



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1.

Пусть $A = \overline{xxxx}$, тогда $A = 1000x + 100x + 10x + x =$
 $= 1111x$, $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 9$.

$1111 = 11 \cdot 101$, числа 11 и 101 — простые.

$x \leq 9 \Rightarrow x \nmid 101$, $x \nmid 11$

~~С двузачное~~

$A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101$
 $A \cdot B \cdot C$ — полн. квадр. $\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B : 101$ или $C : 101$, но $C \leq 99$ т.к. оно

двузначное, соответственно $C : 101 \Rightarrow$

$\Rightarrow B : 101$.

Пусть $B = 101 \cdot y$, $y \in \mathbb{N}$, $y \leq 9 \Rightarrow B = \overline{y0y}$

B содержит хотя бы одну цифру 1 $\Rightarrow y = 1$,

$B = 101$.

Аналогично, $A : 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11$
 $A \cdot B \cdot C$ — полн. квадр. $\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B : 11$ или $C : 11$, но $B = 101 \nmid 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 55$ т.к. оно двузнач., содержит цифру 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\begin{cases} A = 11 \cdot 101 \cdot x \\ B = 101 \\ C = 55 = 11 \cdot 5 \end{cases}$$

$A \cdot B \cdot C$ — полн. квадрат $\Rightarrow x = 5. \Rightarrow$
 $\Rightarrow A = 5555.$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \quad \text{N 2.}$$

Затем условие неизменности K при уменьшении

x на 3 и увеличении y на 3 в виде ур-я:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)}, \quad x \neq 3, \quad (y > 0 \text{ по усл.} \Rightarrow y+3 > 0).$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3) \Rightarrow xy = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = x - 3$$

$$\text{Найдём } M: M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$$

$$= (x - (x-3))(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 9x(x-3) =$$

$$= 3(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9x^2 + 27x =$$

$$= 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = \boxed{27}$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} + k_1 \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi k_2 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{2} + k_1) - y}{2} = k_2 \Rightarrow y = +\frac{1}{2} - 2k_2 + k_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Подходят $(x; y)$ вида $(\frac{1}{2} + k_1; +\frac{1}{2} - 2k_2 + k_1)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) = 0$, то $|\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Этот случай аналогичен предыдущему.

Получим, что $\cos \alpha \neq 0$, $\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \neq 0$

$$(3) \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(\frac{\alpha + \beta}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}(\frac{\alpha + \beta}{2}) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} - x = \frac{x + y}{2} + k \Rightarrow 1 - 2x = x + y + 2k \Rightarrow y = 3x - 1 + 2k \quad (5)$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \pi x \neq 0 & \text{из (4)} \Rightarrow \text{если } \cos \alpha \neq 0, \text{ то } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2k_1, & k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + k_2, & k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Подходят $(x; y)$ вида $(x, 3x - 1 + 2k_1)$,

где $k_1 \in \mathbb{Z}$, x — любое действ., $\neq \frac{1}{2} + k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, вот все подходящие пары $(x; y)$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ, для гл:

1) $(d; 1+2k-d)$, где k - число $\in \mathbb{Z}$, d - число действит.

2) $(\frac{1}{2} + k_1; \frac{1}{2} + 2k_2 + k_1)$, где k_1, k_2 - число $\in \mathbb{Z}$

3) $(d; 3d-1+2k_1)$, где d - число действит.,
которое $\neq \frac{1}{2} + k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, k_1 - число $\in \mathbb{Z}$.

д)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$a) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

Положим $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$, тогда

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin \alpha = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \left(\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right) = 0$$

$$\left[\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \right. \quad (1)$$

$$\left. \sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0 \right] \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x + y = 1 + 2k$$

$$y = 1 + 2k - x$$

$\Rightarrow$ Проходим все $(x; y)$ вида $(x; 1 + 2k - x)$, где $k \in \mathbb{Z}$, x — любое действ. число.

$$(2) \Rightarrow \sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (3)$$

~~или~~ если $\cos \alpha = 0$, тогда $|\sin \alpha| = 1$,

$$\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Пусть билетов a ,

Пусть в классе n человек,

В конце месяца стало $x+4$ билетов,

$x \in \mathbb{N}$.

В начале месяца кол-во ~~вари~~ способов
выбрать 4 человека обладателей билетов:

$$C_n^4 = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Еще 2 билета зарезервированы (для Пети
и для Васи), то кол-во способов

выбрать обладателей оставшихся $2-x$

билетов такое: $C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

Вероятность того, что Петя, и Вася
попадут на концерт в начале месяца:

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично рассмотрим ситуацию в
конце месяца. Общее кол-во вариантов:

$$C_n^{4+x} = \frac{n!}{(4+x)! \cdot (n-x-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \overbrace{n-4)(n-5) \dots}^{x \text{ множителей}}}{(4+x)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол-во "благотворных" вариантов:
 осталось билетов для других $\rightarrow C_{n-2}^{(x+4)-2} = C_{n-2}^{x+2} = \frac{(n-2)!}{(x+2)! \cdot (n-2-x-2)!} = \frac{(n-2)!}{(x+2)! \cdot (n-4-x)!} =$
 $= \frac{(n-2)(n-3) \cdot \overbrace{(n-4)(n-5) \dots}^{x \text{ множителей}}}{(x+2)!}$

Вероятность в конце месяца:
 $p_2 = \frac{C_{n-2}^{(x+4)-2}}{C_n^{4+x}} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot (n-1)n}$

По условию: $p_1 \cdot 3,5 = p_2$
 $\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot n(n-1)}$

$$\frac{(4+x)!}{(2+x)!} = 42$$

$$(x+3)(x+4) = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169 = 13^2$$

$$x_1 = \frac{-7+13}{2} = 3 \quad \text{подходит}$$

$$x_2 = \frac{-7-13}{2} = -10 < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Таким образом, в конце месяца было $4+x=7$ билетов.

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

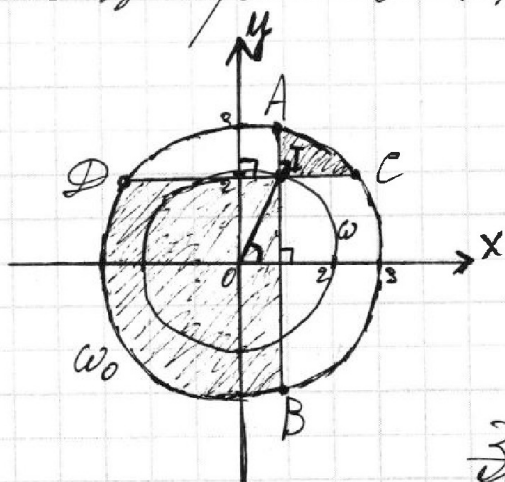
N 6.

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad (1)$$

— круг с центром $(0;0)$ и рад. 3.
назовём его ω_0

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$$

Построим дополнительную окр-ть ω с центром в $(0;0)$ и радиусом 2.



Пусть $I(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

Тогда $I \in \omega$ т.к.

$$(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 = 2^2$$

Заметим, что

Остальные обозначения см. на рис.

$(AB \perp OX, CD \perp OY, I \in AB, CD)$

Нетрудно заметить, что фигура Φ имеет вид заштрихованной области.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что граница Φ состоит из двух дуг ($\check{AC}$ и $\check{BD}$), а также двух отрезков (AB и CD).

Из геометрии $\Rightarrow \check{AC} + \check{BD} = \angle AIC + \angle BID$
($\check{AC}, \check{BD}$ — величины соотв. дуг) по Th о сумме ~~вершин~~ величин дуг, опирающихся на вертикальные углы.

Таким образом, $\check{AC} + \check{BD} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ при $\forall L$.

Найдём длину дуг $\check{AC}$ и $\check{BD}$.

Пусть l_0 — сумма длин $\check{AC}$ и $\check{BD}$.

$$l_0 = \frac{\check{AC} + \check{BD}}{2\pi} \cdot \underbrace{(2\pi \cdot 3)}_{\text{длина границы } \omega_0} = 3\pi$$

l_0 — инвариант (не зависит от L),
значит нам надо максимизировать $AB + CD$.

Пусть $AB = h$, $CD = d$,

$$2\cos L = a, \quad 2\sin L = b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда координаты $I - (a; b)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4 \quad \text{т.к. } I \in \omega \Rightarrow b^2 = 4 - a^2 \quad (2)$$

Введём координаты точек: $A(a; y_a)$,

$B(a; y_b)$, $C(x_c; b)$, $D(x_b; b)$.

$$A \in \omega_0 \Rightarrow a^2 + y_a^2 = 9$$

$\times: A \in \text{границе } \omega_0$

$$y_a = \sqrt{9 - a^2} \quad (y_a > 0 \text{ по обозна-}$$

чению).

Из симметрии $y_b = -y_a$.

$$\text{Тогда } h = 2\sqrt{9 - a^2} \quad y_a - y_b = 2\sqrt{9 - a^2}$$

$$\text{Аналогично } d = 2\sqrt{9 - b^2} \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow d = 2\sqrt{5 + a^2}$$

$$\text{Пусть } f(a) = h + d = 2(\sqrt{9 - a^2} + \sqrt{5 + a^2})$$

Найдём $f_{\max}$, $|a| \leq 2$ т.к. $|\cos \alpha| \leq 2$.

$$f'(a) = 2\left(\frac{-2a}{2\sqrt{9 - a^2}} + \frac{2a}{2\sqrt{5 + a^2}}\right) = 2a\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 5}} - \frac{1}{\sqrt{9 - a^2}}\right) =$$

$$= 2a\left(\frac{\sqrt{9 - a^2} - \sqrt{a^2 + 5}}{\sqrt{a^2 + 5}\sqrt{9 - a^2}}\right)$$

Определим, когда $\sqrt{9 - a^2} - \sqrt{a^2 + 5} \geq 0$

$$\sqrt{9 - a^2} \geq \sqrt{a^2 + 5}$$

$$9 - a^2 \geq a^2 + 5$$



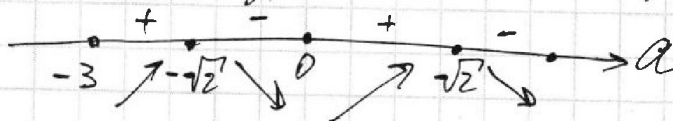
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \leq 2 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{2}$$

Таким образом, можем показать области возрастания и убывания $f(a)$:



Кандидаты в максимумы: $a = \sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{5+2}) = 4\sqrt{7}$$

Найдём ^{число} α , при ^{котором} $a = \pm\sqrt{2}$.

$$a = \pm\sqrt{2}, \quad a = 2\cos\alpha = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Получаем, задано числом, что такой α существует.

Максимальное значение минимума:

$$M_{\max} = 6 + f(\sqrt{2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

Ответ: $M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}$,

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$A = \overline{aaaa} = 1111a$$

$$\frac{412}{5x} = \lg \frac{2+B}{2} = \text{ctg } 2$$

$$A = 1111a \quad \lg \frac{2+B}{2} = \lg \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right)$$

$$B = 100b + 10c + d$$

$$C = 50 + e \quad \text{или} \quad 10e + 5$$

$$ABC : 101 \Rightarrow ABC : 101^2$$

$$B : 101$$

$$B = 101x$$

$$C : 11$$

$$C = 55 = 11 \cdot 5$$

$$5555$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) -$$

$$1111 \mid 11 \quad - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) +$$

$$101 \mid 101 \quad + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$1 \mid \quad = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \alpha = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \alpha$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3) + (x+3) + 1}{(x-3)(y-3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y-3)}$$

$$\text{OD } 3: x, y \neq 0, x \neq 3, y \neq -3.$$

$$xy = \cancel{xy} + 3x - 3y - 9$$

$$x - y - 3 = 0 \quad y = x - 3$$

$$(x - x + 3)(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9x^2 + 27x$$

$$9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27 = 27(2 - x)$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$\pi B n$

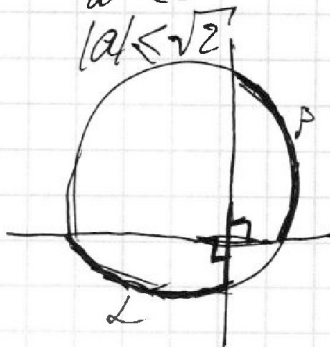
C_n^4
 C_{n+2}^4

$$\frac{n!}{2 \cdot (n-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\frac{1}{(2+x)!} \cdot n(n-1) \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \dots$$

$$\begin{cases} (x-2\cos t)(y-2\sin t) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9-a^2} &\geq \sqrt{5+a^2} \\ 9-a^2 &\geq 5+a^2 \\ a^2 &\leq 2 \\ |a| &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\frac{C_n^2}{C_{n+2}^4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{C_n^{2+x}}{C_{n+2}^{4+x}} = 2a \left(\frac{\sqrt{9-a^2} - \sqrt{5+a^2}}{\sqrt{5+a^2}(9-a^2)} \right)$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n-1) \cdot n}{\frac{1}{24}(n+2)(n+1)n(n-1)} = \frac{12}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{42}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{(2+x)!} \cdot n(n-1) \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \dots = \frac{(y+x)!}{(2+x)!} = \frac{42}{1}$$

$$(x-2t)(y+2\sqrt{1-t^2}) \geq 0$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + y_1^2 = 3 \quad y_1^2 = \pm \sqrt{9-x^2}$$

$$h = 2\sqrt{9-x^2}$$

$$l = 2\sqrt{9-y^2}$$

$$l = 2\sqrt{5+x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= \pi/2 \\ \alpha + \beta &= \pi \end{aligned}$$

$$h + l = 2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{5+x^2})$$

