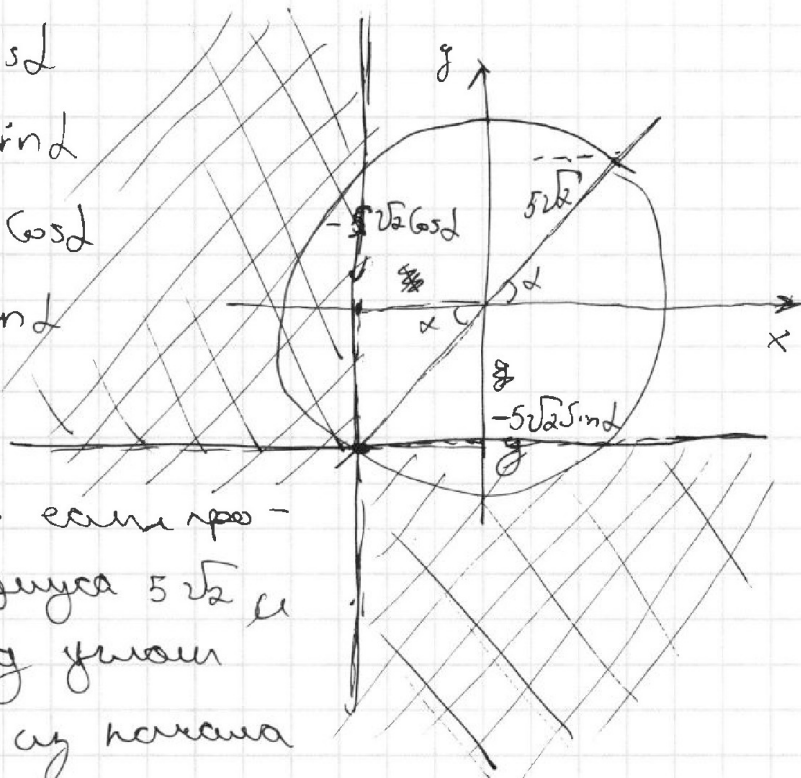
$x^2 + y^2 \leq 169$ — круг, $\text{радиус} = 13$
 описанный окруж. (все, что внутри
 окр. $x^2 + y^2 = 169$ — решение) (в x и y)

$$xy + 5\sqrt{2}\sin\alpha x + y \cdot 5\sqrt{2}\cos\alpha + 5 \times 25 \sin\alpha \cos\alpha \leq 0$$

$$xy + 5 \times 25 \left(\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\alpha y}{\sqrt{2}} \right) + 5 \times 25 \sin\alpha \cos\alpha \leq 0$$

$$(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$



Заметим, что если по-
 вести окр. радиуса $5\sqrt{2}$ и
 по радиусу радиус умно-
 жим α на $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ на $\sin\alpha$, то



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \boxed{ab=h}, \Rightarrow$

~~message~~ ~~message~~ ~~message~~ =

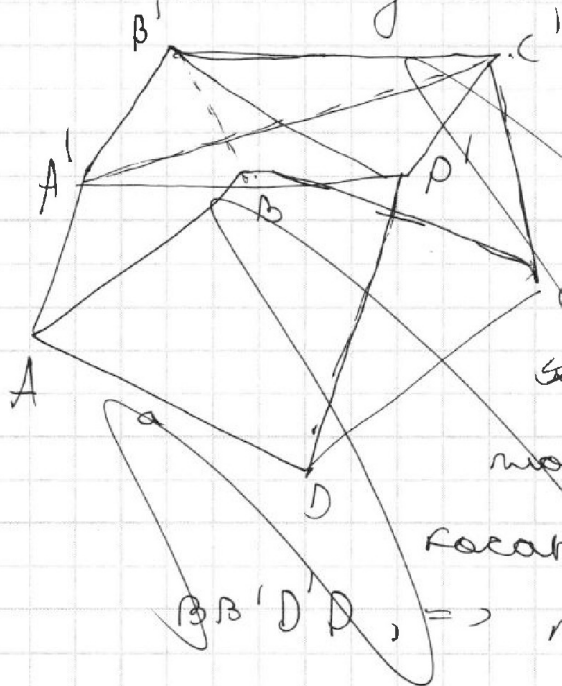
$\Rightarrow$ рассмотрим параллелограмм Z так, чтобы, что $2h = \sqrt{a^2 + b^2}$ ~~то есть~~

~~то~~ (то есть - не в-бу друг. отрез. отрез. 4-х уг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = 0 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0, \Rightarrow$

то $a = b$, $\Rightarrow$ сверху квадрат той-же стороны, что и снизу, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ верхнее основание ~~то~~ ~~нижнее~~ основание. $\Rightarrow \frac{S_{min}}{S_{max}} = 1$



Рассмотрев,

многоугольник ~~многоугольник~~

$AA'C'C$ и $BB'D'D$.

то $AA'C'C$ и $BB'D'D$ - это

многоугольник - окружен,

то есть 4-х уг. $AA'C'C$ и

$BB'D'D$, $\Rightarrow$ т.к. $AC = BD$, то



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

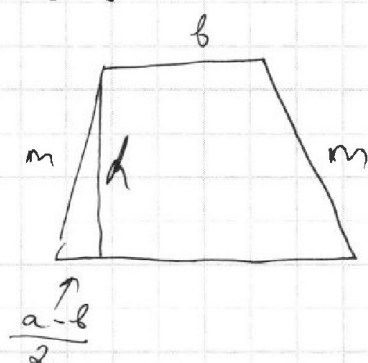
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Вывести~~, Видно, что высота трапеции $AA'D'D$ и $BB'C'C = h =$ боковой стороны трапеции.

З.



По теор. Пифагора

$$m^2 = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + h^2}$$

m - боковая сторона исходной фигуры.

Ω касается всех рёбер исходной фигуры, $\Rightarrow$ если рассм. плоскость $AA'D'D$, то в этой плоскости ~~сдела~~ сечение ~~сдела~~ шара Ω - круг, который касается всех ~~рёбер~~ сторон трапеции $AA'D'D$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = a+b$ по свойству ~~высоты~~ ^{4-х угл.} описанной около окруж. ~~фигуры~~, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + h^2} = a+b = \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 - 2ab + 4h^2, \Rightarrow$$

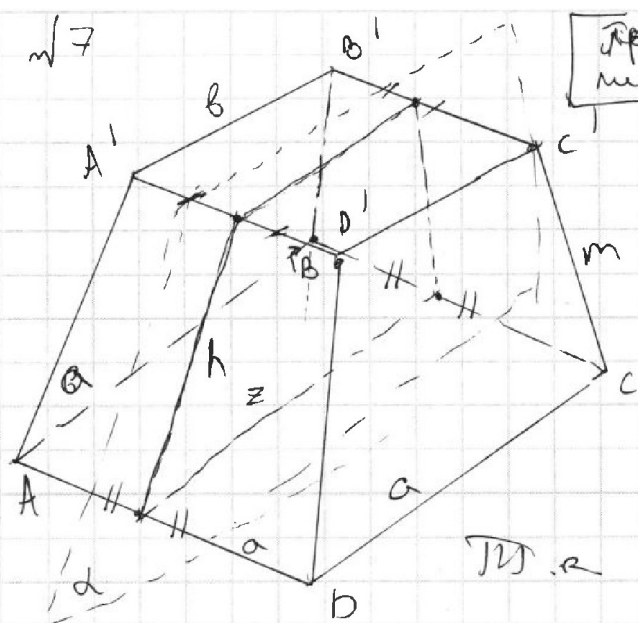


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Прямоугольный параллелепипед, паралл. к числ. осм.
кас. м.к. (см. рис.)

д. сечение Σ усечённой пирам. в этой

м.к. - равнобедрен.

м.к. разобьём её Σ

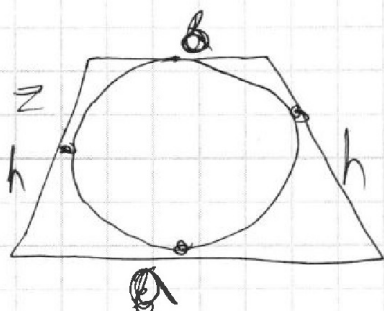
и касается всех

граней, то $\Rightarrow$ сечение шара и в м.к. описанна в

д. окружность, которая ~~касается~~ грани-

целью Σ , $\Rightarrow$ сечение равнобедрен. сто-

рон треугольн. Σ - равност., $\Rightarrow$



$\Rightarrow$

Пусть сторона числ. осм. = a ; вер-
хнего основания = b , $\Rightarrow$ м.к. $ABCD$ и $A'B'C'D'$ -
квадраты (~~м.к. - это~~ м.к. правиль-
ная усечённая пирамида), то числ. осм.
м.к. $\Sigma = a$; верхнее = b .

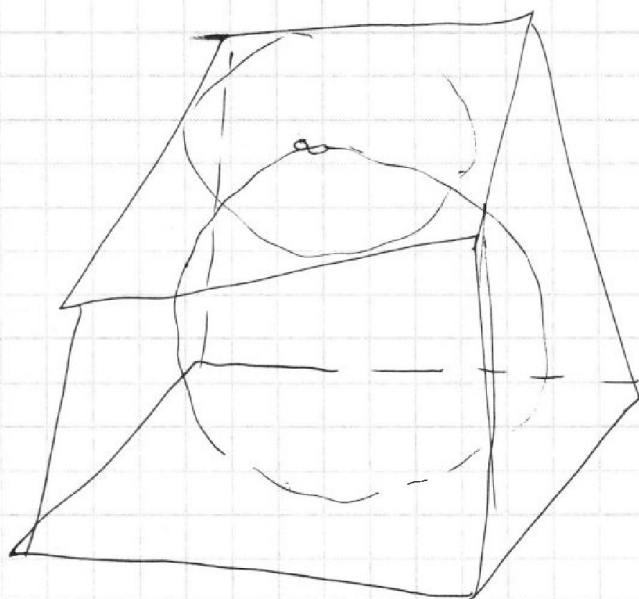
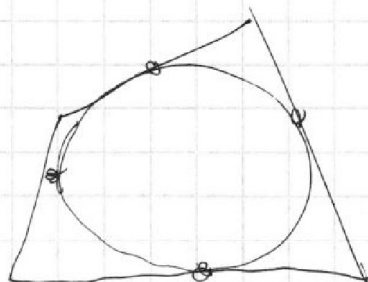


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☒

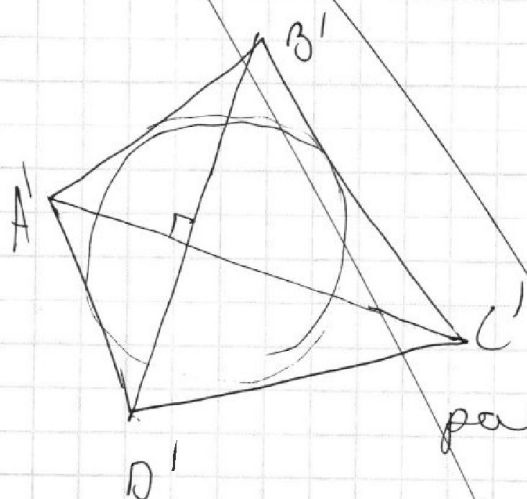
СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AA' + A'C' + C'D' = BB' + B'D' + D'A'$$

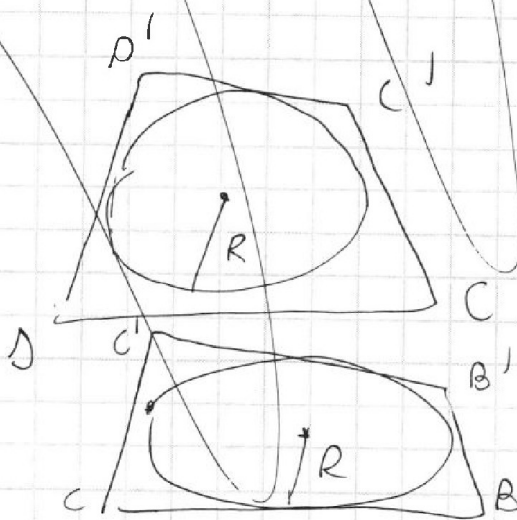
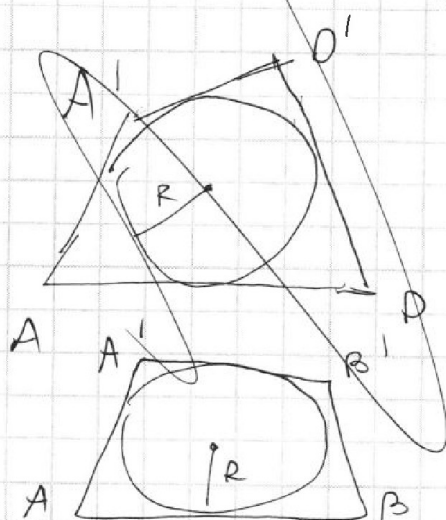
II) К. пирамида — правильная, то

$$B'D' \perp A'C'$$



Рассм.
поск. Боровых
трапеций, как мы
это делаем

III) К. пирамида правильная, то
сечен. Ω шаров Ω в 4-ех плоскостях
возникнут как-то так:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Древ, что R у всех точек окр. —
— равно, —
—, $AA' + DD' = a + A'D'$
 $AA' + BB' = a + A'B'$
 $BB' + CC' = a + B'C'$
 $DD' + CC' = C'D' + a$
Then we рассматр. верянюю точку:
 $A'B' + C'D' = B'C' + A'C'$
Это возможно тогда и только тогда,
когда $D'A' = A'B'$; $B'C' = D'C'$, —
—



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper:

Top left: A list of numbers 1 through 5, with some crossed out. Below them, a calculation: $6 + 2 \times 7 + 2 \times 6 = 18 + 14 + 12 = 44$. To the right, a small diagram of a circle with a point inside.

Top center: A long division problem: $1111 \div 7 = 158$ with a remainder of 5. Below it, another long division: $1111 \div 11 = 101$ with a remainder of 0.

Top right: A diagram of a circle with a point inside, and a small table with numbers 1 through 5, with some crossed out.

Middle left: A diagram of a circle with a point inside, and a calculation: $2y + x = x + y$. Below it, a calculation: $2y + x = 2 \times 2y = 4y$.

Middle center: A calculation: $2y + x = 2 \times 2y = 4y$. Below it, a calculation: $x = 50$.

Middle right: A calculation: $2y + x = 2 \times 2y = 4y$. Below it, a calculation: $x = 169$.

Bottom left: A diagram of a circle with a point inside, and a calculation: $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$. Below it, a calculation: $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$.

Bottom center: A diagram of a circle with a point inside, and a calculation: $169 - 25 = 144$.

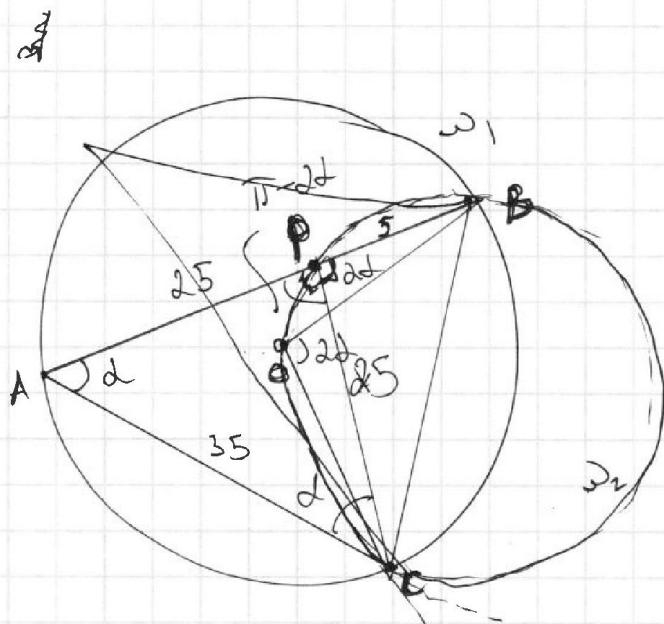


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

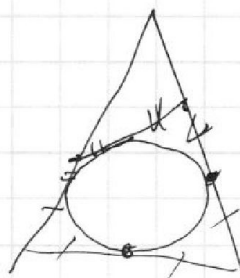
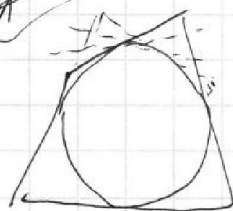
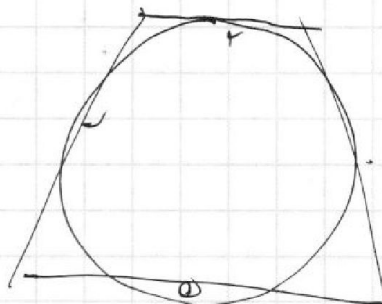
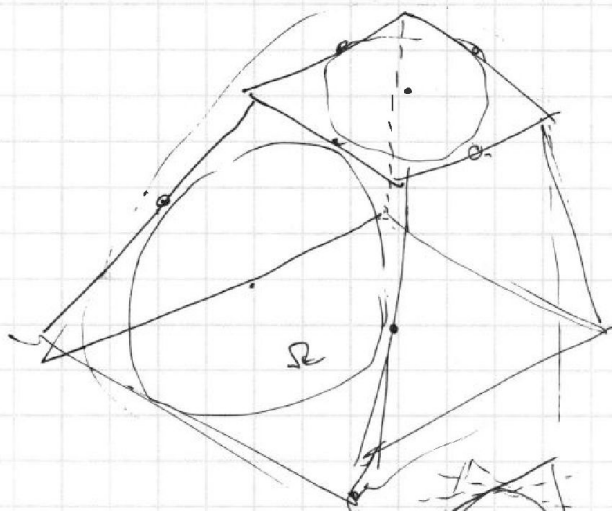
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что $\angle BPC = 90^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$,
 $\Rightarrow \angle BAC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (м.р. впис; описывается
на ту же дугу, что и центральный).



—